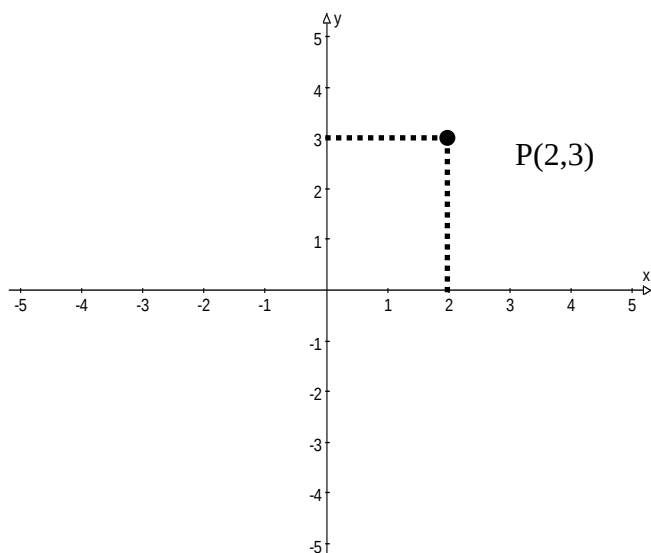


1 FUNDAMENTOS

1.1 PLANO COORDENADO

Assim como os números reais são utilizados como coordenadas para pontos de uma reta, pares de números reais podem ser utilizados como coordenadas para pontos de um plano. Com este propósito se estabelece um sistema de coordenadas retangulares no plano chamado de *plano coordenado*.

Desenhamos duas retas perpendiculares no plano, uma horizontal e outra vertical. Estas retas são chamadas de *eixo x (abscissa)* e *eixo y (ordenada)*, respectivamente, e seu ponto de intersecção chama-se *origem*. As coordenadas são assinaladas com a origem como ponto zero em ambos os eixos e a mesma distância unitária em ambos os eixos. O semi-eixo positivo dos x está à direita da origem, semi-eixo negativo dos x está à esquerda; o semi-eixo positivo dos y está acima da origem e o semi-eixo negativo dos y está abaixo.



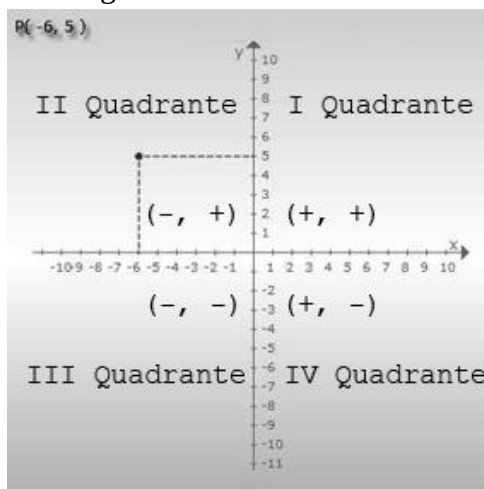
Consideremos um ponto P qualquer do plano. Desenhemos uma reta por P paralela ao eixo dos y , e seja x a coordenada do ponto em que a curva corta o eixo dos x . Analogamente, desenhemos uma reta por P paralela ao eixo dos x , e seja y a coordenada do ponto em que essa reta corta o eixo dos y . Os números x e y assim determinados chamam-se coordenada x (abscissa do ponto P) e coordenada y (ordenada do ponto P). As coordenadas de P são escritas como um par ordenado (x, y) .

Historicamente, coube a Galileu Galilei (1564-1642) o mérito de ter sido o primeiro a demonstrar a importância dos sistemas de referência na formulação das leis que regem a descrição dos fenômenos físicos (por exemplo, movimentos uniformes e movimentos relativos), estabelecendo desse modo, uma relação mensurável entre leis e grandezas físicas.

O mundo não se apresenta com um sistema de coordenadas fixo a ele, mas podemos localizar um sistema físico em um sistema de coordenadas imaginário como sendo uma grade artificialmente sobreposta de modo que você se localize em um problema, a fim de realizar medições quantitativas. Os eixos cartesianos são usados para localizar e medir algumas grandezas como: posição, aceleração, velocidades ou campos gravitacionais.

Podemos usar diferentes sistemas de coordenadas para resolução de problemas, mas geralmente é utilizada a representação gráfica envolvendo coordenadas cartesianas, que se trata de um sistema de coordenadas com eixos mutuamente perpendiculares. Em duas dimensões usamos os sistemas de coordenadas xy e, em três dimensões, o xyz . A localização dos eixos não é inteiramente

arbitrária. Por convenção, o semi-eixo positivo de y está posicionado a 90° em sentido anti-horário do o semi-eixo positivo de x, conforme figura abaixo.



Exemplo 1: Localize os pontos A(2,0), B(0,4), C(-3, 2) e D(-2, -4) no plano coordenado.

1.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

A distância d entre dois pontos $P_1 (x_1, y_1)$ e $P_2 (x_2, y_2)$ no plano é dada por:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Exemplo 2: Determine a distância entre os pontos (-4,3) e (3,-2). Resposta: $d=\sqrt{74}$.

Exemplo 3: Determine as coordenadas do ponto equidistante dos pontos A(5,2), B(-1,2) e C(-1,4). Resposta: D(2,3).

1.3 PONTO MÉDIO

Muitas vezes é útil conhecer as coordenadas do ponto médio do segmento que une dois pontos distintos dados. Se os pontos dados são $P_1 (x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, e se $P (x, y)$ é o ponto médio, então as coordenadas de P serão dadas por:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Exemplo 4: Os pontos (2, -2) e (-6, 5) são as extremidades do diâmetro de um círculo. Ache o centro e raio do círculo. Resposta: $C(-2,3/2)$ e $r = \frac{\sqrt{113}}{2}$.

Lista de Exercícios 1 - Geometria Analítica - Plano Cartesiano

1. Calcule o perímetro do triângulo de vértices A (4,7), B(-1,-8) e C (8,-5).
2. Determine um ponto no eixo das ordenadas equidistante aos pontos A(-1,3) e B(4,-2).
3. Determine um ponto no eixo das abscissas equidistante aos pontos A(-2,2) e B(4,4).
4. Encontre y tal que a distância aos pontos C(5,1) e D(5, y) seja 8.
5. O ponto M tem coordenadas iguais e fica distante 5 unidades do ponto E(2,3). Determine as coordenadas de M.
6. Considere o triângulo ABC sendo A(-3/2, 6), B(7/2, -1) e C(-2,-3).
 - a) Determine as coordenadas dos pontos médios dos lados AB e BC.
 - b) Calcule a distância entre os pontos A e B.
7. Encontre x tal que a distância entre (x,3) e (2, -1) seja 5.
8. Mostre que os pontos A(1, -3), B(3,2) e C(-2,4) são vértices de triângulo isósceles.
9. Ache o ponto equidistante dos pontos P(1,7), Q(8,6) e R(7,-1).
10. Uma circunferência com centro em C(-4,1), tem a extremidade de um diâmetro em B(2,6). Determine as coordenadas da outra extremidade.
11. Mostre que os pontos A(7,5), B(2,3) e C(6,-7) são vértices de um triângulo retângulo.

Respostas Lista 1:

- 1) $\sqrt{250} + \sqrt{160} + \sqrt{90} = 12\sqrt{10}$
- 2) P(0,-1)
- 3) P(2,0)
- 4) $y=9$ ou $y=-7$
- 5) M(6,6) ou M(-1,-1)
- 6) a) (1,5/2) e (3/4,-2) b) $\sqrt{74}$
- 7) $x=5$ ou $x=-1$
- 9) (4,3)
- 10) (-10,-4).

2 VETORES

2.1 SEGMENTO DE RETA ORIENTADO

Um segmento de reta orientado AB é determinado por um par ordenado de pontos AB, onde A é chamado de origem e B de extremidade. Geometricamente é representado por uma reta que caracteriza visualmente o sentido do segmento.

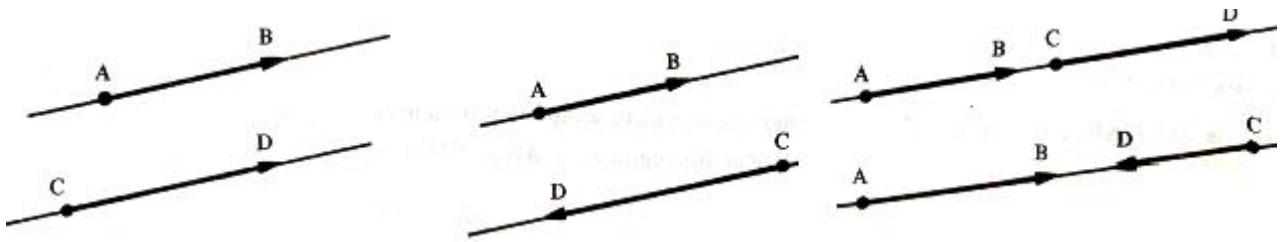


Módulo ou Norma de um vetor

Módulo, norma ou comprimento é o número real não negativo que é a medida do segmento.

Direção e Sentido

Dois segmentos orientados não nulos AB e CD têm a mesma direção se as retas suportes desses segmentos são paralelas ou coincidentes.

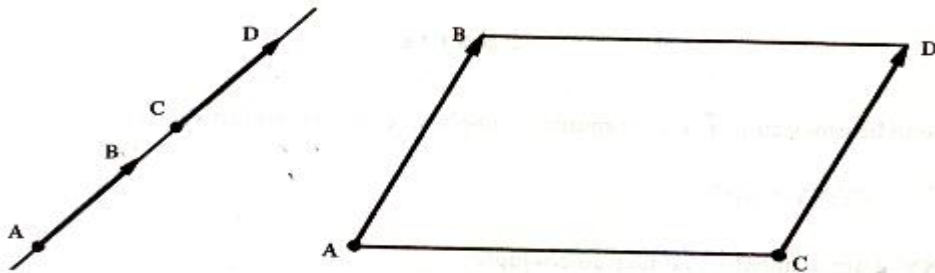


Só se pode comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles têm a mesma direção. Dois segmentos de sentidos orientados opostos têm sentidos contrários.

2.2 SEGMENTOS EQUIPOLENTES

Dois segmentos orientados AB e CD que tenham a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo são chamados de equipolentes.

Representação: $AB \sim CD$.



2.3 VETOR

Vetor é a coleção de todos os segmentos orientados equipolentes a um dado segmento orientado AB . Representação: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ou $B-A$

O vetor é caracterizado por seu módulo, por sua direção e sentido. O módulo de $\vec{v}$ é indicado por $|\vec{v}|$ ou ainda $\|\vec{v}\|$.

Vetores Iguais

Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se e somente se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Vetor Nulo

Os segmentos nulos, por serem equipolentes entre si, determinam um único vetor, chamado vetor nulo ou vetor zero, que é indicado por $\vec{0}$.

Vetores Opostos

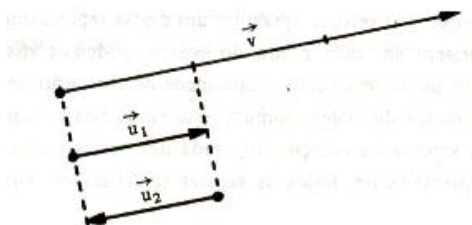
O vetor $\overrightarrow{BA}$ é oposto ao vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e é indicado por $-\overrightarrow{AB}$ ou por $-\vec{v}$.

Vetor Unitário

Um vetor $\vec{v}$ é unitário se $|\vec{v}| = 1$.

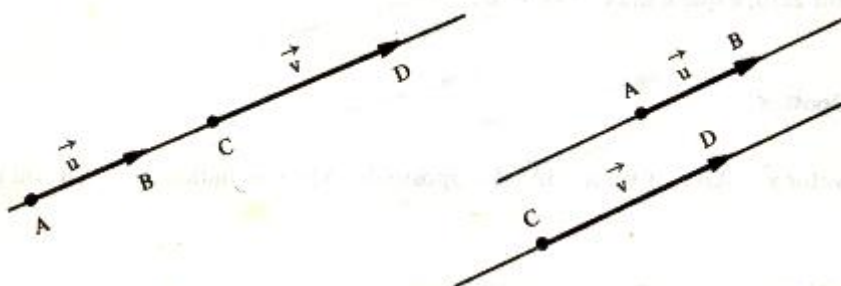
Versor

Versor de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e sentido de $\vec{v}$.



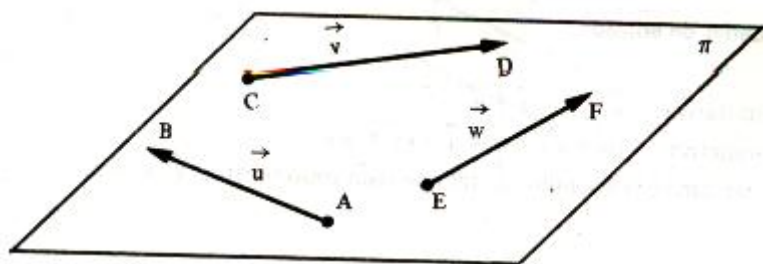
Vetores Colineares

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem a mesma direção. Isto é, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas.



Vetores Coplanares

Os vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ditos coplanares se possuem representantes AB, CD e EF pertencentes a um mesmo plano.



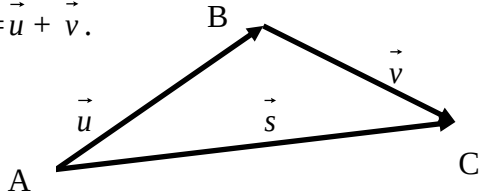
Observação: Dois vetores quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são sempre coplanares, pois sempre podemos tomar um ponto no espaço e, com origem nele, imaginar dois representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pertencendo a um plano que passa por este ponto. Três vetores poderão ou não ser coplanares.

2.4 OPERAÇÕES COM VETORES

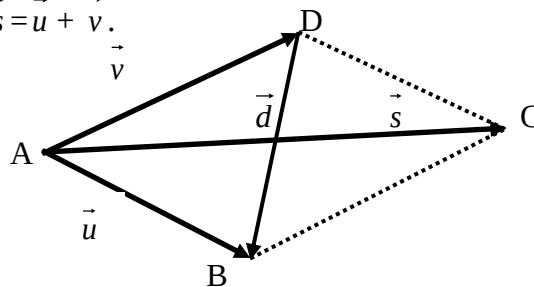
2.4.1 Adição

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos AB e BC.

Os pontos A e C determinam um vetor $\vec{s}$ que é, por definição, a soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.



No caso de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não serem vetores paralelos, há outra maneira de encontrarmos o vetor $\vec{s}$. Representa-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados com origem em A. Completa-se o paralelogramo ABCD e o segmento orientado de origem A, que corresponde à diagonal do paralelogramo é o vetor $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.



Propriedades da Adição

- I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- III) Elemento Neutro: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
- IV) Elemento Oposto: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$

2.4.2 Diferença

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos AB e AC, respectivamente, e construído o paralelogramo ABCD, verifica-se que a soma $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ é representada pelo segmento orientado AC (uma das diagonais) e que a diferença $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$ é representada pelo segmento DB (a outra diagonal).

2.4.3 Multiplicação de um vetor por um número real

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $k \neq 0$, chama-se produto do número real k pelo vetor $\vec{v}$ o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$ tal que:

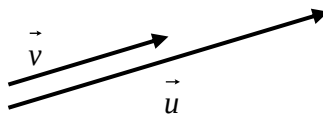
- a) módulo: $|\vec{p}| = |k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$
- b) direção: a mesma de $\vec{v}$

c) sentido: o mesmo de $\vec{v}$ se $k > 0$, e o contrário se $k < 0$.

Observações:

a) Se $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, o produto é o vetor nulo.

b) Seja um vetor $k\vec{v}$, com $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se fizermos com que o número real k percorra o conjunto dos números reais, obteremos todos os infinitos vetores colineares a $\vec{v}$, e portanto, colineares entre si, isto é, qualquer um deles é sempre múltiplo escalar do outro. Reciprocamente, dados dois vetores colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sempre existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k\vec{v}$.



c) O versor de um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é o vetor unitário $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$ ou $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Propriedades da Multiplicação de um vetor por um número real

I) Associativa: $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$

II) Distributiva em relação à adição de escalares: $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

III) Distributiva em relação à adição de vetores: $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

IV) Identidade: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

2.5 ÂNGULO ENTRE VETORES

O ângulo entre dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o ângulo θ formado pelas semi-retas paralelas aos vetores tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Observações:

a) Se $\theta = \pi$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e sentidos contrários.

b) Se $\theta = 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido.

c) Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, isto é, $\vec{u} \perp \vec{v}$. Neste caso, $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

d) O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor.

Exemplo 1: Sabendo que o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60° , determine o ângulo formado pelos vetores:

a) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$

b) $-\vec{u}$ e $\vec{v}$

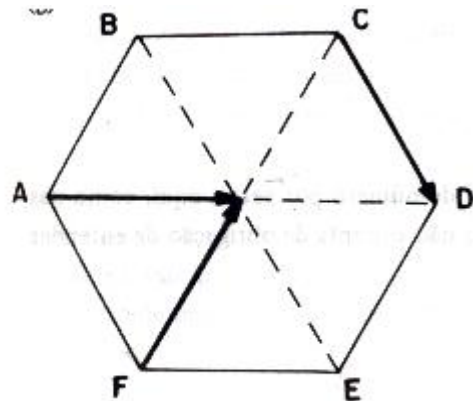
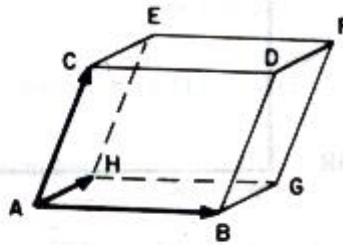
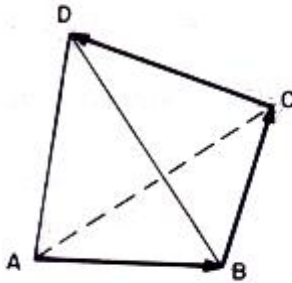
c) $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$

d) $2\vec{u}$ e $3\vec{v}$

Resposta: (a) e (b) 120° ; (c) e (d) 60° .

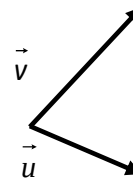
Exercícios:

1. Encontre a soma dos vetores indicados na figura.



2. Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura ao lado, represente graficamente os vetores:

- a) $\vec{u} - \vec{v}$
- b) $-\vec{u} + \vec{v}$
- c) $-\vec{u} - \vec{v}$
- d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

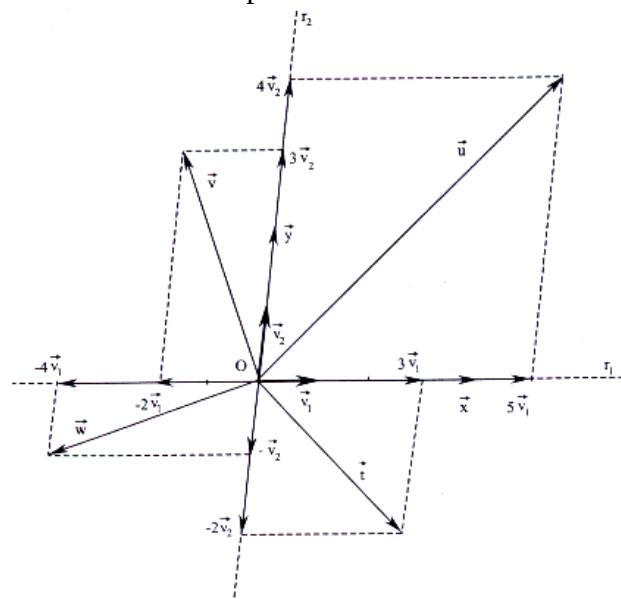


Lista de Exercícios 2 - Vetores I - Resolva os exercícios pares da lista de exercícios 2, página 14 do livro Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle, Editora Makron Books.

3 VETORES NO ESPAÇO E NO PLANO

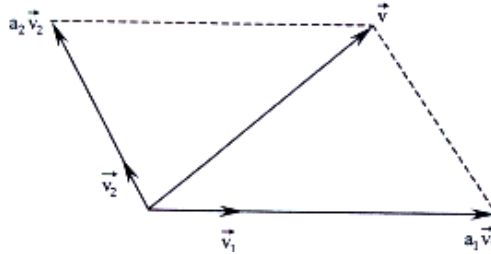
3.1 VETORES NO PLANO

Consideremos dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos, representados com origem no mesmo ponto O, sendo r_1 e r_2 as retas contendo estes representantes:



Os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}, \vec{x}$ e $\vec{y}$ em função de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são expressos por:

Dados dois vetores quaisquer $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos, para cada vetor $\vec{v}$ representado no mesmo plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 tais que $\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$.



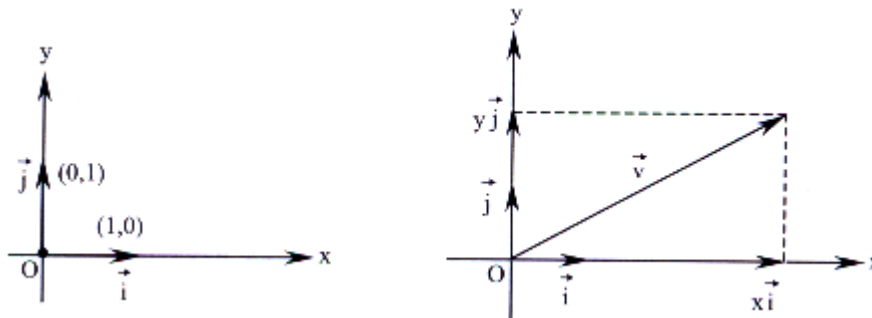
Quando um vetor $\vec{v}$ é expresso como $\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$, diz-se que $\vec{v}$ é uma combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. O conjunto $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é chamado de base no plano. Qualquer conjunto de dois vetores não paralelos constitui uma base no plano. Os números a_1 e a_2 são chamados componentes

Uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é dita ortonormal se os seus vetores forem ortogonais e unitários, ou seja, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ e $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$.

ou coordenadas de $\vec{v}$ na base B.

As bases mais utilizadas são as bases ortonormais.

Uma base importante é a base que determina o sistema cartesiano ortogonal. Os vetores ortogonais e unitários, neste caso, são simbolizados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$, ambos com origem em O e extremidades em (1, 0) e (0, 1), respectivamente, sendo a base $C = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ chamada de canônica.



Expressão Analítica de um Vetor

Dado um vetor $\vec{v}$ qualquer do plano, existe uma só dupla de números x e y tais que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Os números x e y são as componentes de $\vec{v}$ na base canônica. A primeira componente é a abscissa de $\vec{v}$ e a segunda componente é a ordenada de $\vec{v}$.

O vetor $\vec{v}$ também pode ser representado por $\vec{v} = (x, y)$. O par ordenado (x, y) também é chamado de expressão analítica de $\vec{v}$.

Exemplo 1: Expresse os vetores abaixo em forma de par ordenado:

a) $\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j}$

b) $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

c) $\vec{v}_3 = -6\vec{i}$

Respostas: a) (1,-1) b) (2,-3) c) (-6,0).

Observação: A cada ponto $P(x, y)$ do plano xy corresponde um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Isto é, as coordenadas do ponto P são as próprias componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base canônica.

Igualdade de Vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se e somente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Escreve-se $\vec{u} = \vec{v}$.

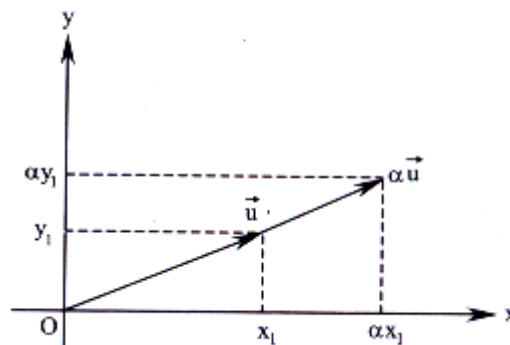
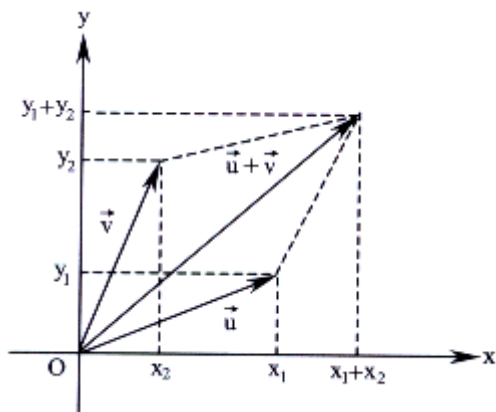
Exemplo 2: Determine os valores de x e y para os quais os vetores $\vec{u} = (x-3, 2)$ e $\vec{v} = (4, y+6)$ sejam iguais. Resposta: $x=7$ e $y=-4$.

Operações com Vetores

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e um número $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

b) $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$



Exemplo 3: Dados os vetores $\vec{v} = (-2, 5)$ e $\vec{w} = (3, 4)$, calcule os vetores:

a) $\frac{1}{2}\vec{v}$

b) $\vec{w} - \vec{v}$

c) $2\vec{w} + \vec{v}$

Respostas: a) $(-1, 5/2)$; b) $(5, -1)$; c) $(4, 13)$.

Exemplo 4: Dados os vetores $\vec{u} = (-2, 5)$ e $\vec{v} = (3, 4)$, determine o vetor $\vec{x}$ na igualdade

$$3\vec{x} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{x}.$$

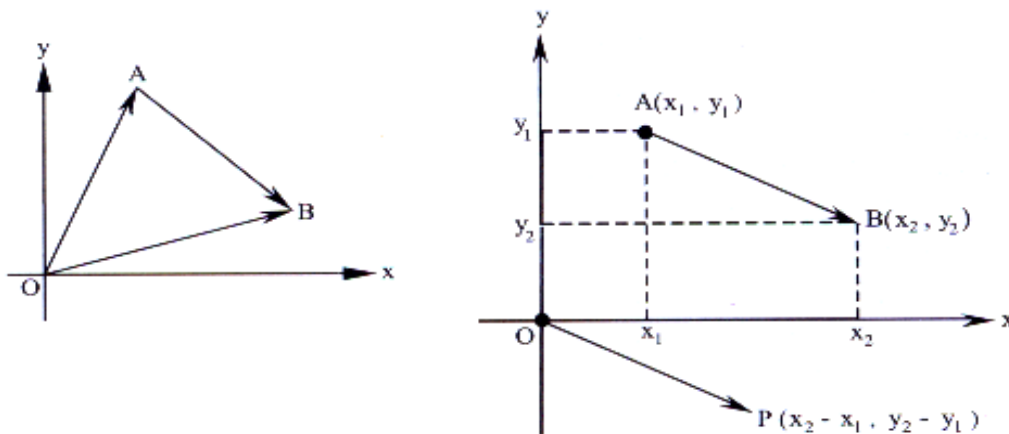
Resposta: $(11/4, -4)$.

Exemplo 5: Encontre os valores de a_1 e a_2 tais que $\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$ sendo $\vec{v} = (6,3)$, $\vec{v}_1 = (1,1)$ e $\vec{v}_2 = (-2,5)$.

Resposta: $a_1 = 36/7$ e $a_2 = -3/7$.

Vetor Definido por Dois Pontos

Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$. Então o vetor $\overrightarrow{AB}$ em termos das coordenadas dos pontos A e B são $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



Observação: Um vetor tem infinitos representantes que são segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. O melhor representante do vetor $\overrightarrow{AB}$ é aquele que tem origem em $O(0, 0)$ e extremidade em $P(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Este vetor é chamado de representante natural de $\overrightarrow{AB}$.

Exemplo 6: Dados os pontos $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ e $C(-2, 4)$, determine $D(x, y)$ tal que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$.

Resposta: $D(0, 5/2)$.

Paralelismo de Dois Vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos quando suas componentes são proporcionais, isto é, se existe um número real α tal que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$. Ou seja, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

Exemplo 7: Verifique se os vetores $\vec{s} = (-1, 3)$ e $\vec{t} = (2, -6)$ são paralelos. Resposta: São paralelos.

Módulo de um Vetor

Seja $\vec{v} = (x, y)$, então pelo teorema de Pitágoras: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemplo 8: Determine o módulo do vetor $\vec{v} = (-1, 3)$. Resposta: $\sqrt{10}$.

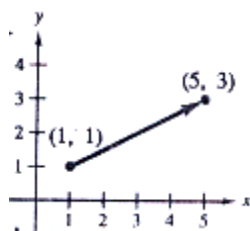
Vetor unitário ou Versor de um Vetor

O vetor unitário de um vetor $\vec{v} = (x, y)$ é dado pela expressão $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Exemplo 9: Determine o versor do vetor $\vec{v} = (-2, 3)$. Resposta: $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.

Exercícios:

1. Encontre o representante natural do vetor dado na figura abaixo. Isto é, encontre o representante do vetor que tem origem em $(0,0)$.



2. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{w} = (1, 2)$, determine:

a) $\vec{v} = \vec{u} - 2\vec{w}$ b) $\vec{v} = \frac{1}{2}(3\vec{u} + \vec{w})$

3. Encontre a e b tais que $\vec{v} = a\vec{u} + b\vec{w}$ onde $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{w} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (2, 1)$.

4. Encontre o módulo do vetor $\vec{v} = -10\vec{i} + 3\vec{j}$.

5. Dados $\vec{u} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $\vec{v} = (2, 3)$, determine $\frac{|\vec{u} + \vec{v}|}{|\vec{u} + \vec{v}|}$.

6. Encontre o vetor $\vec{v}$ como norma $|\vec{v}| = 4$ e que tenha a mesma direção e sentido do vetor $\vec{u} = (1, 1)$.

Respostas:

- 1) $\vec{v} = (4, 2)$
- 2) a) $(0, -5)$; b) $(7/2, -1/2)$
- 3) $a=b=1$
- 4) $\sqrt{109}$
- 5) 1
- 6) $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

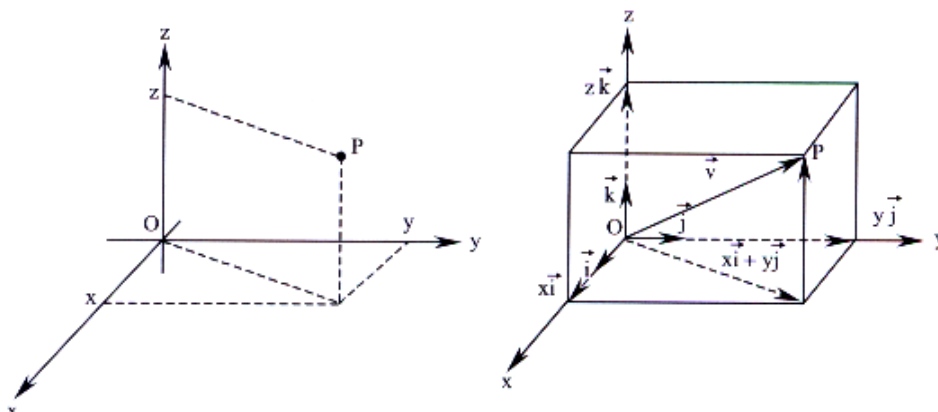
3.2 VETORES NO ESPAÇO

No espaço, a base canônica $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ irá determinar o plano xyz, onde os três vetores são unitários, ortogonais dois a dois e representados com origem no ponto O. Este ponto e a direção

de cada um dos vetores da base determinam os três eixos cartesianos: eixo x (das abscissas) que corresponde ao vetor $\vec{i}$, o eixo y (das ordenadas) que corresponde ao vetor $\vec{j}$ e o eixo z (das cotas) que corresponde ao vetor $\vec{k}$.

Cada dupla de vetores da base e, conseqüentemente, cada dupla de eixos, determina um plano coordenado. Portanto, temos três planos coordenados o plano xy , o plano xz e o plano yz .

A cada ponto $P(x, y, z)$ de espaço corresponderá o vetor $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, isto é, as coordenadas x, y e z do ponto P são as componentes do vetor $\vec{OP}$ na base canônica.



Expressão Analítica de um Vetor no Espaço

A expressão analítica do vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ é $\vec{v} = (x, y, z)$.

Exemplo 10: Escreva a expressão analítica dos seguintes vetores.

- | | | |
|--|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ | b) $\vec{u} = \vec{j} - \vec{i}$ | c) $\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{k}$ |
| d) $\vec{t} = \vec{i}$ | e) $\vec{v} = \vec{j}$ | f) $\vec{s} = \vec{k}$ |

Respostas: a) (1,2,-3) b) (-1,1,0) c) (3,0,-1) d) (1,0,0) e) (0,1,0) f) (0,0,1).

Igualdade de Vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se e somente se $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$. Escreve-se $\vec{u} = \vec{v}$.

Operações com Vetores

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e um número $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos:

- $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$
- $\alpha \vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$

Vetor Definido por Dois Pontos

Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2, z_2)$. Então o vetor $\overrightarrow{AB}$ em termos das coordenadas dos pontos A e B são $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Paralelismo de Dois Vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são paralelos quando suas componentes são proporcionais, isto é, se existe um número real α tal que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$. Ou seja, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Módulo de um Vetor

O módulo do vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ é dado por: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. O vetor unitário é $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Exemplo 11: Dados os pontos $A(0,1,-1)$ e $B(1,2,-1)$ e os vetores $\vec{u} = (-2, -1, 1)$, $\vec{v} = (3, 0, -1)$ e $\vec{w} = (-2, 2, 2)$, verifique se existem números a_1 , a_2 e a_3 tais que $\vec{w} = a_1 \overrightarrow{AB} + a_2 \vec{u} + a_3 \vec{v}$. Resposta: $a_1=3$; $a_2=1$; $a_3=-1$.

Observação: No plano, todo conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de dois vetores não paralelos constitui uma de suas bases, isto é, todo vetor desse plano é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. No espaço, todo conjunto de três vetores não coplanares constitui uma de suas bases, isto é, todo vetor do espaço pode ser escrito de modo único como combinação linear dos vetores desta base.

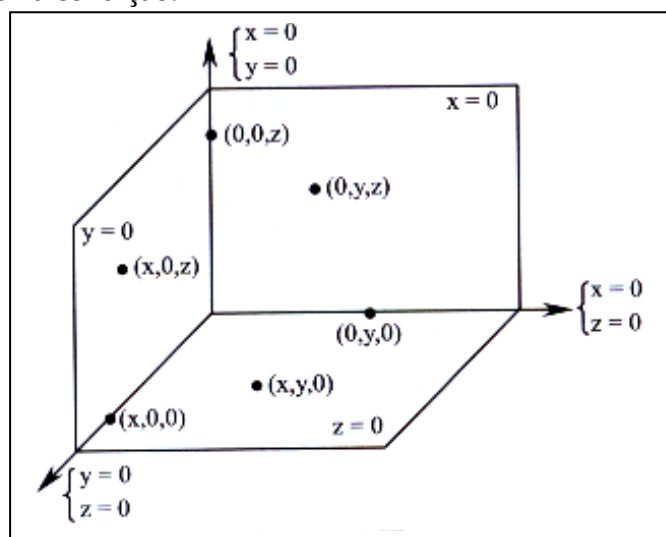
Exemplo 12: Seja o triângulo de vértices $A(4, -1, -2)$, $B(2, 5, -6)$ e $C(1, -1, -2)$. Calcule o comprimento da mediana do triângulo relativa ao lado $\overrightarrow{AB}$. Resposta: $\sqrt{17}$.

Exemplo 13: Apresente o vetor genérico que satisfaz à condição:

- a) paralelo ao eixo x;
- b) representado no eixo z;
- c) paralelo ao plano xy;
- d) paralelo ao plano yz;
- e) ortogonal ao eixo y;
- f) ortogonal ao eixo z;
- g) ortogonal ao plano xy;
- h) ortogonal ao plano xz.

Respostas:

- a) $(x, 0, 0)$ b) $(0, 0, z)$
- c) $(x, y, 0)$ d) $(0, y, z)$
- e) $(x, 0, z)$ f) $(x, y, 0)$
- g) $(0, 0, z)$ h) $(0, y, 0)$.



Exercícios:

- Dados os pontos $A(2, -2, 3)$, $B(1, 1, 5)$ e o vetor $\vec{v} = (1, 3, -4)$, calcule:

a) $(A-B) \cdot \vec{v}$ b) $2\vec{v} + 3(B-A)$

2. Dados os pontos A(3,-4,-2) e B(-2, 1, 0), determine o ponto N pertencente ao segmento AB tal que $\vec{AN} = \frac{2}{5} \vec{AB}$.
3. Sabendo que $3\vec{u} - 4\vec{v} = 2\vec{w}$, determine a, b e c sendo $\vec{u} = (2, -1, c)$, $\vec{v} = (a, b-2, 3)$, $\vec{w} = (4, -1, 0)$.
4. Quais dos seguintes vetores $\vec{u} = (4, -6, 2)$, $\vec{v} = (-6, 9, -3)$, $\vec{w} = (14, -21, 9)$ e $\vec{t} = (10, -15, 5)$ são paralelos?
5. A reta que passa pelos pontos A(-2,5,1) e B(1, 3, 0) é paralela à reta determinada por C(3,-1,1) e D(0, m, n). Determine o ponto D.
6. Dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)$, determine o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha:
 - a) sentido contrário de $\vec{v}$ e três vezes o módulo de $\vec{v}$;
 - b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 4;
 - c) sentido contrário de $\vec{v}$ e módulo 5.

Respostas:

- 1) a) (0,-6,2) b) (-1,15,-2)
- 2) (1,-2,-6/5)
- 3) a=-1/2 ; b=7/4 ; c=4
- 4) $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$, que é paralelo a $\vec{t}$.
- 5) D(0,1,2)
- 6) a) $-3\vec{v}$ b) $\frac{4}{\sqrt{14}}(2, -1, -3)$ c) $\frac{5}{\sqrt{14}}(-2,1,3)$

Lista de Exercícios 3 - Vetores 2 - Resolva os exercícios pares da lista de exercícios 3, página 40 do livro Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle, Editora Makron Books.

4 PRODUTO ESCALAR

4.1 DEFINIÇÃO

O produto escalar de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ é um número real e é dado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é também chamado de *produto interno* e pode ser representado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e se lê “ $\vec{u}$ escalar $\vec{v}$ ”.

Exemplo 1: Dados os vetores $\vec{u} = (3,2,1)$ e $\vec{v} = (-1,-4,-1)$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Resposta: -12.

a) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$

b) $\vec{u} \cdot \vec{u}$

4.2 PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR

$$1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$2) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}; \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$3) \quad a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v})$$

4) $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ se $\vec{u} \neq \vec{0}$. Se $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ então $\vec{u} = \vec{0}$.

$$5) \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

6) $|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \pm 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

Exemplo 3: Sendo $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, determine $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v})$. Resposta: 22.

4.3 DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO ESCALAR

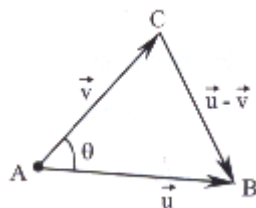
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta$$

•
Pois,

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

pela Lei dos Cossenos e pela propriedade 6, respectivamente. Igualando as equações acima, obtemos a definição acima.



Exemplo 4: Sendo $|\vec{u}| = 3$ e $|\vec{v}| = 1$ e 60° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcule:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $\left| \vec{u} + \vec{v} \right|$

c) $\left| \vec{u} - \vec{v} \right|$

Respostas: a) $3/2$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{7}$.

Observação:

1) Na expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta$, o sinal de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ será o mesmo sinal de $\cos \theta$, logo:

- a) se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, então $\cos(\theta) > 0$ logo, $0^\circ < \theta < 90^\circ$;
- b) se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, então $\cos(\theta) < 0$ logo, $90^\circ < \theta < 180^\circ$;
- c) se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então $\cos(\theta) = 0$ logo, $\theta = 90^\circ$.

Assim, podemos estabelecer que: **Dois vetores são ortogonais se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.**

2) O vetor nulo é ortogonal a todo vetor, isto é, $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$ para todo vetor $\vec{v}$.

Exemplo 5: Verifique se os vetores $\vec{u} = (1, -2, 3)$ e $\vec{v} = (4, 5, 2)$ são ortogonais. Resposta: São ortogonais.

Exemplo 6: Determine um vetor ortogonal não-nulo aos vetores $\vec{u} = (1, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Resposta: $(1, 1, -1)$.

4.4 DETERMINAÇÃO DO ÂNGULO FORMADO ENTRE DOIS VETORES

Vimos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta$, logo, $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

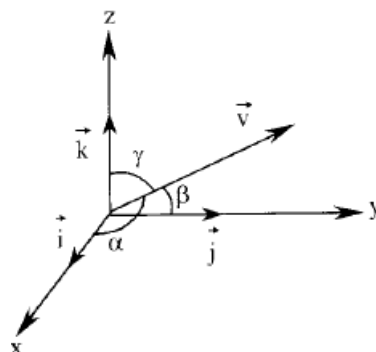
Exemplo 7: Determine o ângulo formado entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$. Resposta: 45° .

4.4.1 Ângulos Diretores e Cossenos Diretores de um vetor

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{|\vec{v}| |\vec{i}|} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{|\vec{v}| |\vec{j}|} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

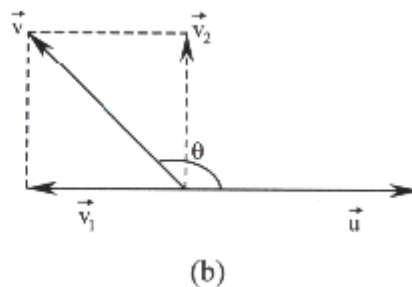
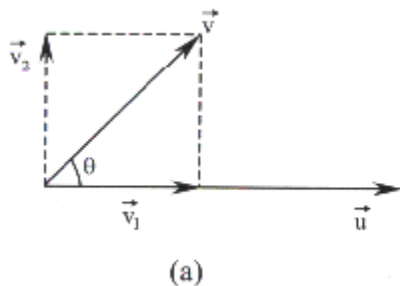
$$\cos \gamma = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{|\vec{v}| |\vec{k}|} = \frac{z}{|\vec{v}|}$$



Exemplo 8: Calcule os ângulos diretores e cossenos diretores de $\vec{v} = (1, -1, 0)$. Resposta: 45° , 135° e 90° .

4.5 PROJEÇÃO DE UM VETOR SOBRE OUTRO

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-nulos e θ o ângulo entre eles. Pretendemos decompor um dos vetores, tal que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ sendo que $\vec{v}_1 // \vec{u}$ e que $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.



Demonstração:

$$\vec{v}_1 = \alpha \vec{u}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = \vec{v} - \alpha \vec{u}$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (\vec{v} - \alpha \vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} - \alpha \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

O vetor $\vec{v}_1$ é chamado de projeção ortogonal de $\vec{v}$ em $\vec{u}$ e é representado por:

$$\vec{v}_1 = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \right) \vec{u}.$$

Exemplo 9: Determine o vetor projeção de $\vec{v} = (2, 3, 4)$ sobre $\vec{u} = (1, -1, 0)$. Resposta: $(-1/2, 1/2, 0)$.

Exercícios:

- Dados os vetores $\vec{u} = (4, a, -1)$ e $\vec{v} = (a, 2, 3)$ e os pontos $A(4, -1, 2)$ e $B(3, 2, -1)$, determine o valor de a tal que $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \overrightarrow{BA}) = 5$.
- Mostre que o triângulo de vértices $A(2, 3, 1)$ e $B(2, 1, -1)$ e $C(2, 2, -2)$ é um triângulo retângulo.
- Sabendo que o vetor $\vec{v} = (2, 1, -1)$ forma um ângulo de 60° com o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos $A(3, 1, -2)$ e $B(4, 0, m)$, calcule o valor de m .
- Obtenha o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 4$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz , forma um ângulo de 60° com o vetor $\vec{i}$ e um ângulo obtuso com o vetor $\vec{j}$.

5. Encontre os vetores unitários paralelos ao plano yz e que são ortogonais ao vetor $\vec{v} = (4, 1, -2)$.
6. Seja o vetor $\vec{v} = (2, -1, 1)$, determine:
- um vetor ortogonal a $\vec{v}$;
 - um vetor unitário ortogonal a $\vec{v}$;
 - um vetor de módulo 4 ortogonal a $\vec{v}$.

Respostas:

- 1) $a = 7/3$
- 2) $(\sqrt{10})^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{2})^2$
- 3) $m = -4$
- 4) $(2, -2\sqrt{3}, 0)$
- 5) $(0, \pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}})$
- 6) a) $(1, 2, 0)$ b) $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$ c) $\frac{4}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$

Lista de Exercícios 4 - Produto Escalar - Resolva os exercícios pares da lista de exercícios 4, página 66 do livro Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle, Editora Makron Books.

5 PRODUTO VETORIAL

5.1 DEFINIÇÃO

O produto vetorial de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, tomados nesta ordem, é um **vetor** e é dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ pode ser representado por $\vec{u} \times \vec{v}$ ou $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e se lê “ $\vec{u}$ vetorial $\vec{v}$ ”.

Exemplo 1: Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ se $\vec{u} = (5, 3, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$. Resposta: $(-1, 1, 2)$.

Observações:

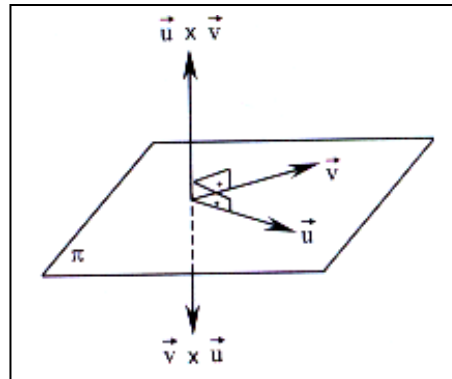
1. $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$, isto é, os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ são opostos. Logo, o produto vetorial não é comutativo.
2. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{u} \parallel \vec{v}$. Dois casos particulares:

- a) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ (determinante com duas linhas iguais)
 b) $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$ (determinante com uma linha de zeros)

Exemplo 2: Calcule os seguintes produtos vetoriais:

- a) $\vec{u} \times 4\vec{u}$
 b) $(2\vec{u}) \times (-5\vec{u})$
 c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u})$
 d) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{u})$
 e) $(2\vec{u} + 4\vec{v}) \times (4\vec{u} + 8\vec{v})$
 f) $5\vec{u} \times \vec{0}$

Resposta: Todos nulos.



5.2 CARACTERÍSTICAS DO VETOR $\vec{u} \times \vec{v}$

Consideremos os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

Direção de $\vec{u} \times \vec{v}$

O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Exemplo 3: Mostre que $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

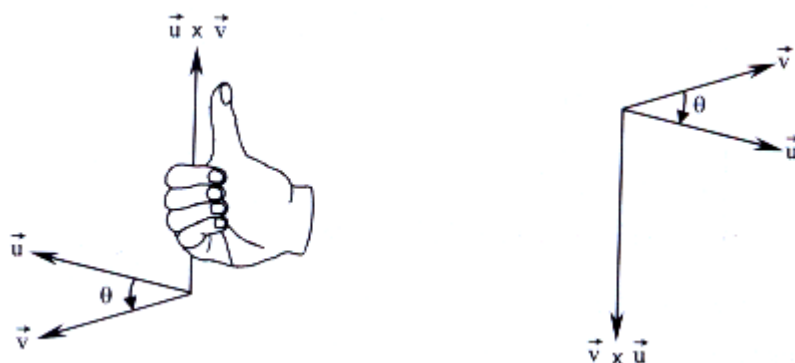
Exemplo 4: Sejam os vetores $\vec{u} = (1, -1, -4)$ e $\vec{v} = (3, 2, -2)$. Determine o vetor que seja

- a) ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$;
 b) ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ e unitário;
 c) ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ e que tenha módulo 4;
 d) ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ e tenha cota igual a 7.

Respostas: a) (10, -10, 5) b) (2/3, -2/3, 1/3) c) (8/3, -8/3, 4/3) d) (14, -14, 7).

Sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$

O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ poderá ser determinado utilizando-se a “regra da mão direita”. Sendo θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, suponhamos que $\vec{u}$ (1º vetor) sofra uma rotação de ângulo θ até coincidir com $\vec{v}$. Se os dedos da mão direita forem dobrados na mesma direção da rotação, então o polegar estendido indicará o sentido do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$.



A figura (b) mostra que o produto vetorial muda de sentido quando a ordem dos vetores é invertida. Só será possível dobrar os dedos na direção de $\vec{v}$ para $\vec{u}$ se invertermos a posição da mão, quando o dedo polegar estará apontando para baixo.

Observação: O produto vetorial dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ é dado na tabela abaixo:

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$

Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-nulos, então: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$.

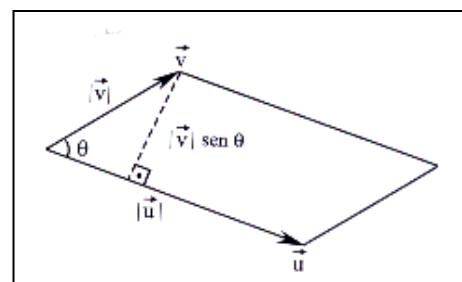
Da identidade de Lagrange:

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \cos^2 \theta = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \sin^2 \theta$$

Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Vetorial

No paralelogramo determinado pelos vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a medida da base é $|\vec{u}|$ e da altura $|\vec{v}|\sin\theta$, então a área deste paralelogramo é:

$$A = (\text{base}) \cdot (\text{altura}) = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta, \text{ ou seja, } A = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$



Desta forma, podemos dizer que: “a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é numericamente igual ao módulo do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ ”.

Exemplo 5: Seja o triângulo equilátero ABC de lado 10. Calcule $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Resposta: $50\sqrt{3}$ u.a.

Exemplo 6: Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, -3, 4)$, calcule:

a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{u}$.

Respostas: a) $\sqrt{6}$ u.a. b) $\sqrt{2}$ u.c.

Propriedades

- I) O produto vetorial **não** é comutativo, pois, $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$.
- II) O produto vetorial **não** é associativo, pois, $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.
- III) Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e o escalar α :
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
 - $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$
 - $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$
 - $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Exemplo 7: Determine o vetor $\vec{x}$, tal que $\vec{x}$ seja ortogonal ao eixo y e $\vec{u} = \vec{x} \times \vec{v}$, sendo $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Resposta: $(1, 0, 1)$.

Exemplo 8: Determine a distância do ponto P(5, 1, 2) à reta r que passa pelos pontos A(3, 1, 3) e B(4, -1, 1). Resposta: $\frac{\sqrt{29}}{3}$ u.c.

Exemplo 9: Dados os pontos A(2, 1, 1), B(3, -1, 0) e C(4, 2, -2), determine:

- a área do triângulo ABC
- a altura do triângulo relativa ao vértice C.

Respostas: a) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ u.a. b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ u.c.

Exercícios:

1. Se $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 4, -1)$ e $\vec{w} = (-1, 0, 1)$, determine:

- | | | |
|-----------------------------------|--|--|
| a) $ \vec{u} \times \vec{u} $ | c) $(\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{w} \times \vec{w})$ | e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ |
| b) $(2\vec{v}) \times (3\vec{v})$ | d) $(\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{v} \times \vec{u})$ | f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ |

2. Efetue:

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|--|
| a) $\vec{i} \times \vec{k}$ | c) $3\vec{i} \times 2\vec{k}$ | e) $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k}$ |
| b) $\vec{j} \times 2\vec{i}$ | d) $3\vec{i} \cdot 2\vec{j}$ | f) $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j})$ |

3. Determine um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$, sendo $\vec{u} = (-3, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, -1, -2)$.

4. Sendo $|\vec{u}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{v}| = 4$ e 45° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcule:

a) $|2\vec{u} \times \vec{v}|$

b) $\left| \frac{2}{5} \vec{u} \times \frac{1}{2} \vec{v} \right|$

5. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 1)$, calcule:

a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a altura do triângulo relativa à base definida pelo vetor $\vec{v}$.

Respostas:

- 1) a) 0 b) $\vec{0}$ c) (-7,7,14) d) (0,0,0) e) (7,-7,7) f) 21

- 2) a) $-\vec{j}$ b) $-2\vec{k}$ c) $-6\vec{j}$ d) 0 e) $\vec{0}$ f) $\vec{0}$

- 3) $(-12, -18, 9)$

- 4) a) 16 b) $\frac{8}{5}$

- 5) a) $3\sqrt{10}$ u.a. b) $\sqrt{10}$ u.c.

Lista de Exercícios 5 - Produto Vetorial - Resolva os exercícios pares da lista de exercícios 5, página 86 do livro Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle, Editora Makron Books.

6 PRODUTO MISTO

6.1 DEFINIÇÃO

O produto misto dos vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ tomados nesta ordem, é o número real $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ e é dado por:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

O produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pode ser indicado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exemplo 1: Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 3, 3)$ e $\vec{w} = (4, -3, 2)$.

Resposta: 27.

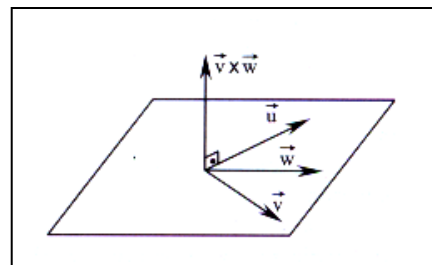
6.2 PROPRIEDADES DO PRODUTO MISTO

1. O produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ muda de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores.

Se forem duas permutações, não há alteração de valor do produto misto.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

$$2. \quad \left(\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \right) = \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right) + \left(\vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \right)$$



$$\begin{aligned}\left(\vec{u}, \vec{v} + \vec{x}, \vec{w}\right) &= \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) + \left(\vec{u}, \vec{x}, \vec{w}\right) \\ \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{x}\right) &= \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) + \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}\right)\end{aligned}$$

$$3. \quad \left(\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \left(\vec{u}, \alpha \vec{v}, \vec{w}\right) = \left(\vec{u}, \vec{v}, \alpha \vec{w}\right) = \alpha \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$$

$$4. \quad \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 0 \text{ se e somente se, os três vetores forem coplanares.}$$

Casos particulares:

$$a) \text{ Se pelo menos um dos vetores é nulo, } \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 0.$$

$$b) \text{ Se dois vetores forem paralelos: } \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 0.$$

Exemplo 2: Verifique se os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 4)$ são coplanares.
Resposta: Não.

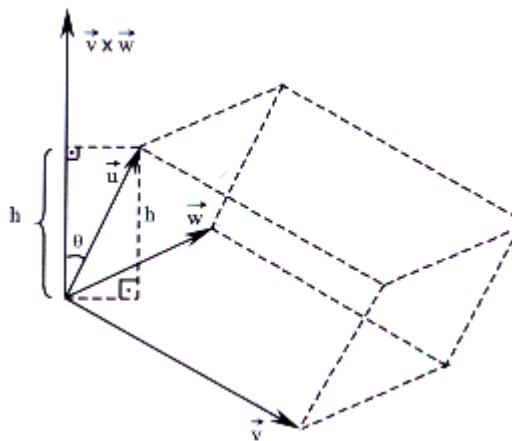
Exemplo 3: Qual deve ser o valor de m para que os vetores $\vec{u} = (2, m, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (-1, 3, -1)$ sejam coplanares? Resposta: -10.

6.3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DO PRODUTO MISTO

Volume do Paralelepípedo

Geometricamente, o produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores não coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

$$\text{Portanto, } V = A \cdot h = \left| \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) \right|.$$



Exemplo 4: Sejam os vetores $\vec{u} = (3, m, -2)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (2, -1, 2)$. Calcule o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado por estes vetores seja 16 u.v. Resposta: $m = -12$ ou $m = 4$.

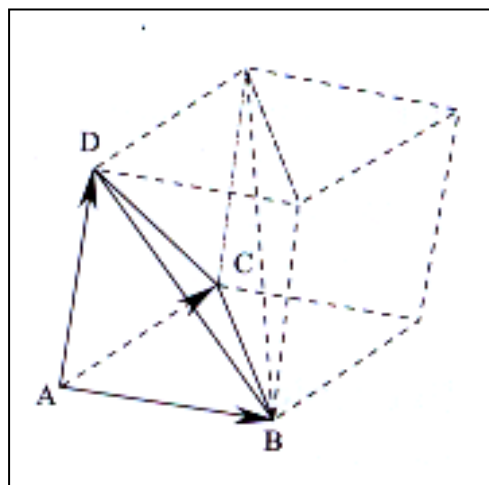
Volume do Tetraedro

Sejam A, B, C e D pontos não-coplanares. Portanto, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ também não são coplanares. Em consequência, esses vetores determinam um paralelepípedo cujo volume é:

$$V = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|.$$

Este paralelepípedo pode ser dividido em dois prismas triangulares de mesmo tamanho e, portanto, o volume de cada prisma triangular V_p é a metade do volume V do paralelepípedo. O prisma, por sua vez, pode ser dividido em três pirâmides de mesmo volume. Assim, o volume do tetraedro V_t é um terço do volume do prisma, isto é,

$$V_t = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|.$$



Exemplo 5: Sejam A(1, 2, -1), B(5, 0, 1), C(2, -1, 1) e D(6, 1, -3) vértices de um tetraedro. Calcule:

- o volume do tetraedro;
- a altura do tetraedro relativa ao vértice D.

Respostas: a) 6 u.v.; b) $\frac{18}{\sqrt{35}}$ u.c.

Exercícios:

- Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$, calcule:
 - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
 - $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$
- Sabendo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -5$, calcule:
 - $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$
 - $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$
 - $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$
 - $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$
- Verifique se os vetores são coplanares: $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 0, -4)$.
- Um paralelepípedo é formado pelo vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 1, 5)$. Calcule:
 - o seu volume;
 - a altura relativa à base definida pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- Os pontos A(2, 0, 0), B(2, 4, 0), C(0, 3, 0) e P(2, -2, 9) formam um tetraedro de base ABC e vértice P, calcule:
 - o volume deste tetraedro;
 - a altura relativa ao vértice P.

Respostas:

- a) -29 b) -29.
- a) 5 b) 5 c) -5 d) -5.
- Não são coplanares.

- 4) a) 17 b) $\frac{17}{\sqrt{30}}$.
 5) a) 12 b) 9.

Lista de Exercícios 6 - Produto Misto - Resolva os exercícios pares da lista de exercícios 6, página 99 do livro Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle, Editora Makron Books.

7 EQUAÇÕES DA RETA

7.1 EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA

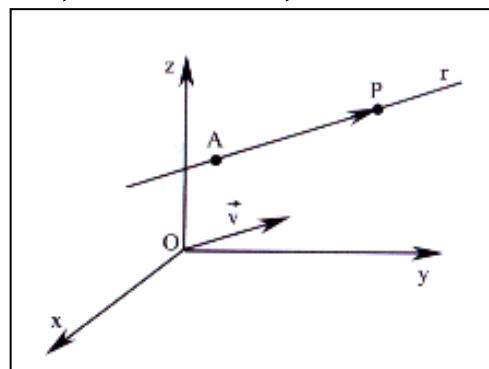
Consideremos um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não-nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Só existe uma reta que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a r, se e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$, isto é, $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$ para algum real t .

De $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$, temos que $P - A = t\vec{v}$ ou $P = A + t\vec{v}$, ou ainda, em coordenadas,

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c).$$

Qualquer uma das equações acima pode ser chamada de **equação vetorial da reta r**.

O vetor $\vec{v}$ é chamado *vetor diretor* da reta r e t é denominado *parâmetro*.



Exemplo 1: Determine a equação vetorial da reta r que passa por $A(1, -1, 4)$ e tem a direção de $\vec{v} = (2, 3, 2)$. Resposta: $(x, y, z) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2)$.

7.2 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Da equação vetorial da reta $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$, obtém-se:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

Estas são as equações paramétricas da reta.

Exemplo 2: Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A(3, -4, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2, 1, -3)$. Resposta: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.

Exemplo 3: Dado o ponto $A(2, 3, -4)$ e o vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$, determine:

- a) As equações paramétricas da reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.
 b) Os dois pontos B e C de r de parâmetros $t=1$ e $t=4$, respectivamente.
 c) O ponto de r cuja abscissa é 4.
 d) Se os pontos $D(4, -1, 2)$ e $E(5, -4, 3)$ pertencem a r .
 e) Para quais valores de m e n o ponto $F(m, 5, n)$ pertence a r .

Respostas: a)
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

- b) $(3, 1, -1)$ e $(6, -5, 8)$ c) $(4, -1, 2)$ d) D pertence a r e E não pertence a r e) $m=1$ e $n=-7$.

7.2.1 Reta definida por dois pontos

A reta definida pelos pontos A e B é reta que passa por A (ou B) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é dada por $P = A + t(B - A)$ ou $P = B + t(B - A)$.

Exemplo 4: Escreva as equações paramétricas da reta r que passa por $A(3, -1, -2)$ e $B(1, 2, 4)$.

Resposta:
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$$

7.3 EQUAÇÕES SIMÉTRICAS DA RETA

Das equações paramétricas
$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$
 supondo $a, b, c \neq 0$, vem:

$$t = \frac{x - x_1}{a}, \quad t = \frac{y - y_1}{b}, \quad t = \frac{z - z_1}{c}.$$

Como para cada ponto da reta corresponde um só valor para t , obtemos:

$$t = \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

Estas equações são denominadas **equações simétricas da reta** que passa pelo ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Exemplo 5: Escreva as equações simétricas da reta s que passa pelo ponto $A(3, 0, -5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (2, 2, -1)$. Resposta: $t = \frac{x - 3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z + 5}{-1}$.

7.4 EQUAÇÕES REDUZIDAS DA RETA

A equação $y = mx + b$ que é conhecida como **equação reduzida da reta**. O valor b é chamado de *coeficiente linear* e m é chamado coeficiente angular da reta.

Exemplo 6: A partir das equações simétricas da reta s do exemplo 5, obtenha suas equações reduzidas. Resposta: $y=x-3$ e $z=(-x-7)/2$.

Exemplo 7: Determine a equação reduzida da reta r abaixo na variável x .

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{-3}.$$

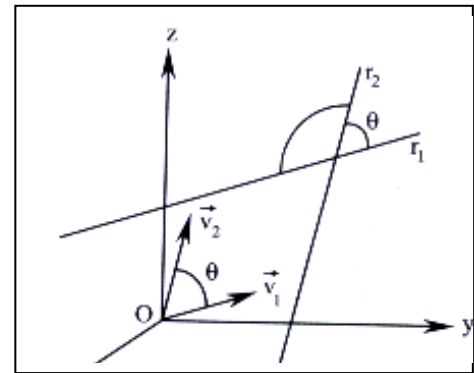
Resposta: $y=2x-8$ e $z=-3x+3$.

7.5 ÂNGULO ENTRE RETAS

Sejam r e s duas retas com direções $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

O ângulo entre as retas r e s é o menor ângulo entre os vetores diretores de r e de s .

$$\text{Assim, } \cos \theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 90^\circ.$$



Exemplo 8: Calcule o ângulo entre as retas

$$s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad u: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}. \quad \text{Resposta: } 60^\circ \text{ graus.}$$

Exemplo 9: Verifique se as retas s e u são concorrentes e, em caso afirmativo, determine seu ponto de intersecção:

$$s: \begin{cases} x = 3 + h \\ y = 1 + 2h \\ z = 2 - h \end{cases} \quad u: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Resposta: $I(2, -1, 3)$.

Exercícios:

1. Determine uma equação vetorial da reta r definida pelos pontos $A(2, -3, 4)$ e $B(1, -1, 2)$. Verifique se o ponto $C=(-1, 3, 4)$ pertence a r .

2. Dada a reta $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$, determine o ponto de r tal que:

- a) a ordenada seja 6;
- b) a abscissa seja igual à ordenada;
- c) a cota seja o quádruplo da abscissa.

3. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A(1, -1, 2) e B(2, 1, 0).

4. Determine as equações paramétricas das retas que passam por

- a) A(3, -2, 4) e é paralela ao eixo dos x;
- b) A(2, 2, 4) e é perpendicular ao plano xz;
- c) A(-2, 3, 4) e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos x e y.

5. Determine o ângulo entre as retas r: $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ e s: $\frac{x}{2} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-1}{1}$.

6. Sabendo que as retas r e s são ortogonais, determine o valor de m:

$$r: \begin{cases} x = 2mt - 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = -4t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -y + 4 \end{cases}$$

7. Encontre as equações paramétricas da reta que passa por A(3, 2, -1) e é simultaneamente

ortogonal às retas s: $\begin{cases} y = x - 3 \\ z = -2x + 3 \end{cases}$ e u: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$.

8. Verifique se as retas r e s são concorrentes, em caso afirmativo, encontre seu ponto de intersecção:

$$r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 5 \end{cases} \quad s: \begin{cases} y = -3x + 7 \\ z = x + 1 \end{cases}$$

Respostas:

1) $(x, y, z) = (2, -3, 4) + t(-1, 2, -2)$. C não pertence a reta r.

2) a) (-1, 6, -10); b) $(5/2, 5/2, -3)$; c) (-4, 9, -16).

$$3) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

$$4) a) \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases} ; b) \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \\ z = 4 \end{cases} ; c) \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 4 + t \end{cases}$$

5) 60

6) $m = -7/4$

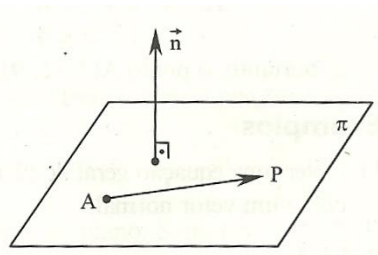
$$7) \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2 - t \\ z = -1 \end{cases}$$

8) I(2, 1, 3).

8 O PLANO

8.1 EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

Consideremos um plano π e uma reta $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, onde $\vec{n}$ é ortogonal ao plano π . Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de π . Observemos a figura:



Um ponto $P(x, y, z)$ está sobre o plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, ou seja, $\vec{n} \cdot (P - A) = 0$.

Notemos que $\overrightarrow{AP} = P - A = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e $\vec{n} = (a, b, c)$, logo:

$$\vec{n} \cdot (P - A) = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

Escrevendo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, obtemos:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

que é a equação geral do plano π .

Exemplo 1: Obtenha uma equação geral do plano π que passe pelo ponto $A(2, -1, 3)$ e tenha $\vec{n} = (3, 2, -4)$ como um vetor normal. Resposta: $3x + 2y - 4z + 8 = 0$.

Casos Particulares

Se um ou mais coeficientes na equação geral do plano for nulo, fará com que o plano ocupe um posicionamento particular em relação aos eixos coordenados.

Na equação $ax + by + cz + d = 0$, se:

1º caso:

se $d = 0 \rightarrow ax + by + cz = 0$, com $a, b, c \neq 0$, o plano contém a origem.

2º caso:

- a) se $a = 0 \rightarrow by + cz + d = 0$, com $b, c, d \neq 0$, o plano é paralelo ao eixo x .
- b) se $b = 0 \rightarrow ax + cz + d = 0$, com $a, c, d \neq 0$, o plano é paralelo ao eixo y .
- c) se $c = 0 \rightarrow ax + by + d = 0$, com $a, b, d \neq 0$, o plano é paralelo ao eixo z .

3º caso:

- a) se $a = d = 0 \rightarrow by + cz = 0$, com $b, c \neq 0$, o plano conterá o eixo x .
- b) se $b = d = 0 \rightarrow ax + cz = 0$, com $a, c \neq 0$, o plano conterá o eixo y .
- c) se $c = d = 0 \rightarrow ax + by = 0$, com $a, b \neq 0$, o plano conterá o eixo z .

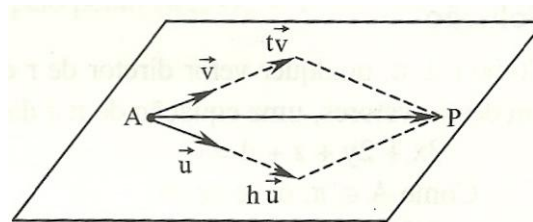
4º caso:

- a) se $a = b = 0 \rightarrow cz + d = 0$, com $c, d \neq 0$, o plano é paralelo ao plano xy .
- b) se $a = c = 0 \rightarrow by + d = 0$, com $a, c \neq 0$, o plano é paralelo ao plano xz .
- c) se $b = c = 0 \rightarrow ax + d = 0$, com $a, d \neq 0$, o plano é paralelo ao plano yz .

8.2 EQUAÇÃO VETORIAL E EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO PLANO

Consideremos um plano π e um ponto $A(x_0, y_0, z_0) \in \pi$. Sejam dois vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ não paralelos, mas paralelos ao plano π .

Observemos a figura:



Para todo ponto $P \in \pi$, os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Ainda, um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao plano se, e somente se, existem números reais h e t tais que

$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}, \text{ esta é a equação vetorial de } \pi.$$

Em coordenadas, temos:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h \cdot (a_1, b_1, c_1) + t \cdot (a_2, b_2, c_2)$$

$$(x, y, z) = (x_0 + a_1h + a_2t, y_0 + b_1h + b_2t, z_0 + c_1h + c_2t)$$

que, pela condição de igualdade:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1h + a_2t \\ y = y_0 + b_1h + b_2t \\ z = z_0 + c_1h + c_2t \end{cases}$$

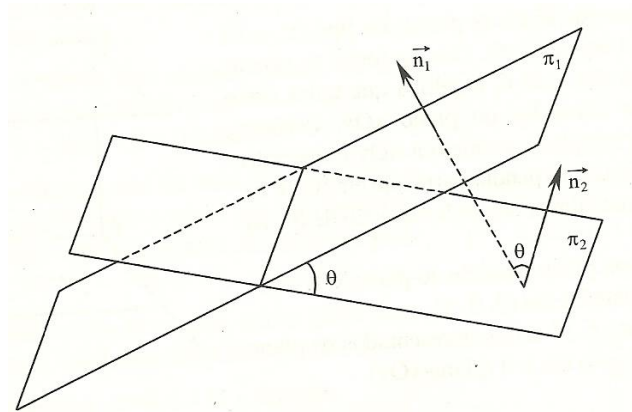
Essas equações são chamadas equações paramétricas de π , onde h e t são variáveis auxiliares denominadas parâmetros.

Exemplo 2: Seja o plano π que passa pelo ponto $A(2,2,1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 5, -3)$. Obtenha uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e a equação geral de π . Resposta: $4x+5y+7z-25=0$.

Observação (exemplo 2): A equação geral do plano π também pode ser obtida por meio do produto misto dos vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, pois como $P(x, y, z)$ representa um ponto qualquer do plano, estes vetores são coplanares (estão no mesmo plano) e, conseqüentemente, o produto misto deles é nulo. Assim, ao desenvolver a igualdade $(\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, podemos encontrar a equação geral do plano π .

8.3 ÂNGULO DE DOIS PLANOS

Sejam os planos π_1 e π_2 com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, respectivamente, conforme a figura abaixo.



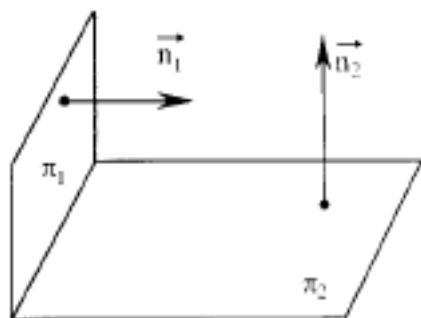
Denominaremos ângulo de dois planos π_1 e π_2 , o menor ângulo que um vetor normal a π_1 forma com um vetor normal a π_2 . Considerando-se θ este ângulo, obtemos:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 3: Determine o ângulo entre os planos $\pi_1 : 2x + y - z + 3 = 0$ e $\pi_2 : x + y - 4 = 0$. Resposta: 30 graus.

8.4 PLANOS PERPENDICULARES

Sejam os planos π_1 e π_2 com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, respectivamente, conforme a figura abaixo, podemos concluir que:



$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

Exemplo 4: Verificar se π_1 e π_2 são planos perpendiculares:

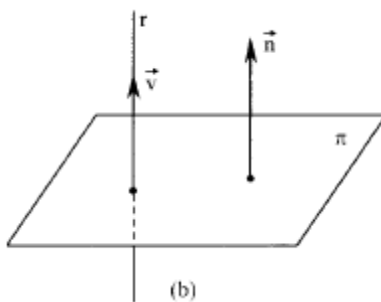
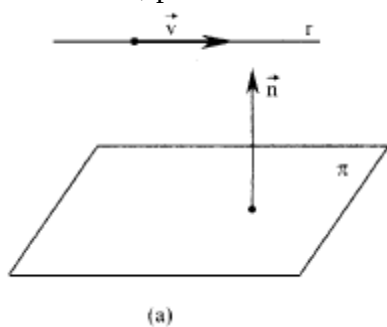
a) $\pi_1 : 3x + y - 4z + 2 = 0$ e $\pi_2 : 2x + 6y + 3z = 0$

b) $\pi_1 : x + y - 4 = 0$ e $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = h + t \\ z = t \end{cases}$

Resposta: a) Sim b) Não.

8.5 PARALELISMO E PERPENDICULARISMO ENTRE RETA E PLANO

Sejam a reta r com a direção do vetor $\vec{v}$ e um plano π , sendo $\vec{n}$ um vetor normal a π . Pelas figuras abaixo, podemos concluir que:



i) $r // \pi \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ (Fig.(a))

ii) $r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v} // \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha \vec{n}$ (Fig.(b))

Exemplo 5: A reta $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$ é paralela ao plano $\pi = 5x + 2y - 4z - 1 = 0$. Resposta: Sim, pois

$$\vec{v} = (2, -3, 1) \text{ e } \vec{n} = (5, 2, -4)$$

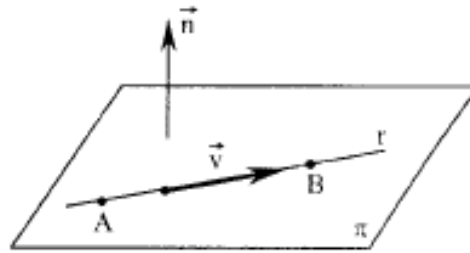
$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 \times 5 + (-3) \times 2 + 1 \times (-4) = 0$$

8.6 RETA CONTIDA EM PLANO

Uma reta r está contida em um plano π se:

i) dois pontos A e B de r forem também de π ou

ii) $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, onde $\vec{v}$ é um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal a π e $A \in r$.



Exemplo 6: Determinar os valores de m e n para que a reta $r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -2 - t \end{cases}$ esteja contida no plano

$\pi: 2x + my + nz - 5 = 0$. Resposta: $m=3$ e $n=-1$, pois

$$\vec{v} = (1, -1, -1) \text{ e } \vec{n} = (2, m, n)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \times 2 + (-1) \times m + (-1) \times n = 0 \Rightarrow m + n = 2$$

$$A(3, -1, -2), \pi: 2 \times 3 + (-1) \times m + (-2) \times n - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m + n = 2 \\ -m - 2n = -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $m=3$ e $n=-1$.

8.7 INTERSECÇÃO ENTRE DOIS PLANOS

A intersecção de dois planos não-paralelos é uma reta r cujas equações se deseja determinar.

Exemplo 7: Consideremos os planos não paralelos $\pi_1: 5x - y + z - 5 = 0$ e $\pi_2: x + y + 2z - 7 = 0$. Entre os vários procedimentos, apresentaremos dois.

- 1) Como r está contida nos dois planos, as coordenadas de qualquer ponto $(x, y, z) \in r$ devem satisfazer simultaneamente as equações dos dois planos. Logo, os pontos de r constituem a solução do sistema:

$$r: \begin{cases} 5x - y + z - 5 = 0 \\ x + y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

O sistema tem infinitas soluções e, em termos de x , sua solução é $r: \begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = -2x + 4 \end{cases}$, que são equações reduzidas de r .

- 2) Outra maneira de obter as equações de r é determinar um de seus pontos e um vetor diretor. Fazendo $x=0$ nas equações do sistema, obtemos:

$$\begin{cases} -y + z - 5 = 0 \\ y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \text{ cuja solução é } y=-1 \text{ e } z=4. \text{ Logo, temos um ponto, que chamaremos de } A(0, -1, 4).$$

Como um vetor diretor $\vec{v}$ de r é simultaneamente ortogonal a $\vec{n}_1 = (5, -1, 1)$ e $\vec{n}_2 = (1, 1, 2)$, normais aos planos π_1 e π_2 , respectivamente, o vetor $\vec{v}$ pode ser dado por

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3, -9, 6) \text{ ou } -\frac{1}{3}(-3, -9, 6) = (1, 3, -2).$$

Escrevendo a equação paramétrica de r , temos $r: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$.

8.8 INTERSECÇÃO DE RETA COM PLANO

Exemplo 8: Determinar o ponto de intersecção da reta r com o plano π , onde $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ e

$$\pi: 2x - y + 3z - 4 = 0.$$

Solução:

Qualquer ponto de r é da forma $(x, y, z) = (-1 + 2t, 5 + 3t, 3 - t)$. Se um deles é comum ao plano π , suas coordenadas verificam a equação de π :

$$2(-1 + 2t) - (5 + 3t) + 3(3 - t) - 4 = 0, \text{ resultando em } t = -1.$$

Substituindo este valor nas equações de r obtém-se

$$x = -1 + 2(-1) = -3$$

$$y = 5 + 3(-1) = 2$$

$$z = 3 - (-1) = 4$$

Logo, a intersecção de r e π é o ponto $(-3, 2, 4)$.

Exercícios:

1. Dado o plano π determinado pelos pontos $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, 1, -3)$ e $C = (-1, -2, 6)$, obtenha um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π .
2. Determine o ângulo entre os planos $\pi_1: 2x - 3y + 5z - 8 = 0$ e $\pi_2: 3x + 2y + 5z - 4 = 0$.
3. Qual a intersecção dos planos $\alpha: 2x - 3y + z = 2$ e $\beta: x - 2y - z = 1$?

Respostas:

$$1) \pi: \begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = -1 + 2h - t \\ z = 2 - 5h + 4t \end{cases}$$

2) 48,8 graus.

$$3) \begin{cases} y = \frac{3x-3}{5} \\ z = \frac{-x+1}{5} \end{cases}$$

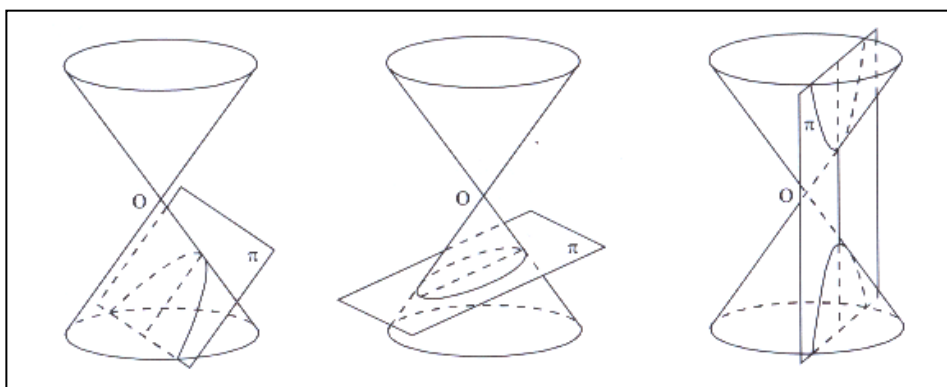
Lista de Exercícios 8 – Plano - Resolva os exercícios pares até o 48 da lista de exercícios 8, página 141 do livro Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle, Editora Makron Books.

9. SEÇÕES CÔNICAS E SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

9.1 INTRODUÇÃO ÀS SEÇÕES CÔNICAS

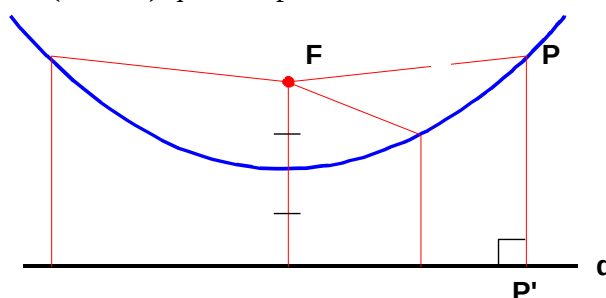
Os gregos descobriram as seções cônicas em algum momento entre 600 e 300 a.C. No início do período alexandrino, sabia-se o suficiente sobre cônicas para Apolônio (262-190 a.C.) produzir um trabalho de oito volumes sobre o assunto. Os gregos se preocupavam basicamente com as propriedades geométricas das cônicas. Só mais tarde, no início do século XVII é que se tornou aparente a grande aplicabilidade das cônicas que tiveram um papel relevante no desenvolvimento do cálculo.

Cada seção cônica é obtida cortando-se um cone por um plano que não passa pelo vértice.



9.2 PARÁBOLA

Uma parábola é o conjunto de todos os pontos (x,y) equidistantes de uma reta fixa d (a diretriz) e de um ponto fixo F (o foco) que não pertence à reta.



O ponto médio entre a diretriz (d) e o foco (F) é chamado de vértice (V), e a reta que passa pelo foco e pelo vértice é o eixo da parábola. Uma parábola é simétrica em relação ao seu eixo.

A forma padrão para a equação reduzida de uma parábola com vértice (h, k) e diretriz

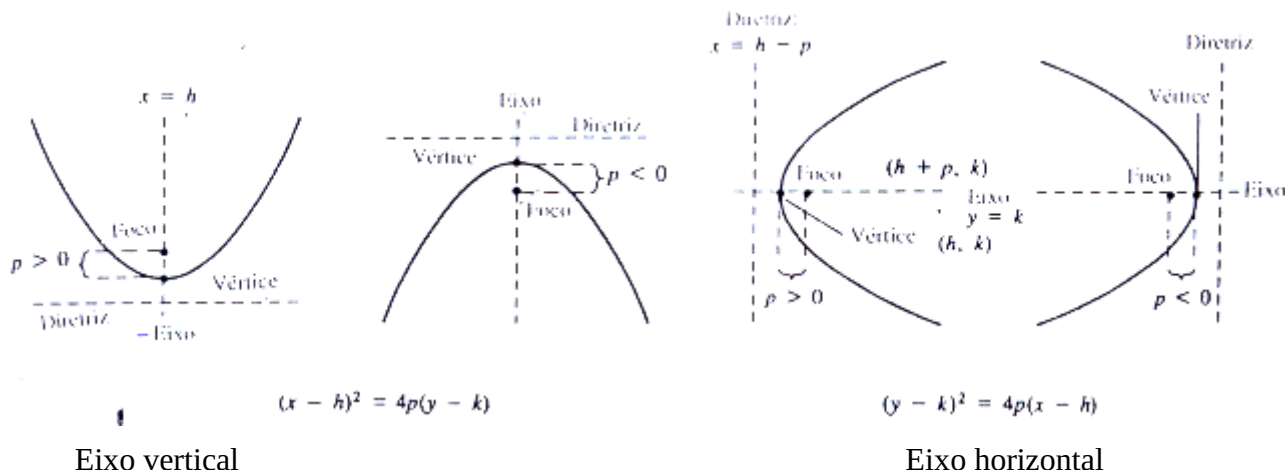
$$y = k - p \text{ é}$$

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad \text{eixo vertical}$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad \text{eixo horizontal}$$

O foco (F) pertence ao eixo e está a p unidades do vértice.

9.2.1 Orientações das parábolas



Exemplo 1: Encontre a equação da parábola com vértice em $(2, 1)$ e foco em $(2, 4)$. Esboce a parábola. Resposta: $x^2 - 4x - 12y + 16 = 0$.

Exemplo 2: Determine as coordenadas do vértice e do foco de cada parábola. Encontre a direção nas quais elas estão abertas. Ache também a equação de sua diretriz. Esboce cada parábola.

a) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ b) $(y + 1)^2 = -12(x - 2)$ c) $x^2 + 4x - 10y + 34 = 0$

Respostas: a) V $(-1, 1)$, F $(-1, 1/2)$, d: $y = 3/2$, equação: $(x + 1)^2 = -2(y - 1)$.

b) V $(2, -1)$, F $(-1, -1)$, d: $x = 5$.

c) V $(-2, 3)$, F $(-2, 11/2)$, d: $y = 1/2$, equação: $(x + 2)^2 = 10(y - 3)$.

Exemplo 3: Ache as equações das seguintes parábolas.

a) vértice $(0, 0)$ e foco $(-3, 0)$ Resposta: $y^2 = -12x$.

b) diretriz $x = 2$ e foco $(-4, 0)$ Resposta: $y^2 = -12(x + 1)$.

Lista de Exercícios 9:

1. Encontre o foco, o vértice e a diretriz de cada uma das seguintes parábolas. Esboce-as.

a) $2x^2 + 5y = 0$

b) $y^2 + 8y - 16x = 16$

c) $x^2 + 2x + 29 = 7y$

d) $4x - y^2 - 2y - 33 = 0$

Respostas: a) F $(0, -5/8)$, V $(0, 0)$, d: $y = 5/8$

b) F $(2, -4)$, V $(-2, -4)$, d: $x = -6$

c) F $(-1, 23/4)$, V $(-1, 4)$, d: $y = 9/4$

d) $F(9,-1)$, $V(8,-1)$, $d: x=7$

2. Encontre a equação de cada parábola especificada. Esboce a parábola.

a) vértice $(3,2)$ e foco $(1,2)$

b) diretriz $x=-2$ e foco $(2,2)$

c) vértice $(-2,1)$ e diretriz: $y=-2$

d) vértice $(-1,2)$ e foco $(-1,0)$

Respostas: a) $(y-2)^2 = -8(x-3)$

b) $(y-2)^2 = 8x$

c) $(x+2)^2 = 12(y-1)$

d) $(x+1)^2 = -8(y-2)$

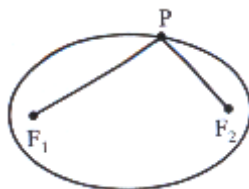
3. Encontre a equação da parábola com eixo paralelo ao eixo dos y e que contém os pontos $(0,3)$, $(3,4)$ e $(4,11)$. Ache as coordenadas do foco e do vértice. Escreva a equação de sua diretriz.

Resposta: $y = \frac{5}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 3$.

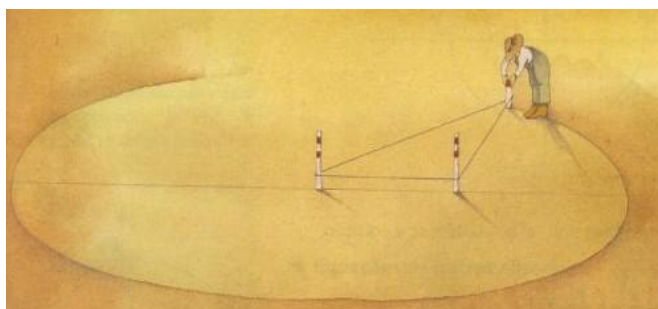
4. Resolva os exercícios ímpares de 1 a 40, pág. 172 do livro texto.

9.3 ELIPSE

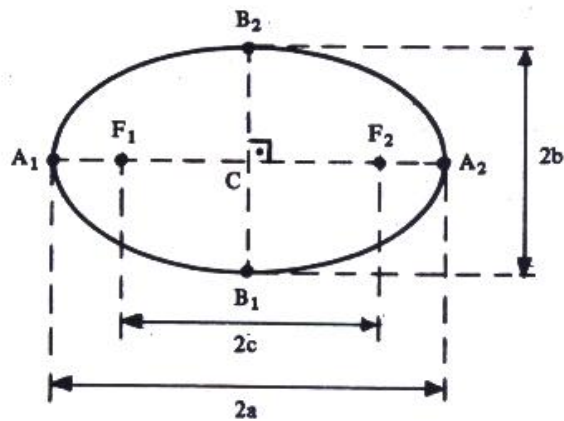
Uma elipse é o conjunto de todos os pontos (x, y) tal que a soma das distâncias a dois pontos fixos (os focos) é constante.



Uma curiosidade é que você também pode construir um canteiro de flores no seu jardim utilizando o mesmo procedimento.

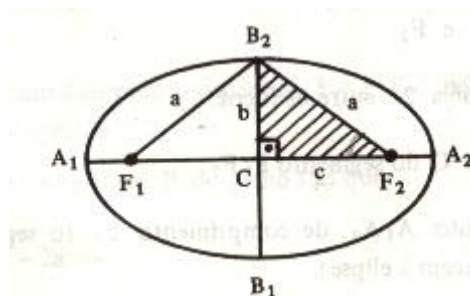


A reta contendo os dois focos intercepta a elipse em dois pontos chamados **vértices**. A corda unindo os dois vértices é o eixo maior, e o seu ponto médio é o centro da elipse. A corda perpendicular ao eixo maior contendo o centro é o eixo menor da elipse.



Para encontrar a forma padrão para a equação de uma elipse, consideramos a figura abaixo da elipse que contém os pontos:

centro (h, k) vértices $(h \pm a, k)$ focos: $(h \pm c, k)$



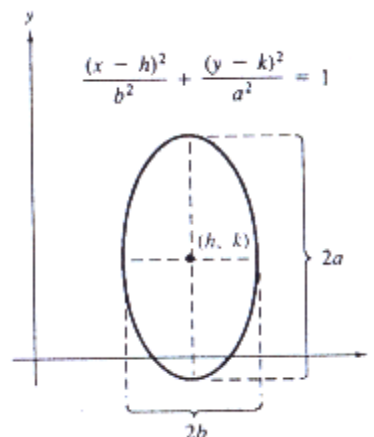
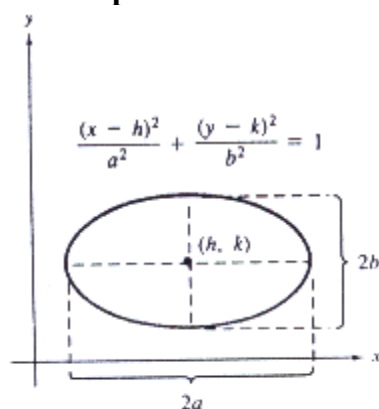
A forma padrão para a equação reduzida de uma elipse centrada em (h, k) e com eixos maior e menor $2a$ e $2b$, respectivamente, onde $a > b$ é:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{eixo maior é horizontal}$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{eixo maior é vertical}$$

Os focos estão no eixo maior a c unidades do centro onde $a^2 = b^2 + c^2$.

9.3.1 Orientações das elipses

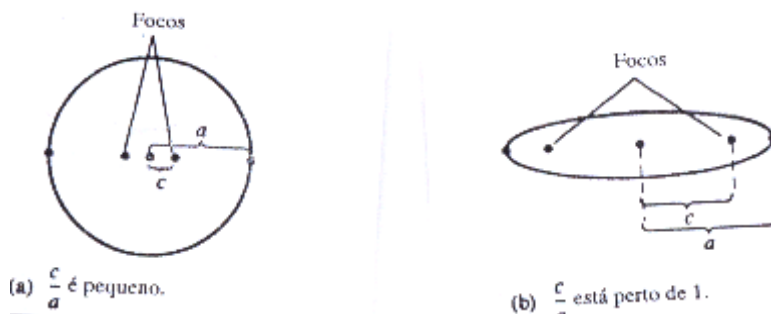


9.3.2 Excentricidade

Excentricidade e é dada pela razão $e = \frac{c}{a}$.

O conceito de excentricidade é usado para medir o quão oval é a elipse.

Note que como os focos estão no eixo maior entre os centros e os vértices então $0 < c < a$. Para uma elipse quase circular, os focos estão próximos do centro e a razão $\frac{c}{a}$ é pequena. Para uma elipse alongada, os focos estão próximos dos vértices e a excentricidade está perto de 1.



Exemplo 4: Determine as coordenadas do centro, dos vértices, dos focos da cônica $25x^2 + 9y^2 - 100x - 54y = 44$.

Esboce o gráfico.

Resposta: Centro: $C(2,3)$, Focos: $(2,7)$ e $(2,-1)$, Vértices: $(2,8)$, $(2,-2)$, $(5,3)$ e $(-1,3)$.

Exemplo 5: Escreva a equação da elipse cujos vértices são os pontos $(-5, 1)$, $(1, 1)$, $(-2, 3)$ e $(-2, -1)$. Determine os focos e esboce o gráfico.

Resposta: $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$. Centro $C(-2,1)$, Focos $(-2 \pm \sqrt{5}, 1)$.

Exemplo 6: Escreva a equação da elipse com focos $(0,1)$ e $(4,1)$ e eixo maior de comprimento 6.

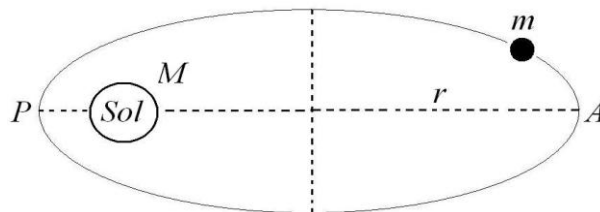
Resposta: $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$.

Aplicações para Elipses

A determinação das órbitas planetárias foi efetuada entre 1601 e 1619 pelo astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), usando o volumoso e cuidadoso conjunto de dados astronômicos obtido por Tycho Brahe, e cujo trabalho durou cerca de 16 anos. Entre seus estudos, Kepler descobriu que a órbita de Marte podia ser descrita com precisão através de uma elipse. Kepler então generalizou este conceito para os outros planetas e a análise completa se resume em três enunciados, que são conhecidos com as **Leis de Kepler** do movimento planetário. Convém esclarecer que estas leis se aplicam não somente aos planetas que orbitam em torno do Sol, mas igualmente para satélites naturais e artificiais em órbita ao redor da Terra ou de qualquer corpo celeste cuja massa seja considerável. A seguir enunciaremos e discutiremos a primeira lei empírica de Kepler.

1 – Cada planeta se move numa órbita elíptica de modo que o Sol ocupa um dos focos desta elipse (lei das órbitas).

A figura abaixo ilustra um planeta de massa m que está se movendo numa órbita elíptica ao redor do Sol, de massa M . Faremos a suposição de que $M \gg m$, de modo que o centro de massa do sistema formado pelo planeta e pelo Sol esteja localizado aproximadamente no centro do Sol.



Na figura, o planeta de massa m move-se numa órbita elíptica ao redor do Sol, de massa M . O semi-eixo maior, representado por r é considerado, para efeito de cálculos, como sendo raio médio da órbita.

O semi-eixo maior, representado por r , é considerado, para efeito de cálculos, como sendo raio médio da órbita.

Lista de Exercícios 10:

1. Encontre todos os elementos de cada uma das seguintes elipses.

a) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ R.: $C(3, -1), A_1(6, -1), A_2(0, -1), F_1(5, -1), F_2(1, -1), e = 2/3$.

b) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$ R.: $C(-1, -2), A_1(-1, 3), A_2(-1, -7), F_1(-1, 1), F_2(-1, -5), e = 3/5$

c) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$ R.: $C(2, -3), A_1(6, -3), A_2(-2, -3), B_1(2, 0), B_2(2, -6)$.

2. Encontre a equação de cada elipse especificada.

a) eixo maior mede 10 e focos $(\pm 4, 0)$. Resposta: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) centro $(2, 4)$, um foco $(5, 4)$ e excentricidade $3/4$. Resposta: $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{7} = 1$.

c) vértices em $(0, -8)$ e $(0, 8)$ e contendo o ponto $(6, 0)$. Resposta: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$.

d) extremos do eixo maior em $(-3, 2)$, $(5, 2)$ e o comprimento do eixo menor é 4 unidades.

Resposta: $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

3. Determine a equação da elipse de centro na origem e focos no eixo das abscissas, sabendo que $(-2\sqrt{5}, 2)$ é um ponto da elipse e que seu eixo menor tem comprimento 6 unidades. Resposta:

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

4. Obtenha as equações reduzidas das elipses de equações:

a) $x^2 + 4y^2 = 4$ Resposta: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

b) $49(x+7)^2 + y^2 = 7$ Resposta: $\frac{(x+7)^2}{1/7} + \frac{y^2}{7} = 1$.

c) $4x^2 + 9y^2 - 54y + 45 = 0$ Resposta: $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$.

5. Resolva os exercícios ímpares de 1 a 32, pág. 189 do livro texto.

9.4 HIPÉRBOLE

É o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que a diferença das distâncias a dois pontos fixos (os focos) é constante.



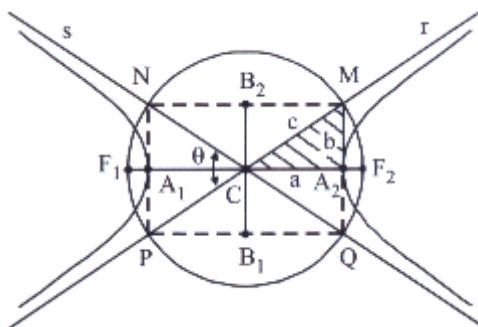
A reta contendo os dois focos intercepta a hipérbole em dois pontos, os **vértices**. A reta contendo os focos é chamada de **eixo focal**, e o ponto médio do segmento unindo os vértices é o **centro** da hipérbole.

A forma padrão para a equação de uma hipérbole com centro em (h, k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{eixo focal é horizontal}$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{eixo focal é vertical}$$

A distância entre o centro e os vértices é de a unidades e os focos estão a c unidades do centro. Além disso, $c^2 = a^2 + b^2$.



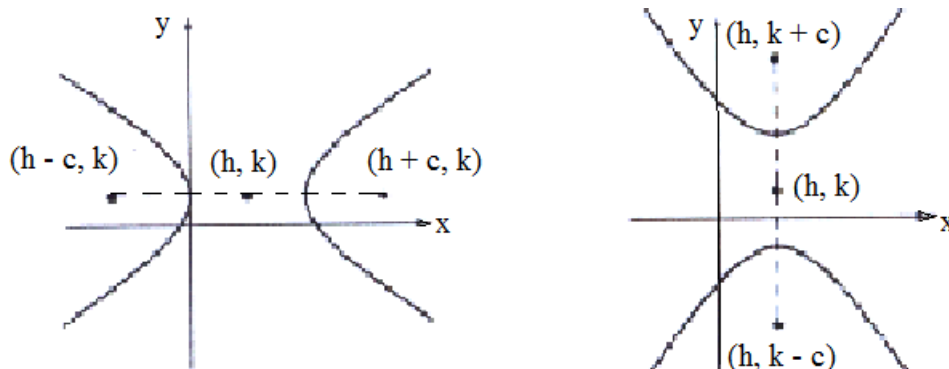
9.4.1 Orientações das Hipérboles

Eixo Focal horizontal

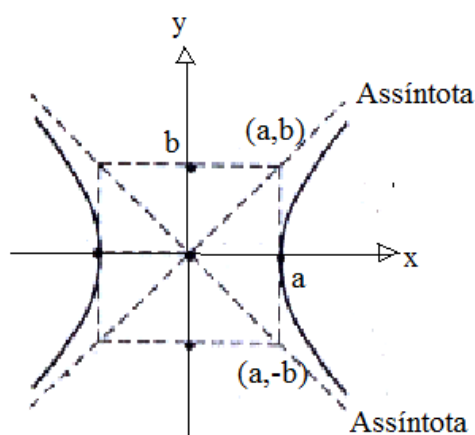
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Eixo Focal vertical

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

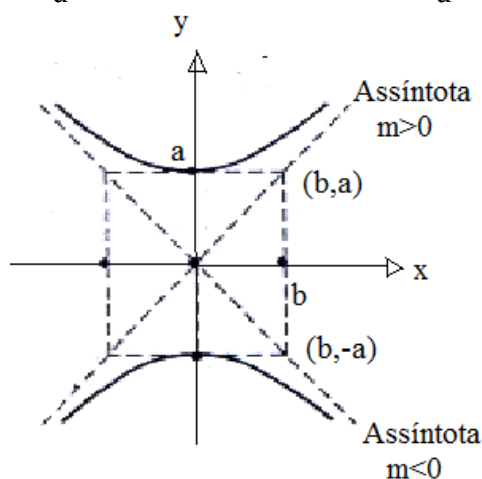


Cada hipérbole tem duas **assíntotas** que se interceptam no centro. As assíntotas contêm os vértices de um retângulo de dimensões $2a$ por $2b$ centrado em (h, k) . A reta unindo os pontos $(h, k+b)$ e $(h, k-b)$ é chamada de **eixo transverso**.



Para uma hipérbole de eixo focal horizontal, as equações das assíntotas são:

$$y - k = \frac{b}{a}(x - h) \quad y - k = -\frac{b}{a}(x - h).$$

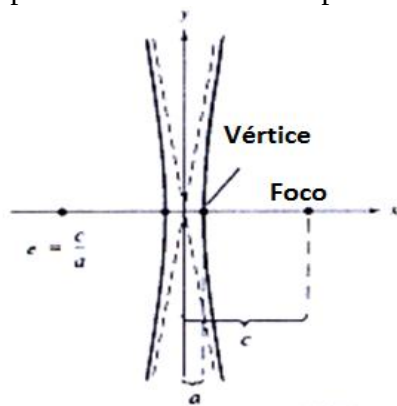


Para uma hipérbole de eixo focal vertical, as equações das assíntotas são:

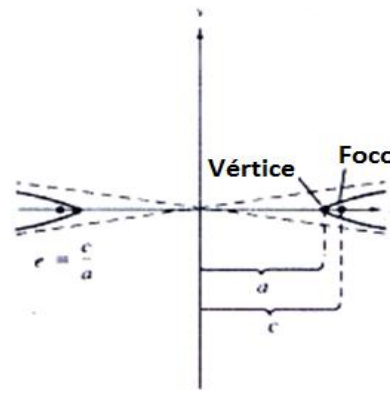
$$y - k = \frac{a}{b}(x - h) \quad y - k = -\frac{a}{b}(x - h).$$

9.4.2 Excentricidade da Hipérbole

A excentricidade e da hipérbole é dada pela razão $e = \frac{c}{a}$. Como $c > a$, temos $e > 1$. Quanto maior a excentricidade, mais abertos são os ramos da hipérbole. Se a excentricidade for próxima de 1, os ramos da hipérbole são achatados e pontudos.



Excentricidade grande



Excentricidade próxima de 1

Exemplo 7: Determine as coordenadas do centro, dos vértices, dos focos e as equações das assíntotas da hipérbole $4x^2 - 9y^2 - 24x - 90y - 225 = 0$. Resposta: Centro: $C(3, -5)$, Vértices: $(0, -5)$, $(6, -5)$, Focos: $(3 \pm \sqrt{13}, -5)$, assíntotas: $y = \frac{2}{3}x - 7$ e $y = -\frac{2}{3}x - 3$.

Exemplo 8: Encontre a equação reduzida da hipérbole $y^2 - 4x^2 - 8x - 4y - 4 = 0$. Determine as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices da hipérbole. Determine as equações das assíntotas e esboce o gráfico. Resposta: $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{1} = 1$, Centro: $C(-1, 2)$, Vértices: $(-1, 0)$, $(-1, 4)$, Focos: $(-1, 2 \pm \sqrt{5})$. Assíntotas: $y = 2x + 4$ e $y = -2x$.

Exemplo 9: Determine a equação da hipérbole cujos focos estão em $(3, 4)$ e $(3, -2)$ e cuja excentricidade é 2. Resposta: $\frac{4(y-1)^2}{9} - \frac{4(x-3)^2}{27} = 1$.

9.5 CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS ATRAVÉS DO DETERMINANTE

O gráfico da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ é determinado pelo discriminante da seguinte maneira:

1. Elipse: $B^2 - 4AC < 0$
2. Parábola: $B^2 - 4AC = 0$
3. Hipérbole: $B^2 - 4AC > 0$

Lista de Exercícios 11:

1. Encontre todos os elementos de cada uma das seguintes hipérboles.
 - a) $9x^2 - 25y^2 + 72x - 100y + 269 = 0$ R.: $V_1(-4, 1)$, $V_2(-4, -5)$, $y = (3x+2)/5$ e $y = (-3x-22)/5$

- b) $16x^2 - 9y^2 + 180y = 612$ R.: $e=5/4$, $y=\pm 4x/3+10$.
 c) $16x^2 - 9y^2 - 256x - 90y + 223 = 0$ R.: $C(8,-5)$, $A_1(14,-5)$, $A_2(2,-5)$, $F_1(18,-5)$, $F_2(-2,-5)$,
 $e=5/3$, $y=(4x-47)/3$, $y=(-4x+17)/3$.

2. Encontre a equação de cada hipérbole especificada.

- a) vértices em $(\pm 4, 0)$, focos em $(\pm 6, 0)$
 b) vértices em $(\pm 4, 0)$ e as equações das assíntotas são $y = \pm(5/4)x$
 c) focos em $(1, -1)$ e $(7, -1)$ e o comprimento do eixo transversal é 2
 d) centro em $(2, 3)$, um vértice em $(2, 8)$ e um foco em $(2, -3)$.

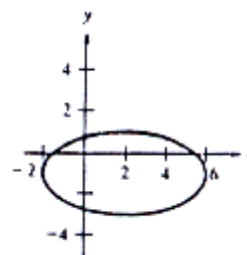
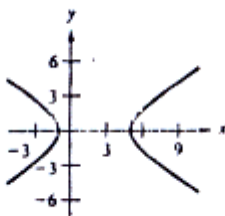
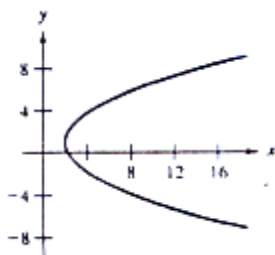
3. Determine a equação da hipérbole que tem vértices em $(2, \pm 3)$ e que passa pelo ponto $(0, 5)$.

4. Obtenha as equações reduzidas das hipérboles de equação:

- a) $x^2 - y^2 = 1$
 b) $9x^2 - 16y^2 + 1 = 0$
 c) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 50y - 241 = 0$

5. Associe a cada gráfico a sua equação.

- a) $(y-1)^2 = 4(x-2)$ b) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ c) $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
 d) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ e) $(y-1)^2 = -4(x-2)$ f) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$



R.: (a), (b), (d).

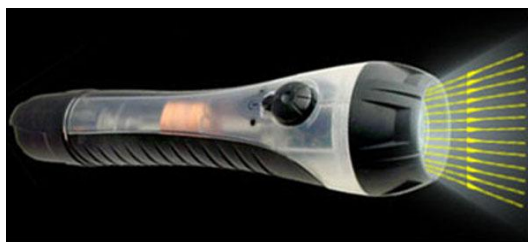
6. Classifique cada uma das cônicas abaixo e encontre todos os seus elementos.

- a) $y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$ R.: Parábola.
 b) $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y + 61 = 0$ R.: Não é um lugar geométrico.
 c) $9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$ R.: Hipérbole.

7. Resolva os exercícios ímpares de 1 a 42, pág. 204 do livro texto.

Aplicações das cônicas

Direcione uma lanterna para uma parede, veja que o feixe de luz emitido desenhará nessa parede uma curva cônica. Isto acontece porque o feixe de luz emitido pela lanterna forma um cone, e também porque a parede funciona como um plano que corta o cone formado. Dependendo da inclinação da lanterna relativamente à parede, poderemos obter uma circunferência, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole. Tente realizar este experimento!



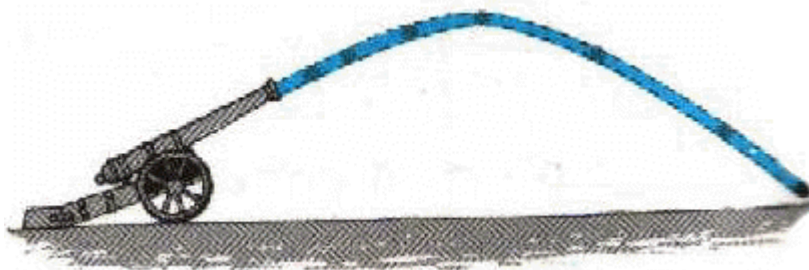
Certos abajures de cabeceira, cuja cúpula é aberta segundo uma circunferência, desenharam na parede uma hipérbole e no teto uma elipse. Este fato é utilizado na área da iluminação para construção de abajures, lanternas, etc.



O som emitido por um avião a jato supersônico tem a forma de um cone, assim ao chocar-se com a Terra irá formar uma curva cônica. Logo, dependendo da inclinação do avião relativamente à Terra, podemos obter elipses, parábolas ou hipérboles. A audiometria usa este fato, entre outros, para saber a que distância da Terra o avião pode ultrapassar a velocidade do som.

Existem cometas que percorrem trajetórias hiperbólicas, os quais ao passarem perto de algum planeta com grande densidade, alteram a sua trajetória para outra hipérbole com um foco situado nesse planeta. Como a parábola é um caso de equilíbrio entre a elipse e a hipérbole (lembrem-se que a excentricidade da parábola é igual a um), a probabilidade de existir algum satélite com órbita parabólica é quase nula. Mas isso não impede a existência de satélites com esta trajetória.

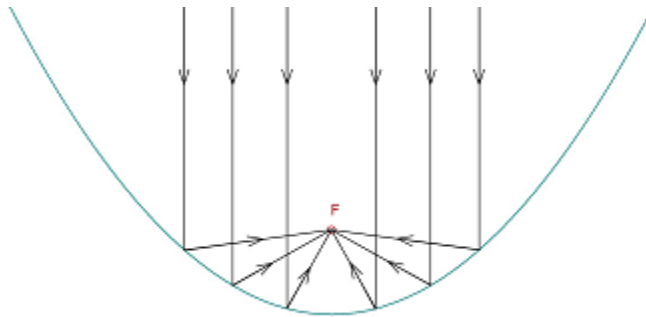
Também as trajetórias dos projéteis, num ambiente sob a ação da força da gravidade, são parabólicas. Já no ambiente terrestre, onde existe a resistência do ar, essas trajetórias são elípticas, mais propriamente, arcos de elipses. No entanto, por vezes, as diferenças entre as trajetórias elípticas e as parabólicas são quase imperceptíveis. A balística (ciência que estuda as trajetórias de projéteis) faz uso deste fato para determinarem o local da queda de um projétil.



Fazendo uso da propriedade refletora da parábola, Arquimedes construiu espelhos parabólicos, os quais por refletirem a luz solar para um só ponto, foram usados para incendiar os barcos romanos nas invasões de Siracusa. Lembre-se que a concentração de energia gera calor!

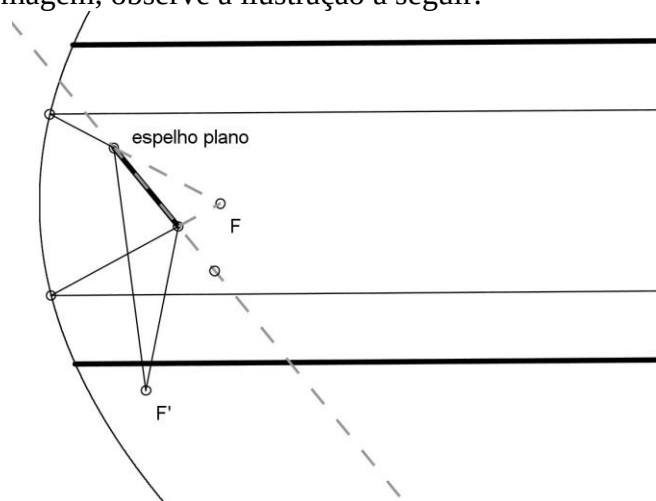


Sabemos que os raios de luz vindos do espaço chegam à terra por feixes paralelos e vimos nesta semana que um espelho parabólico direciona estes raios para o seu foco.

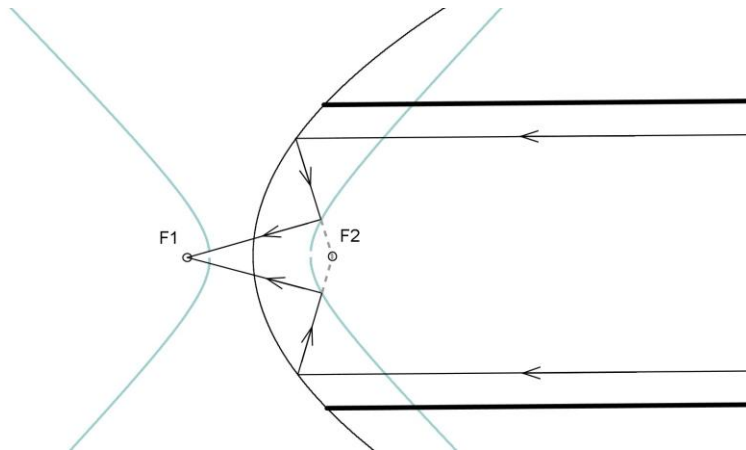


Isto gera um problema, pois para observar a imagem formada no foco, o olho do observador teria que estar posicionado sobre ele, o que na prática se torna impossível, pois o mesmo funcionaria como uma barreira para os raios luminosos.

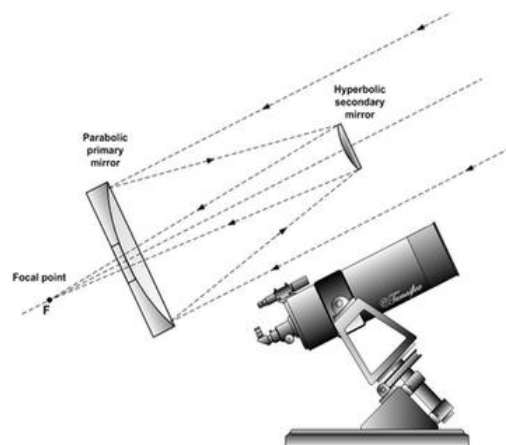
A solução dada a este problema por Isaac Newton foi posicionar um espelho plano entre a superfície parabólica côncava e o foco, de tal forma que os raios fossem direcionados para fora da parte interna do espelho. Por outro lado, a invenção de Newton gerou um problema similar, pois, para que a convergência do foco alternativo ficasse fora do cilindro telescópico a dimensão deste espelho deveria ser bem considerável, bloqueando grande parte dos raios incidentes prejudicando destarte a formação da imagem, observe a ilustração a seguir.



A solução para este problema foi dada em 1672 pelo astrônomo francês Cassegrain utilizando um espelho hiperbólico, a figura abaixo ilustra a propriedade das hipérboles.



Com essa associação de espelhos a flexibilidade da montagem ficou bem maior e as possibilidades de variação das distâncias entre os focos e da distância do foco da parábola ao espelho também. Isto faz com que o telescópio se ajuste perfeitamente à necessidade das observações. Hoje os telescópios modernos como os radiotelescópios utilizam-se desta tecnologia, que levou um século para serem implementadas desde sua idealização. Neste texto pudemos verificar que as propriedades refletoras das cônicas têm contribuído para a construção de telescópios, antenas, radares, faróis, lanternas, etc.



Fonte: <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2012/01/propriedade-refletora-da-hiperbole.html>

Foi a partir da propriedade refletora das parábolas que os engenheiros civis construíram pontes de suspensão parabólica. Se imaginarmos os cabos que prendem o tabuleiro da ponte como raios de luz, facilmente verificamos que o cabo principal, aquele que passa pelos pilares da ponte, tem forma de uma parábola.



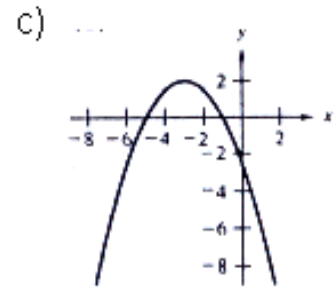
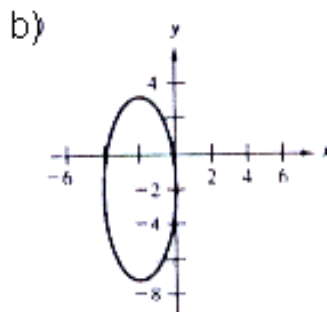
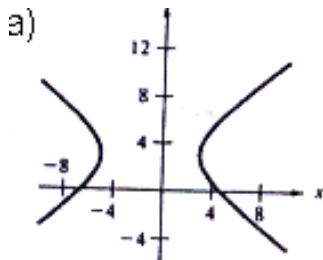
Outra aplicação destas curvas estudadas por Apolônio é o sistema de localização de barcos denominado por LORAN (LONG RANGE Navigation), que faz uso das hipérboles confocais, onde os

radars estão nos focos. A ideia é baseada na diferença de tempo de recepção dos sinais emitidos simultaneamente pelos dois pares de radares, sendo um dos radares comum aos dois pares. O mapa assim construído apresenta curvas hiperbólicas. Esta técnica foi usada na II Guerra Mundial, para detectar barcos japoneses.

Lista de Exercícios 12: Exercícios de revisão

1. Associe a cada gráfico a sua equação.

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $(x+3)^2 = -2(y-2)$ | 2) $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ | 3) $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$ |
| 4) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$ | 5) $(y-2)^2 = -2(x+3)$ | 6) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ |



Resposta: 6, 2, 1

2. Classifique cada uma das cônicas abaixo. Obtenha sua equação reduzida e determine todos os seus elementos.

- | | |
|--|--|
| a) $y^2 - 4y + x + 7 = 0$ | d) $y^2 - x^2 + 12y + 4x + 31 = 0$ |
| b) $25x^2 + 4y^2 + 100x - 16y + 16 = 0$ | e) $9x^2 + 25y^2 + 150y + 18x + 9 = 0$ |
| c) $16y^2 - 9x^2 + 128y - 18x + 391 = 0$ | |

3. Determine a equação reduzida de uma parábola cujo vértice é $(-2, 1)$ e a equação de sua diretriz é dada pela equação $x=1$. Esboce a parábola e encontre as coordenadas de seu foco.

4. Determine a equação reduzida de uma hipérbole cujos vértices são $(2, 3)$ e $(2, -3)$ e os focos $(2, -5)$ e $(2, 5)$. Esboce a hipérbole e encontre as equações de suas assíntotas.

5. Determine a equação de uma elipse centrada na origem com excentricidade $e = 2/3$ e semi-eixo maior $a = 6$.

6. Considere no plano xy a elipse de focos $F_1 = (-1, 1)$ e $F_2 = (1, 1)$ e de semi-eixo menor igual a $1/2$.

- Calcule o outro semi-eixo da elipse.
- Determine a intersecção da elipse com a reta de equação $x=1$.

7. Determine a distância focal e a excentricidade de uma hipérbole com eixo real 8cm e eixo imaginário 6cm.

8. A excentricidade de uma hipérbole centrada na origem é $e = 2\sqrt{2}$ e a distância focal vale 12. Determine a equação desta hipérbole.

9. Marque com um X a alternativa correta.

a) A equação da elipse que tem focos nos pontos $(-1,0)$ e $(0,0)$ e contém o ponto $(1,15/4)$ é:

a) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$

c) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$

d) $\frac{64x^2}{17} + \frac{64y^2}{81} = 1$

e) $\frac{12x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$

b) A equação da reta que passa pela origem e pelo vértice da parábola $y = -x^2 + 4x - 3$ é:

a) $y = 2x$

d) $y = -\frac{1}{3}x$

b) $y = 3x$

e) $y = \frac{1}{3}x$

c) $y = \frac{1}{2}x$

9.6 INTRODUÇÃO ÀS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

A partir da equação geral do 2º grau nas três variáveis x, y e z ,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

é possível representar uma superfície quádrlica.

Além disso, se a superfície dada pela equação acima for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção será uma cônica. A interseção de uma superfície com um plano é chamada traço da superfície no plano.

Assim, por exemplo, o traço da superfície quádrlica no plano $z = 0$ é a cônica $ax^2 + by^2 + 2dxy + mx + ny + q = 0$ contida no plano xOy , podendo representar uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola visto que suas equações gerais são desse tipo.

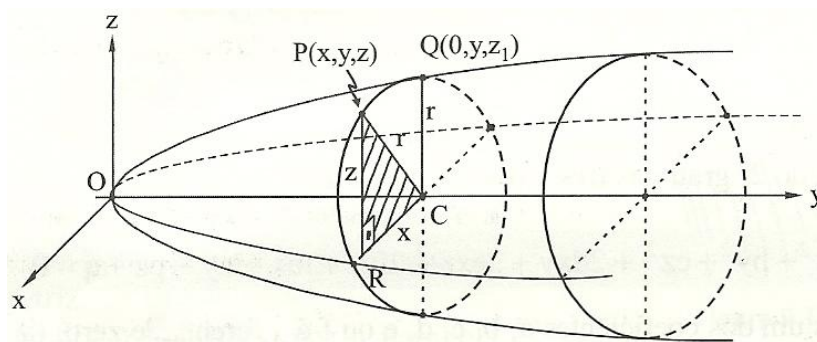
A redução da equação geral das quádrlicas as suas formas mais simples exige cálculos trabalhosos, o que não será nosso objetivo. Enfatizaremos o estudo das quádrlicas representadas por equações canônicas, as quais estão intimamente relacionadas às formas reduzidas das cônicas.

9.7 SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Uma superfície de revolução é a superfície gerada por uma curva plana (chamada geratriz) que gira 360º em torno de uma reta (denominada eixo) situada no plano da curva. Desta forma, o traço da superfície num plano perpendicular ao eixo é uma circunferência e a equação da superfície de revolução é obtida através da equação da geratriz.

Exemplo 10: Seja a superfície gerada pela revolução da parábola $\begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$ em torno do eixo dos y ,

observe a figura abaixo:



Considere $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer da superfície e $C = (0, y, 0)$ o centro da circunferência que é o traço da superfície no plano que passa por P e é perpendicular ao eixo dos y (eixo de revolução). A interseção desta circunferência com a parábola é o ponto $Q = (0, y, z_1)$.

Seja R o pé da perpendicular traçada de P ao plano xy . Ainda, $CP = CQ = r$, por serem raios da mesma circunferência.

Como o triângulo CRP é retângulo em R , vem $CP = \sqrt{(CR)^2 + (RP)^2} = \sqrt{x^2 + z^2}$. Mas, $CQ = z_1 = \sqrt{2y}$, pois Q é ponto da parábola. Portanto, $\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{2y}$ ou $x^2 + z^2 = 2y$, que é a equação desta superfície.

Notemos que a equação $\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{2y}$ contida no exemplo acima pode ser obtida imediatamente ao substituirmos z por $\sqrt{x^2 + z^2}$, na equação $z^2 = 2y$ (geratriz). Este método será utilizado para todos os casos de superfície de revolução.

Então, se a geratriz estiver contida num dos planos coordenados e girar 360° em torno de um dos eixos desse plano, a equação da superfície assim gerada será obtida da seguinte maneira:

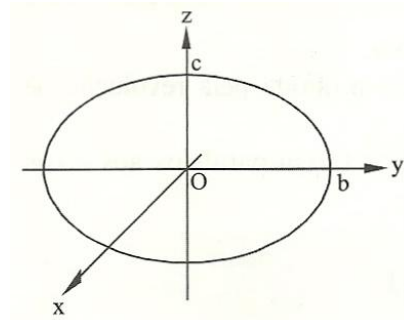
- Se a curva gira em torno do eixo dos x , substitui-se y ou z na equação da curva por $\sqrt{y^2 + z^2}$;
- Se a curva gira em torno do eixo dos y , substitui-se x ou z na equação da curva por $\sqrt{x^2 + z^2}$;
- Se a curva gira em torno do eixo dos z , substitui-se x ou y na equação da curva por $\sqrt{x^2 + y^2}$;

Observação: Quando da substituição de z por $\sqrt{x^2 + z^2}$ na equação $z^2 = 2y$ para resultar $x^2 + z^2 = 2y$, considerou-se $z \geq 0$. Para se ter a superfície completa devemos substituir z por $\pm \sqrt{x^2 + z^2}$, o que não vai alterar em nada a equação $x^2 + z^2 = 2y$ da superfície. A mesma observação vale para as outras substituições acima descritas.

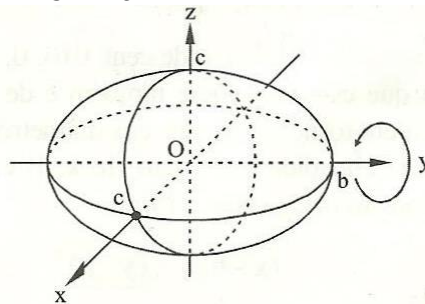
Agora, passaremos a estudar as superfícies quádricas denominadas elipsóides, hiperbolóides e parabolóides.

9.8 ELIPSÓIDES

Consideremos no plano yz a elipse de equações $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$. Veja a figura abaixo:



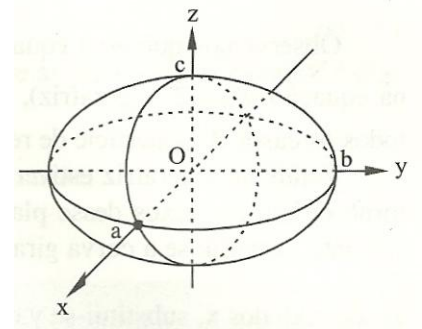
Ao girarmos essa elipse em torno do eixo Oy , obtemos o elipsóide de revolução (conforme a imagem a seguir), cuja equação será obtida da equação da elipse, substituindo-se z por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$ ou $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



De maneira análoga se obtém o elipsóide de revolução em torno de Oz . Neste caso sua equação é obtida da equação da elipse, substituindo-se y por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

De uma maneira mais geral, o elipsóide (figura ao lado) é representado pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde a, b e c são reais positivos e representam as medidas dos semi-eixos do elipsóide.

Observemos ainda que os pontos $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ e $(0, 0, \pm c)$ são soluções da equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, chamada forma canônica do elipsóide.



O traço no plano xy é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ e os traços nos planos xz e yz são as elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$ e $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$, respectivamente.

Observemos também que as intersecções do elipsóide com planos $x = k, y = k$ ou $z = k$ ($k =$ constante), resultam numa elipse, num ponto ou no conjunto vazio.

No caso de $a = b = c$, a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ toma a forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ ou $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e representa uma superfície esférica de centro $C = (0, 0, 0)$ e raio a .

Notemos que esta superfície também é de revolução e obtida pela revolução de uma circunferência em torno de um de seus diâmetros.

Se o centro do elipsoide é o ponto $(h, k, 1)$ e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ assume a forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-1)^2}{c^2} = 1$ obtida por uma translação de eixos.

Exemplo 11: Dada a equação da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 12 = 0$, determine o centro e o raio.

Solução:

Começamos escrevendo a equação na forma

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) + z^2 = 12$$

e completamos os quadrados

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) + z^2 = 12 + 9 + 4$$

não esquecendo de somar 9 e 4 ao segundo membro para “equilibrar” a soma feita ao primeiro membro.

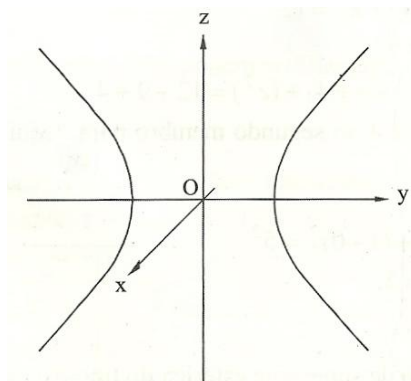
Logo, a equação torna-se:

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 = 5^2$$

E, portanto, $C = (-3, 2, 0)$ e $r = 5$.

9.9 HIPERBOLÓIDES

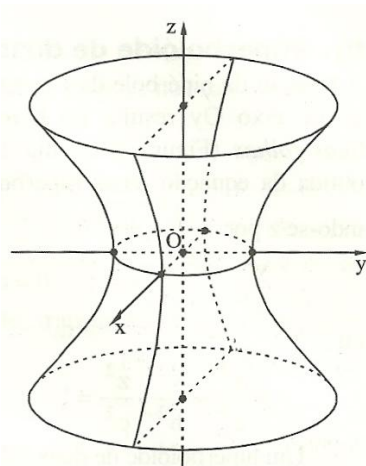
Consideremos no plano yz a hipérbole de equações $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, conforme a figura abaixo:



Obteremos os hiperbolóides de revolução ao efetuarmos rotações em torno de um de seus eixos.

9.9.1 Hiperbolóides de uma Folha

A rotação da hipérbole, apresentada na figura acima, em torno do eixo Oz resulta no hiperbolóide de uma folha (figura abaixo), cuja equação será obtida da equação da hipérbole substituindo-se y por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$: $\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ou $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.



Generalizando, um hiperbolóide de uma folha é representado pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ chamada forma canônica do hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo Oz. As outras duas formas são $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ e $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, que representam hiperbolóides de uma folha ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

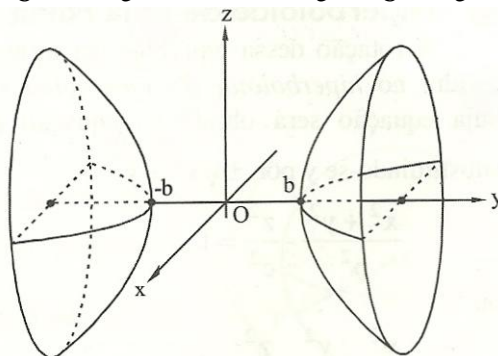
Através da equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ vemos que o traço do hiperbolóide no plano xy é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ e os traços nos planos xz e yz são as hipérboles $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$ e $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$, respectivamente.

Um traço no plano $z = k$ é uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano xy. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são hipérboles.

Observação: É importante frisar que, apesar da imagem mostrar um hiperbolóide limitado ao longo do eixo Oz, essa figura se prolonga indefinidamente ao longo desse eixo (a menos que se restrinja z a um intervalo limitado). Estenderemos esta observação para todas as superfícies que serão ainda estudadas.

9.9.2 Hiperbolóides de duas Folhas

A rotação da hipérbole que foi apresentada no item 9.9 em torno do eixo Oy resulta no hiperbolóide de duas folhas (figura abaixo), cuja equação será obtida da equação dessa hipérbole substituindo-se z por $\pm \sqrt{x^2 + z^2}$: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$ ou $-\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.



De forma mais geral, um hiperbolóide de duas folhas é representado pela equação $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ chamada forma canônica do hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo Oy.

As outras duas formas são $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, e representam hiperbolóides de duas folhas ao longo dos eixos Ox e Oz, respectivamente.

Observemos ainda que os traços desses hiperbolóides nos planos $x = k$, $y = k$ ou $z = k$ ($k =$ constante), resultam em hipérbol, elipses, um ponto ou o conjunto vazio.

RESUMO

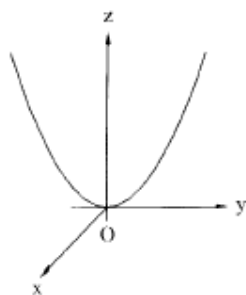
As equações dos elipsóides e hiperbolóides podem ser reunidas em $\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$ e conforme os sinais dos termos do 1º membro, apresentados nesta ordem, temos o seguinte quadro:

	sinais	ao longo do eixo
Elipsóide	+ + +	-----
Hiperbolóide de uma folha	- + +	Ox
	+ - +	Oy
	+ + -	Oz
Hiperbolóide de duas folhas	+ - -	Ox
	- + -	Oy
	- - +	Oz

9.10 PARABOLÓIDES

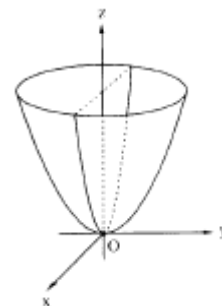
9.10.1 Parabolóide Elíptico

Consideremos no plano yz a parábola de equações $z = \frac{y^2}{b^2}$, $x = 0$, conforme mostra a figura abaixo:



A rotação dessa parábola em torno do eixo Oz resulta no parabolóide de revolução (fig. à direita), cuja equação será obtida da parábola, substituindo-se y por $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$z = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



Já um parabolóide mais geral, denominado parabolóide elíptico, é representado pela equação na forma canônica.

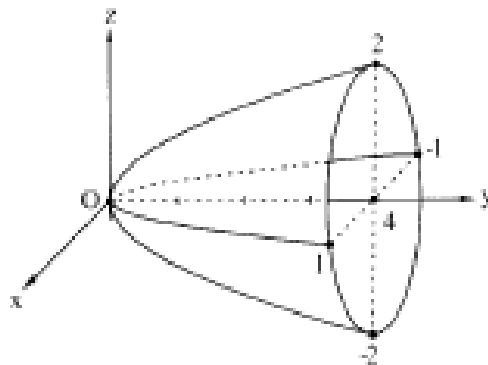
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Exemplo 12: A Figura ao lado, representa o parabolóide elíptico de equação

$$y = 4x^2 + z^2 \text{ ou } y = \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{1} \text{ ao longo do}$$

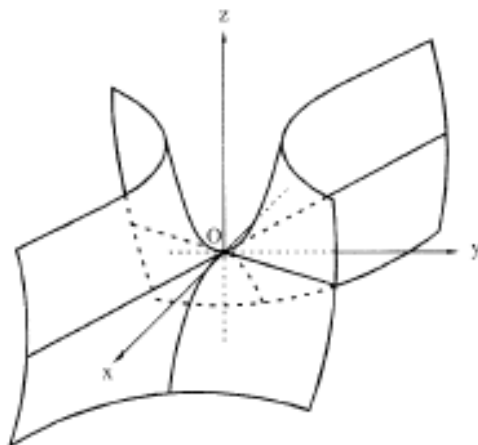
eixo Oy.

Podemos observar que no plano $y=4$ está a elipse $x^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ e as parábolas nos planos $x = 0$ e $z = 0$ são $y = z^2$, $x = 0$ e $y = 4x^2$, $z = 0$, respectivamente.



9.10.2 Parabolóide Hiperbólico

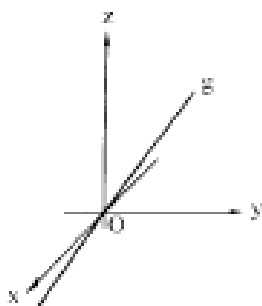
A superfície dada por uma equação do tipo $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ é denominada parabolóide hiperbólico e esta equação é chamada forma canônica do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo Oz.



As outras formas são $y = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}$ e $x = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}$ que representam parabolóides hiperbólicos ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

9.11 SUPERFÍCIES CÔNICAS

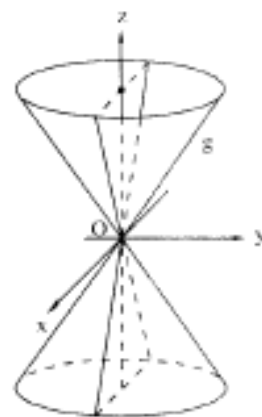
Consideremos no plano yz a reta g de equações $z = my$, $x = 0$



A rotação desta reta em torno do eixo Oz resulta na superfície cônica circular (Fig. a direita) cuja equação é obtida da equação da reta onde y é

substituído por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$$



A reta g é chamada geratriz da superfície e o ponto O, que separa as duas folhas é o vértice da superfície. Uma superfície cônica mais geral, denominada superfície cônica elíptica é

representada pela equação $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ chamada forma canônica da superfície cônica ao longo do

eixo Oz. As outras formas são: $y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$ e $x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ que representam superfícies cônica elípticas ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

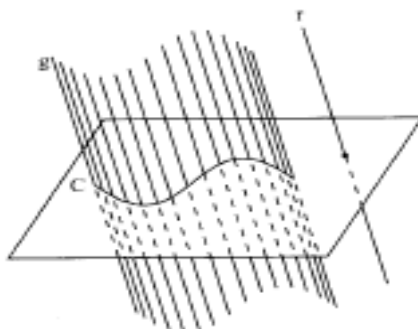
Exemplo 13: se a reta $z = 2y$, $x = 0$, do plano yz é girada em torno de Oz, a superfície de revolução resultante é a superfície cônica circular de vértice na origem e eixo coincidindo com Oz, e cuja equação se obtém de $z = 2y$ substituindo y por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$z = \pm 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ou} \quad z^2 = 4(x^2 + y^2)$$

Observação: no caso dos hiperbolóides, parabolóides e superfícies cônicas de centro ou vértice no ponto (h, k, l) e eixo paralelo a um eixo coordenado, de forma análoga ao que foi feito para o elipsoide, as equações serão obtidas das correspondentes formas canônicas substituindo-se x por x - h, y por y - k e z por z - l.

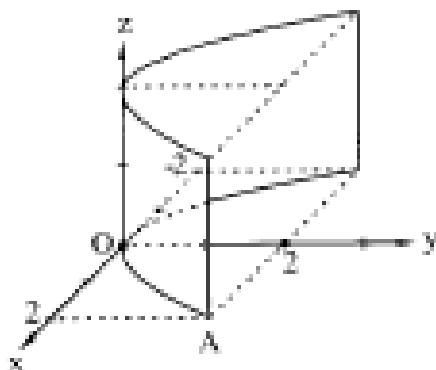
9.12 SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS

Seja C uma curva plana (diretriz) e r uma reta fixa não-paralela ao plano de C. Uma superfície cilíndrica é a superfície gerada por uma reta g (geratriz) que se move paralelamente à reta fixa r em contato permanente com a curva plana C. esta superfície pode ser vista como um conjunto de infinitas retas paralelas que são as infinitas posições da geratriz.

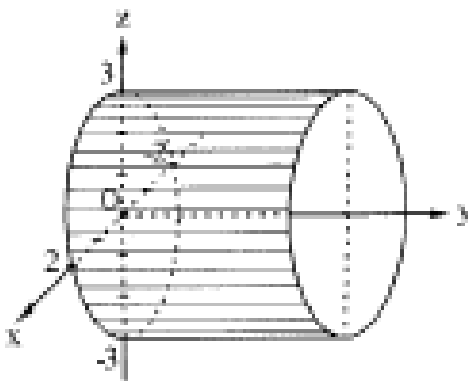


Nos nossos estudos consideraremos apenas superfícies cilíndricas cuja diretriz é uma curva que se encontra num dos planos coordenados e a geratriz é uma reta paralela ao eixo perpendicular ao plano da diretriz.

Exemplo 14: Consideremos a parábola no plano xy dada por $x^2 = 2y, z = 0$. Como a geratriz é uma reta paralela ao eixo Oz , a superfície cilíndrica está ao longo deste eixo, como mostra a figura abaixo.



É importante observar que se tomarmos um ponto da diretriz, por exemplo $A(2,2,0)$, todo ponto do tipo $(2,2,z)$, para z real qualquer, também satisfaz a equação da parábola pois esta pode ser vista como $x^2 = 2y + 0z$, ou seja, a superfície contém o ponto A e toda reta por A é paralela ao eixo Oz . Isto significa que o valor de z não influi no fato de um ponto $P(x,y,z)$ pertencer ou não à superfície. Então, como para o ponto só interessam as variáveis x e y , a própria equação da diretriz é a equação da superfície cilíndrica. A figura abaixo representa uma superfície cilíndrica parabólica ao longo do eixo Oz .



Assim, a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ representa uma superfície cilíndrica elíptica (a diretriz é uma elipse) ao longo do eixo Oy (y é a variável ausente).

Lista de Exercícios 13 - Superfícies Quádricas - Resolva os exercícios 5 e 9 da lista de exercícios da pág. 225, do livro Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle, Editora Makron Books.

10 MATRIZES E DETERMINANTES

10.1 MATRIZES

Operando com matrizes estamos utilizando uma forma compacta de fazermos operações com vários números simultaneamente.

Definição: Uma **matriz** A , $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas. Representamos esta matriz de m linhas e n colunas por:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

A ordem de uma matriz é determinada pelo número de linhas e colunas, por exemplo:

- se o número de linhas for igual ao número de colunas (n), dizemos que esta matriz é de ordem n ou chamamos matriz $n \times n$ (n por n);
- se o número de linhas for m e o número de colunas for n , dizemos que esta matriz é de ordem $m \times n$ (lê-se: m por n) ou simplesmente $m \times n$.

Usaremos letras maiúsculas para denotar matrizes e quando quisermos especificar a ordem de uma matriz A (o número de linhas e colunas) escreveremos $A_{m \times n}$. Para localizar um elemento de uma matriz, dizemos a linha e a coluna (nesta ordem) em que ele está.

Os elementos da matriz A são indicados por a_{ij} , em que: $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

O primeiro índice (***i***) do elemento a_{ij} indica a posição da *linha* e o segundo (***j***) indica a posição da *coluna*. Assim, temos:

- a_{21} (lê-se: a dois um) → elemento localizado na 2ª linha e 1ª coluna.
- a_{34} (lê-se: a três quatro) → elemento localizado na 3ª linha e 4ª coluna.

Duas matrizes são iguais se elas têm o mesmo número de linhas e colunas e todos os seus elementos correspondentes são iguais.

Tipos de Matrizes

Consideramos uma matriz com m linhas e n colunas que denotamos por $A_{m \times n}$:

1) Matriz Quadrada é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m=n$). Ex:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2) Matriz Nula é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j . Ex.: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3) Matriz Coluna é aquela que possui uma única coluna ($n=1$). Ex.: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4) Matriz Linha é aquela que possui uma única linha ($m = 1$). Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

5) Matriz Diagonal é uma matriz quadrada ($m = n$) onde os elementos que não estão na diagonal são

nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Ex.: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Observação: Isso não impede que alguns elementos da diagonal principal sejam iguais a zero. Mas, cuidado, se todos os elementos ($i = j$) forem nulos, teremos uma matriz *nula* ao invés de uma matriz diagonal.

6) Matriz Identidade Quadrada (I) é aquela em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7) Matriz Triangular Superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$. Ex.: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

8) Matriz Triangular Inferior é uma matriz quadrada em que todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$. Ex.: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$.

9) Matriz Simétrica é aquela onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$. Ex.: $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Operações com Matrizes

1) Adição: A soma de duas matrizes de mesma ordem $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m \times n} = [b_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$, que denotaremos $A + B$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B, isto é,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}. \text{ Ex.: } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

A adição de matrizes tem as mesmas propriedades dos números reais:

- a) $A + B = B + A$ (comutatividade)
- b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade)
- c) $A + 0 = A$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$.

2) Multiplicação por Escalar: Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e k um número, então definimos uma nova matriz

$$k \cdot A = [ka_{ij}]_{m \times n}. \text{ Ex.: } -2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dadas as matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e os números k , k_1 e k_2 , temos as seguintes propriedades:

- a) $k(A + B) = kA + kB$
- b) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
- c) $0 \cdot A = [0]$, isto é, se multiplicarmos por zero qualquer matriz A, obteremos a matriz nula.
- d) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

3) Transposição: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de A, ou seja, $b_{ij} = a_{ji}$. A^t (também denotada A') é denominada transposta de A.

$$\text{Ex.: } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \text{ e } A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}.$$

Propriedades:

a) Uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual a sua transposta, ou seja se, e somente se $A=A^t$.

b) $(A^t)^t = A$, ou seja, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

c) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

d) $(kA)^t = kA^t$, onde k é qualquer escalar.

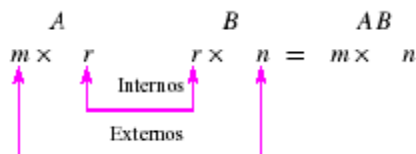
4) Multiplicação: Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$. Definimos $AB = [c_{uv}]_{m \times p}$, onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^n a_{uk} b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + \dots + a_{un}b_{nv}.$$

Essa operação pode ser melhor entendida na equação matricial a seguir

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

Obs.: Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $A_{m \times p}$ e $B_{q \times n}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda ($p=q=r$). A matriz $C = AB$ será de ordem $m \times n$, isto é:



O elemento da linha i e coluna j da matriz $A.B$ (c_{ij}) é obtido multiplicando-se os elementos da linha i de A pelos elementos correspondentes na coluna j da matriz B e somando-se todos os resultados.

Exemplo: Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ calcule, se possível, AB .

Solução

A é uma matriz 3×2 e B é uma matriz 2×2 , logo o produto AB existe, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B e a matriz de resultado C é de ordem 3×2 .

Para encontrar o resultado de c_{11} , multiplicamos os elementos correspondentes da **linha 1** de A e da **coluna 1** de B , somando os resultados:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -7 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

O elemento c_{12} é obtido multiplicando-se os elementos correspondentes da **linha 1** de A e da **coluna 2** de B , somando-se os resultados:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 6 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

O elemento c_{32} é obtido multiplicando-se os elementos correspondentes da **linha 3** de A e da **coluna 2** de B, somando-se os resultados:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & 5(-1) + 3.6 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & 13 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Assim, seguindo o mesmo processo acima o produto completo é :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2.(-2) + 1.(-3) & 2(-1) + 1.6 \\ 4.(-2) + 0.(-3) & 4(-1) + 0.6 \\ 5.(-2) + 3.(-3) & 5(-1) + 3.6 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -8 & -4 \\ -19 & 13 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Propriedades:

- Em geral $AB \neq BA$ (podendo mesmo um deles estar definido e o outro não).
- $AI = IA = A$
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação, em relação à soma)
- $(A + B)C = AC + BC$ (distributividade à direita da multiplicação, em relação à soma)
- $(AB)C = A(BC)$ (associatividade)
- $(AB)^t = B^t A^t$ (Nesta ordem)
- $0 \cdot A = 0$ e $A \cdot 0 = 0$

Lista de Exercícios 14:

- Para encontrar *cluster* (um agrupamento de objetos que tenham alguma relação) de páginas da web (A, B, C, D e E), um estudante através de alguma fórmula encontrou o seguinte grau de similaridade entre elas, conforme a tabela abaixo:

	A	B	C	D	E
A	1	0,2	0,3	0,4	0,4
B	0,2	1	0,7	0,3	0,6
C	0,3	0,7	1	0,1	0,8
D	0,4	0,3	0,1	1	0
E	0,4	0,6	0,8	0	1

- Represente por uma matriz (W) os dados acima.
- Considerando os tipos de matrizes descritas anteriormente você a classificaria como? Por quê?

2) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $D = [2 \ -1]$. Calcule:

- $A + B$
- $A.C$
- $C.D$
- $2A + B$
- $-A$

3) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $A^t = A$, então qual o valor de x?

4) Se A é uma matriz triangular superior, então A^t é _____.

5) Marque V ou F, justificando sua resposta:

- () $(-A)^t = -(A^t)$
- () $(A+B)^t = B^t + A^t$
- () Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.
- () $(-A)(-B) = -(AB)$
- () Se $A.B = 0$, então $B.A = 0$.

f) () Se podemos efetuar o produto $A.A$, então A é uma matriz quadrada.

6) Se $A^2 = A.A$, Calcule $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^2$.

7) Dadas $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$:

a) Mostre que $AB = BA = 0$, $AC = A$ e $CA = C$.

b) Use os resultados de a) para mostrar que $ACB = CBA$ e $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

8) Abaixo é apresentada uma tabela com as quantidades por itens que quatro consumidores (C_1 , C_2 , C_3 , C_4) desejam comprar e outra contendo o preço por unidade de cada item nos três supermercados da cidade (S_1 , S_2 , S_3).

Quantidade desejada por item

	C_1	C_2	C_3	C_4
Batata	3	1	0	1
Pasta de dente	1	0	1	0
Chicletes	10	0	4	0
Carne moída	0	1	1	0
Alface	2	3	0	2

Preço por unidade no supermercado(R\$)

S_1	S_2	S_3
0,80	0,70	0,80
2,55	2,20	2,55
0,05	0,10	0,07
2,65	2,70	3,00
0,50	0,70	0,30

a) Calcule o quanto cada consumidor gastará em cada supermercado.

b) Qual supermercado cada consumidor gastaria a menor quantia?

Respostas:

1) a) $\begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 & 1 & 0,1 & 0,8 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0,8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Matriz simétrica, pois possui mesmo n° de linhas e colunas e $a_{ij} = a_{ji}$.

2) a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 15 \\ -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3) $x = 1$. 4) Triangular inferior. 5) a) V b) V c) F d) F e) F g) V

6) $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

7) Mostrar.

8) a)

	S_1	S_2	S_3
C_1	6,45	6,70	6,25
C_2	4,95	5,50	4,70
C_3	5,40	5,30	5,83
C_4	1,80	2,10	1,40

b) C_1 no S_3 , C_2 no S_3 , C_3 no S_2 e C_4 no S_3

10.2 DETERMINANTES

Chamamos determinante o número associado a uma matriz quadrada $A=[a_{ij}]$ e escreveremos $\det A$ ou $|A|$ ou $\det[a_{ij}]$.

Cálculo do Determinante:

10.2.1 Matriz 1x1:

$$\det[a]=a$$

10.2.2 Matriz 2x2:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

10.2.3 Matriz 3x3:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Método de Sarrus:

Calcula-se o determinante repetindo-se as duas primeiras colunas da matriz.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

- - - + + +

Exemplo: Calcule o determinante de A pelo método de Sarrus, onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 \cdot (-1) - ((-1) \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 6 \cdot (-1) + (2) \cdot 4 \cdot (2)) = -27$$

Para definir o determinante de matrizes quadradas de ordem superior ou igual a 3, precisamos definir o que são os menores de uma matriz.

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, o menor do elemento a_{ij} , denotado por $\tilde{A}_{ij}$, ou simplesmente A_{ij} é a submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de A obtida eliminando-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna de A , conforme o esquema mostrado na figura abaixo:

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dots & & a_{ij} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(A red line in the original image indicates the removal of the i -th row and j -th column, with labels j and i pointing to the respective row and column.)

Exemplo: Para uma matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, a matriz menor de $\tilde{A}_{23}$ é obtida eliminando-se a segunda linha e terceira coluna da matriz original, ou de forma mais mnemônica eliminando a linha e coluna que contenha o elemento a_{23} da matriz original. Assim, a matriz que resta após esta eliminação é a matriz menor de A para $i=2$ e $j=3$, como facilmente vemos abaixo.

$$\tilde{A}_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

(The original image shows the second row and third column of the 3x3 matrix being crossed out with red lines to illustrate the formation of the 2x2 minor matrix.)

Método de Laplace:

Podemos escrever essa soma como: $a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$, ou ainda:

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \text{ ou seja,}$$

$$\det A = a_{11} |A_{11}| - a_{12} |A_{12}| + a_{13} |A_{13}|,$$

onde A_{ij} é a submatriz da inicial, de onde a i -ésima linha e a j -ésima coluna foram retiradas.

Além disso, se chamarmos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ obtemos a expressão $\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz a abaixo utilizando o método de Laplace.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Para calcular o $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, devemos escolher uma linha ou uma coluna e usar a fórmula definida para o método de Laplace. No caso, sem perda de generalidade vamos escolher a linha 1,

poderia ser escolhida qualquer outra linha ou coluna e o resultado seria igual ao que iremos obter (você pode verificar isso escolhendo outra linha ou coluna e calculando o determinante). Assim, o valor de i e j para uso na fórmula são $i=1$ e $j \in \{1,2,3\}$, isto é:

$$\det(A) = \sum_{i=1, j=1}^{j=3} \Delta_{ij} |A_{ij}| = \sum_{i=1, j=1}^{j=3} a_{ij}(-1)^{i+j} |A_{ij}| = a_{11}(-1)^{1+1} |A_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2} |A_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3} |A_{13}| =$$

Procedendo a determinação da submatriz de A e os pivôs a_{ij} , seguindo a fórmula exposta acima temos:

$$= \boxed{3}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \boxed{2}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \boxed{-1}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & \cancel{-1} \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Os valores nos quadrados azuis são os pivôs extraídos da linha 1, que escolhemos a priori. Esse pivô na matriz original é usado para excluir a respectiva linha e coluna que o contem na matriz original, gerando dessa forma a matrizes menores da matriz original (linha e coluna em vermelho na figura), isto é:

$$= 3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

Agora, calculando os determinantes 2×2 resultantes do processo acima, utilizando o definição de determinante para matrizes 2×2 tem-se:

$$= 3(1 \cdot 2 - (-1) \cdot 6) - 2(4 \cdot 2 - (-3) \cdot 6) - 1(4 \cdot (-1) - (-3) \cdot 1) =$$

$$= 24 - 52 + 1 = -27$$

O valor -27 é, portanto, o valor do determinante da matriz original A .

10.2.4 Matriz $n \times n$ (n linhas e n colunas)

A propriedade acima continua sendo válida para matrizes de ordem n , isto é,

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \text{ Assim podemos expressar } \det A_{n \times n} = a_{i1}\Delta_{i1} + \dots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\Delta_{ij}.$$

O número Δ_{ij} (que é o determinante afetado pelo sinal $(-1)^{i+j}$ da submatriz A_{ij} , obtida retirando-se a i -ésima e a j -ésima coluna) é chamado de **cofator** ou complemento algébrico do elemento a_{ij} . O desenvolvimento acima foi obtido a partir da i -ésima linha. Uma forma análoga também é válida para a j -ésima coluna.

Exemplo:

Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

Primeiramente, devemos escolher a linha ou coluna com a maior quantidade de zeros, no caso em questão a 2ª. coluna contém 2 zeros, o que deve facilitar os cálculos para encontrar o determinante. A seguir, usamos os co-fatores para cada um dos elementos da 2ª coluna, como pode ser visto a seguir:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1, j=2}^4 \Delta_{ij} |A_{ij}| = \sum_{i=1, j=2}^4 a_{ij} (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

$$= a_{12} (-1)^{1+2} |A_{12}| + a_{22} (-1)^{2+2} |A_{22}| + a_{32} (-1)^{3+2} |A_{32}| + a_{42} (-1)^{4+2} |A_{42}| =$$

Cada matriz entre barras acima é uma submatriz da matriz original e é obtida eliminando a respectiva linha e coluna expressa nos índices destas submatrizes, isto é, para a submatriz A_{12} eliminamos a linha 1 e a coluna 2. Para a submatriz A_{22} eliminamos a linha 2 e coluna 2, para a submatriz A_{32} eliminamos a linha 3 e coluna 1 e por fim para a submatriz A_{42} , eliminamos a linha 4 e coluna 2, conforme as linhas vermelhas indicam na expressão abaixo.

$$= a_{12} (-1)^{1+2} |A_{12}| + a_{22} (-1)^{2+2} |A_{22}| + a_{32} (-1)^{3+2} |A_{32}| + a_{42} (-1)^{4+2} |A_{42}| =$$

$$= 0(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

Perceba que ao retirar a linha e coluna indicada sobram apenas as demais componentes da matriz original, que agora formam a respectiva submatriz.

$$= 0(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Note que para os valores zeros, escolhidos da segunda coluna da matriz original, as respectivas parcelas se anulam ficando apenas a segunda e a última parcela, restando calcular o determinante das duas matrizes 3x3 destas parcelas. Assim, escolhendo as melhores linhas de cada uma delas podemos utilizar LAPLACE novamente, ou se preferirmos poderemos usar SARRUS, pois todas as matrizes são 3x3. Continuaremos usando LAPLACE para entendê-lo melhor. No caso, para a primeira matriz 3x3 usaremos a primeira linha e para a segunda matriz 3x3 usaremos a segunda linha (poderíamos usar qualquer linha ou coluna), para obter os pivôs e as respectivas submatrizes, como pode ser visto na expressão abaixo:

$$1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \left(2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \right) +$$

$$+ 3 \left(5(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} \right) =$$

Após ter todos os pivôs e submatrizes determinadas, passamos ao cálculo dos determinantes destas submatrizes e posterior cálculo do determinante original, como pode ser visto na expressão abaixo.

$$= 1 \left(2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \right) + 3 \left(5(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= 1(2(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - 3(3 \cdot 1 - 5 \cdot 2) + 2(3 \cdot 2 - 5 \cdot 2)) + 3(-5(3 \cdot 2 - 1 \cdot 2) + 2(2 \cdot 2 - 3 \cdot 2) - 4(2 \cdot 1 - 3 \cdot 3)) =$$

$$= 1(2(-3) - 3(-7) + 2(-4)) + 3(-5(6 - 2) + 2(4 - 6) - 4(2 - 9)) = (-6 + 21 - 8) + 3(-20 + 4 + 28) = 17 + 12 = 29$$

10.2.5 Propriedades do Determinante

1) $\det A = \det A^t$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 1 - (0 + 4 + 3) = -2$

$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\det A^t = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 6 - (0 + 4 + 3) = -2$

2) $\det (A+B) \neq \det A + \det B$.

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 6$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -10$ $\det B = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$ $\det A + \det B = -10 - 6 = -16$

$\det(A+B) \neq \det A + \det B$
 $6 \neq -16$

3) $\det (AB) = \det A \cdot \det B$.

Ex.: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$ $\det(AB) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} = 7$

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1$ $\det B = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$ $\det A \cdot \det B = 1 \cdot 7 = 7$

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$
 $7 = 7$

4) Se uma linha (ou coluna) é igual a zero, o determinante é igual a zero.

Ex.: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$

5) Se duas linhas (ou colunas) são proporcionais, o determinante é igual a zero.

Ex.: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

6) Se uma linha (ou coluna) pode ser obtida como uma combinação de linhas (somadas ou subtraídas), o determinante é igual a zero.

Ex.: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 6 - (9 + 0 - 12) = 0$

linha1+linha2

7) Ao trocar duas linhas (ou colunas) de um determinante o sinal dele troca.

Ex.: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (2 + 2) = -5$ $\det B = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 - (-1) = 5$

8) Ao multiplicar uma linha (ou coluna) por uma constante, o determinante fica multiplicado por essa constante.

$$\text{Ex.: } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \quad \det B = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 6 = 15$$

9) Ao multiplicar uma linha (ou coluna) por uma constante e somar este produto aos elementos correspondentes de outra linha (ou coluna) o determinante será igual ao da matriz original.

Ex.:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 18 - (-3 + 12) = 11 \quad \det B = \begin{vmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 22 & -1 & 4 \\ -9 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+5 \cdot 3 & 0 & 3 \\ 2+5 \cdot 4 & -1 & 4 \\ 1+5 \cdot (-2) & 3 & -2 \end{vmatrix} = 32 + 198 - (27 + 192) = 11$$

coluna1+5.coluna3

10.3 MATRIZ ADJUNTA

Dada uma matriz A , podemos obter outra matriz a partir dos cofatores de A , ou seja $\bar{A} = [\Delta_{ij}]$. Chamamos de **matriz adjunta** de uma matriz quadrada A à matriz transposta da matriz dos cofatores de A , ou seja, $\text{adj } A = \bar{A}^t$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Cofatores: } \Delta_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 & \Delta_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 & \Delta_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \\ \Delta_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 & \Delta_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 & \Delta_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8 \\ \Delta_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 & \Delta_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 & \Delta_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 \end{aligned}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & -4 & 8 \\ 5 & 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{adj } A = (\bar{A})^t = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

Propriedade: $A \cdot \bar{A}^t = (\det A) I_n$.

10.4 MATRIZ INVERSA

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , chamamos de inversa de A a uma matriz B tal que $A.B = B.A = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n . Escreveremos A^{-1} para a matriz inversa de A .

$$\text{Ex.: Seja } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Então } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \text{ pois } A.A^{-1} = I_2 \text{ e } A^{-1}.A = I_2.$$

Exemplo:

$$\text{A matriz } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ é a inversa de } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

pois,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Observações:

a) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis (ou seja, é possível encontrar A^{-1} e B^{-1}), então $A.B$ é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

b) Se A é uma matriz quadrada e existe uma matriz B tal que $BA = I$, então A é inversível, ou seja A^{-1} existe e, além disso, $B = A^{-1}$. Isso significa que basta verificar uma das condições para a inversa de uma matriz e esta será única.

c) Nem toda matriz tem inversa. Uma matriz quadrada admite inversa se, e somente se $\det A \neq 0$.

Neste caso, A^{-1} pode ser determinado por: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A$.

$$\text{Ex.: } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{adj}A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \end{bmatrix} \quad \det A = 14$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \text{adj}A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{2}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & -\frac{4}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{4}{14} & \frac{8}{14} & -\frac{6}{14} \end{bmatrix}$$

Lista de Exercícios 15:

1) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det A + \det B$

b) $\det (A + B)$

2) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det (AB)$

b) $\det (BA)$

3) Calcule $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

- a) por Sarrus b) em relação à segunda coluna, usando o desenvolvimento de Laplace.

4) Use quaisquer das propriedades para simplificar e calcular os determinantes abaixo, conforme o exemplo: Usando a propriedade 8 temos:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 0 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 0 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4.(1) & 4.(2) & 4.(3) \\ 5.(1) & 5.(0) & 5.(-2) \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 4.5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 4.5.(12) = 240$$

a) $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 1 \\ 6 & 12 & 18 \\ 12 & -28 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & 15 \end{vmatrix}$

5) Marque V ou F, justificando suas respostas:

a) () $\det(AB) = \det(BA)$

b) () $\det A^t = \det A$

c) () $\det(2A) = 2 \det A$

d) () $\det A^2 = (\det A)^2$

e) () Se A é matriz triangular, então $\det A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ (ou seja, soma dos elementos da diagonal principal)

f) () Se A é matriz triangular, então $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$ (ou seja, produto dos elementos da diagonal principal)

6) Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, calcule:

- a) A_{23} b) $|A_{23}|$ c) Δ_{23} d) $\det A$

7) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule:

- a) $\text{adj } A$ b) $\det A$ c) A^{-1}

8) Encontre A^{-1} , onde:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9) Calcule o valor do determinante das matrizes abaixo pelo método que achar mais conveniente.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} -5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

10) Encontre, se possível, A^{-1} :

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

11) Use quaisquer das propriedades para simplificar e calcular os determinantes abaixo:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & -3 \\ 4 & -8 & 4 & -12 \\ 5 & 10 & 20 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 8 & -12 & 20 \\ -3 & 6 & 21 \\ -10 & 15 & -25 \end{vmatrix}$$

Respostas:

1) a) 1 b) 3 2) a) $\det(AB) = 0$ b) $\det(BA) = -231$ 3) 21 4) a) 0 (propr.5)

b) 0 (propr.5) c) 20 (propr.8) 5) a) F b) V c) F d) V e) F f) V

$$\text{6) a) } \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } 36 \quad \text{c) } -36 \quad \text{d) } 0 \quad \text{7) a) } \begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 5 & 21 & -2 \\ -10 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \det A = 45 \quad \text{c) } \begin{bmatrix} \frac{5}{45} & -\frac{6}{45} & \frac{7}{45} \\ \frac{45}{5} & \frac{45}{21} & -\frac{45}{2} \\ \frac{45}{10} & \frac{45}{3} & \frac{45}{4} \\ -\frac{45}{45} & \frac{45}{45} & \frac{45}{45} \end{bmatrix}$$

$$\text{8) a) Não tem inversa. b) } \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 12 & -6 \\ 11 & 14 & -43 & 22 \\ 10 & 14 & -41 & 21 \end{bmatrix} \quad \text{9) a) } -42 \quad \text{b) } 6 \quad \text{c) } -255$$

$$\text{10) a) } \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{c) Não tem inversa} \quad \text{d) Não tem inversa}$$

11) a) 0 (propr.4) b) -600 (propr.8) c) 0 (propr.5)

10.5 OPERAÇÕES ELEMENTARES

São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

Permuta das i -ésima linha e j -ésima linhas. ($L_i \leftrightarrow L_j$)

$$\text{Ex.: } L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo K. ($L_i \rightarrow kL_i$)

$$\text{Ex.: } L_2 \rightarrow -3L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha. ($L_i \rightarrow L_i + kL_j$)

$$\text{Ex.: } L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é linha equivalente a A, se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A.

Notações: $A \rightarrow B$ ou $A \sim B$.

10.6 FORMA ESCADA REDUZIDA POR LINHAS

Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida à forma escada se:

- O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
- Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus elementos iguais a zero.
- Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).
- Se as linhas $1, \dots, r$ são linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i , então $k_1 < k_2 < \dots < k_r$. Esta última condição impõe a forma escada à matriz, ou seja, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.

$$\text{Ex.: } \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.7 INVERSÃO DE MATRIZES UTILIZANDO MATRIZES ELEMENTARES

O cálculo da inversa de uma matriz usando determinante ou multiplicação de matrizes, envolve um número muito grande de operações. O processo prático de inversão baseado nas operações com as linhas de uma matriz é, em termos de cálculos, mais vantajoso.

Aplicar uma operação elementar nas linhas de uma matriz é o mesmo que aplicar essa operação elementar na matriz identidade e, em seguida, multiplicar esta nova matriz por A.

Ex.: Se tomarmos a matriz identidade I_3 e trocarmos a primeira e a terceira linha, obteremos a

$$\text{matriz } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se multiplicarmos esta matriz pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, teremos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

que é o mesmo que a troca da primeira e terceira linha da matriz A.

Uma matriz elementar é uma matriz obtida a partir da identidade, através da aplicação de uma operação elementar com linhas. Uma matriz elementar E_1 é inversível e sua inversa é a matriz elementar E_2 , que corresponde à operação com linhas inversa da operação efetuada em E_1 .

10.8 PROCEDIMENTO PARA INVERSÃO DE MATRIZES

Se uma matriz A pode ser reduzida à matriz identidade, por uma seqüência de operações elementares com linhas, então A é inversível e a matriz inversa de A é obtida a partir da matriz identidade, aplicando-se a mesma seqüência de operações com linhas. Na prática, operamos simultaneamente com as matrizes A e I, através de operações elementares, até chegarmos à matriz I na posição correspondente a matriz A. A matriz obtida no lugar correspondente à matriz I será a inversa de A.

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Coloquemos a matriz junto com a matriz identidade e apliquemos as operações com linhas, para reduzir a parte esquerda (que corresponde à matriz A) à forma escada reduzida por linha, não esquecendo de efetuar cada operação na direita também.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L1 \leftrightarrow L2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L2=L2-2.L1 \\ L4=L4+L1}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L3=L3-L2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L1=L1-L3 \\ L2=L2+2.L3 \\ L3=-L3 \\ L4=L4-L3}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L1=L1+2.L4 \\ L2=L2-4.L4 \\ L3=L3+3.L4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Finalmente, obtemos a identidade à esquerda e a inversa de A à direita.

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Lista de Exercícios 16:

1) Utilizando as operações elementares sobre linhas, encontre A^{-1} , onde:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

2) Determine o valor de k para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & k & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ seja inversível.

3) Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4) Escreva todas as possíveis matrizes 2x2 que estão na forma escada reduzida por linhas.

5) Em que condições uma matriz diagonal de ordem 4 é inversível? Qual sua inversa? E se a matriz fosse de ordem n?

6) Calcule A^{-1} , onde: a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Respostas:

1) a) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 12 & -6 \\ 11 & 14 & -43 & 22 \\ 10 & 14 & -41 & 21 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

2) $k \neq -\frac{11}{7}$

3) a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ para todo escalar k ,

5) Quando todos os elementos da diagonal principal são diferentes de zero. A inversa de uma matriz diagonal de ordem n é aquela que apresenta os elementos da diagonal inversos ao da matriz original.

$$\text{6) a) } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

11 SISTEMAS LINEARES

11.1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Um sistema de equações com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

[illegible]

Uma solução do sistema (*) é uma n-upla de números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisfaça simultaneamente estas m equações.

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro.

11.2 SISTEMAS E MATRIZES

Podemos escrever o sistema (*) numa forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A \cdot X = B \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{é a matriz dos coeficientes,}$$

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}, \text{ que é chamada matriz ampliada do sistema. Cada linha desta matriz é}$$

uma representação abreviada da equação correspondente no sistema. Ex.: No sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \text{ temos a forma matricial } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}. \text{ Em termos de matrizes ampliadas, temos } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

11.3 MÉTODO DE GAUSS OU ESCALONAMENTO

O método de Gauss ou escalonamento para resolução de sistemas é um dos mais utilizados quando se faz uso do computador, devido ao menor número de operações que envolve. Ele consiste em reduzir a matriz ampliada do sistema, utilizando operações elementares nas linhas à uma matriz que só é diferente da forma escada reduzida por linha na condição b) que passa a ser: Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha, tem todos os elementos abaixo dessa linha iguais a zero. As outras condições a, c e d são idênticas. Após o escalonamento da matriz ampliada, a solução final do sistema é obtida por substituição.

11.4 POSTO E NULIDADE DE UMA MATRIZ - GRAU DE LIBERDADE DE UM SISTEMA

Para os conceitos abaixo utilize sempre a matriz escalonada.

	N	p (posto)	n - p
Matriz Escalonada	Número de Colunas	Número de linhas não nulas	Nulidade
Sistema	Número de Incógnitas	PC e PA	Grau de Liberdade ou N^0 de variáveis livres

- **PC (Posto da matriz dos Coeficientes)** : é o número de linhas não nulas da matriz dos coeficientes após o escalonamento;
- **PA (Posto da matriz Ampliada)** : é o número de linhas não nulas da matriz ampliada após o escalonamento;

11.5 SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Se tivermos um sistema de uma equação e uma incógnita $ax = b$ existirão três possibilidades:

- $a \neq 0$. Neste caso a equação tem uma única solução $x = \frac{b}{a}$.
- $a = 0$ e $b = 0$. Então temos $0x = 0$ e qualquer número real será solução da equação.
- $a = 0$ e $b \neq 0$. Temos $0x = b$. Não existe solução para esta equação.

11.5.1 Sistemas de duas equações e duas incógnitas.

Exemplo 1: Dado o sistema linear $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$.

O conjunto de pontos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que satisfaz cada equação deste sistema, representa uma reta no plano. Para resolver este sistema devemos então encontrar os pontos comuns a estas duas

retas. Deste modo (3,1) é a única solução. A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$.

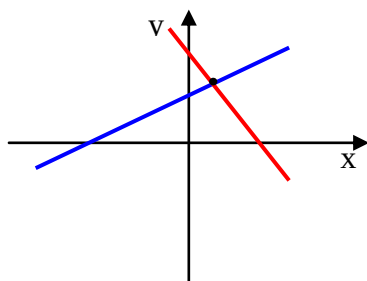
Transformando-a em matriz escalonada, obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, que é a matriz ampliada do sistema

$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ equivalente ao sistema inicial. O sistema tem uma única solução $x_1=3$ e $x_2=-1$.

Note que esta solução é a mesma solução obtida por eliminação de Gauss-Jordan, porém com menos operações elementares.

Como o posto da matriz aumentada (PA, que corresponde o n° de linhas não nulas) é igual ao Posto da matriz de coeficientes (PC, que é o n° de linhas não nulas da matriz de coeficientes) e a nulidade do sistema ($n-p=0$) podemos afirmar que o sistema tem solução única.

Neste caso dizemos que o sistema é possível (compatível) e determinado. $PC=PA$ e a nulidade é zero ($n-p=0$). Graficamente, esta situação é representada por duas retas concorrentes



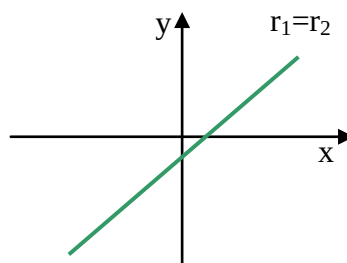
Exemplo 2: Dado o sistema linear $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases}$.

As duas retas que formam este sistema são coincidentes. Neste caso, qualquer ponto de uma das retas é solução deste sistema. A matriz ampliada do sistema e a matriz escalonada são: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto a segunda equação é verdadeira para quaisquer números x_1 e x_2 . O conjunto

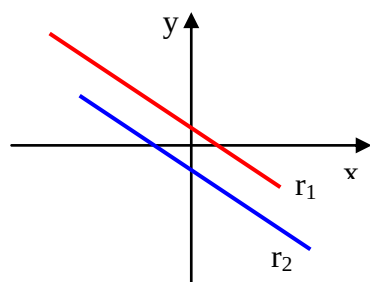
de soluções será dado atribuindo-se valores arbitrários para x_2 e substituindo-o na equação. Logo, esse sistema admite infinitas soluções. Neste caso, $PC = PA = 1$ e o grau de liberdade $2-1 = 1$, ou seja o sistema apresenta uma variável livre.

Graficamente, isto é representado por



Exemplo 3: Dado o sistema linear $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$.

Geometricamente, temos duas retas no plano que não possuem nenhum ponto em comum, pois são paralelas, portanto o sistema não tem solução. A matriz ampliada $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ é equivalente a matriz escalonada $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Não existe valor de x_1 ou x_2 capaz de satisfazer a segunda equação ($0x_1 + 0x_2 = 1$). Logo, o sistema não tem solução. Podemos observar que o posto da matriz dos coeficientes (PC) do sistema inicial é 1 e o posto da matriz ampliada (PA) é 2.



11.5.2 Caso Geral: Sistema de m equações e n incógnitas $x_1, \dots, x_n$

Seja $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ cujos coeficientes a_{ij} e termos constantes b_i são números reais (ou complexos). Este sistema poderá ter:

- uma única solução $x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n$. Neste caso o sistema é possível (compatível) e determinado.
- infinitas soluções. Neste caso o sistema é possível e indeterminado.
- nenhuma solução. Neste caso o sistema é impossível (incompatível).

Consideremos a matriz ampliada do sistema e sua matriz escalonada;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \text{bloco escalonado} & c_1 \\ \vdots & \vdots \\ \text{bloco escalonado} & c_k \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & c_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$$

Observações:

Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada (PA) é igual ao posto da matriz dos coeficientes (PC):

- Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e o grau de liberdade zero, a solução será única.
- Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e o grau de liberdade é maior que zero, admite infinitas soluções.

Exemplo:

Resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + 1x_2 - 1x_3 = -2 \end{cases}$$

Solução:

Transformando o sistema acima na sua forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Em termos de matriz ampliada, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Procedendo as etapas de uma Eliminação Gaussiana tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - \frac{5}{7}L_2} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-50}{7} & \frac{-150}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = -\frac{7}{10}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

Como PC=3 e PA= 3 o sistema tem solução única e ela pode ser obtida por retro-substituição como segue:

- 3ª. Equação: $0x_1 + 0x_2 + 5x_3 = 15 \therefore 5x_3 = 15 \therefore \boxed{x_3 = 3}$
- 2ª. Equação: $0x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 2 \therefore -7x_2 - 4(3) = 2 \therefore -7x_2 = 2 + 12 \therefore -7x_2 = 14 \therefore \boxed{x_2 = -2}$
- 1ª. Equação: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \therefore x_1 + 2(-2) + 3(3) = 6 \therefore x_1 = 6 + 4 - 9 \therefore \boxed{x_1 = 1}$

Logo, o sistema tem uma única solução (1, -2, 3).

Lista de Exercícios 17:

1) Resolva os sistemas abaixo, indicando os postos das matrizes dos coeficientes e das matrizes ampliadas e, se o sistema for possível, o grau de liberdade.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

2) Determine os valores de k para os quais o sistema $\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$, nas incógnitas x, y e z tenha:

a) Solução única. b) Nenhuma solução. c) mais do que uma solução.

3) Resolva os sistemas abaixo, indicando os postos das matrizes dos coeficientes e das matrizes ampliadas e, se o sistema for possível, o grau de liberdade.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

4) Determine a condição em a, b e c para que o sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$ de incógnitas x, y e z tenha solução.

Respostas:

1)

a) $x = \frac{17}{3} - \frac{7}{3}z$; $y = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}z$; $PC = PA = 2$; $GL = 1$

b) $x = y = z = 0$; $PC = PA = 3$; $GL = 0$

2)

a) $k \neq 3$ b) $k = 3$ e $k \neq 3 \Rightarrow$ impossível, portanto, o sistema sempre terá solução

c) $k = 3$

3)

a) $x = w$; $y = z = 1$; $PC = PA = 3$; $GL = 1$

b) Sistema Impossível ($PC \neq PA$)

4) $2a - b + c = 0$

11.6 SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes são todos nulos. Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução ($x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_m = 0$), que é chamada **trivial**.

Após o escalonamento da matriz ampliada,

- Se $m = n$, então o sistema tem somente a solução zero (ou trivial).
- Se $n < m$, então o sistema tem uma solução não nula (ou diferente da trivial).

Exemplo

Considere o sistema homogêneo,
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
 e sua matriz ampliada dada por
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right].$$

Utilizando o método de eliminação Gaussiana temos:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = L_2 - \frac{3}{4}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que PC=3 e n=3, logo existe somente a solução trivial ($x=0, y=0$ e $z=0$).

Exemplo

Dado
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
, e a matriz ampliada deste sistema é dada por
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Aplicando eliminação de Gauss-Jordan, temos

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_1, L_3 = L_3 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2, L_3 = L_3 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_3 = -L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Podemos observar que p=PC=3 e n=4, logo existe soluções além da solução trivial ($x=0, y=0$ e $z=0$) e como os graus de liberdade são dados por (n-p), no caso particular deste exemplo ($n-p=4-3=1$), tem-se um grau de liberdade, então as soluções podem ser dadas em função de uma variável. Se fixarmos a variável $x_4=k$ (variável livre), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 1x_4 = 0 \end{cases}$$

- 3ª. Equação: $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 1(k) = 0 \therefore x_3 = k$
- 2ª. Equação: $0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1(k) = 0 \therefore x_2 = -k$
- 1ª. Equação: $1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1(k) = 0 \therefore x_1 + k = 0 \therefore x_1 = -k$

Logo a solução pretendida é dada por $(-k, -k, k, k)$, onde k é um número real qualquer. Assim, este sistema tem infinitas soluções (uma solução para cada k que fixarmos). Ademais, se $k=0$ temos a solução trivial.

11.7 APLICAÇÃO

Três pessoas lancharam da seguinte maneira: a primeira tomou 1 refrigerante, comeu 4 pastéis e 5 balas, a segunda, 2 refrigerantes, 1 pastel e 6 balas e a terceira, 1 pastel e 2 balas. Quais os preços do refrigerante, do pastel e da bala, se a primeira gastou R\$ 4,00; a segunda gastou R\$ 2,20 e a terceira gastou R\$ 0,90?

Solução: x = preço do refrigerante
 y = preço do pastel
 z = preço da bala

$$\begin{cases} x + 4y + 5z = 4 \\ 2x + y + 6z = 2,2 \\ 0x + y + 2z = 0,9 \end{cases} \xrightarrow{\text{matriz ampliada do sistema inicial}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 2,2 \\ 0 & 1 & 2 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Após o escalonamento, encontra-se, por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0,9 \\ 0 & 0 & 1 & 0,05 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sistema da matriz ampliada escalonada}} \begin{cases} x + 4y + 5z = 4 \\ y + 2z = 0,9 \\ z = 0,05 \end{cases}$$

Podemos observar que o sistema é possível ($PC = PA = 3$) e determinado ($GL = 3-3 = 0$). Resolvendo por substituição o sistema resultante da matriz ampliada escalonada, teremos: preço do refrigerante (x) igual a R\$ 0,55; preço do pastel (y) igual a R\$ 0,80 e preço da bala (z) igual a R\$ 0,05.

Lista de Exercícios 18:

1. Determine se cada sistema tem solução não-nula:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + 3z - 2w = 0 \\ 3x - 7y - 2z + 4w = 0 \\ 4x + 3y + 5z + 2w = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ x + 4y + 7z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

2. Suponha que você vai fazer um lanche, constando de iogurte, pastel e chocolate e que tem R\$ 1,80 disponível. Segundo os nutricionistas, um lanche deve conter 1350 calorias e 66 gramas de proteínas.

Para cada 100g dos alimentos acima, temos:

100g	Calorias	Proteínas (g)	Custo (R\$)
Iogurte	50	4	0,20
Chocolate	600	24	0,60
Pastel	200	28	0,80

Quais as quantidades de cada alimento?

3. Dado o sistema
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$$
, calcule o posto da matriz dos coeficientes, o posto da matriz

ampliada e descreva a solução desse sistema.

4. Determine a condição em a, b e c para que o sistema
$$\begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$$
 de incógnitas x, y e z tenha solução.

Respostas:

1)

a) sim, o sistema tem solução diferente da trivial.

$$PC = PA = 3 \quad GL = 1 \quad \text{variável livre: } w$$

b) sim, o sistema tem solução diferente da trivial.

$$PC = PA = 2 \quad GL = 1 \quad \text{variável livre: } z \quad x = 9z \quad y = -4z$$

2) pastel : 50 g

chocolate : 200 g

iogurte : 100 g

3) $PC = PA = 2$ Sistema Possível

$GL = 1$ infinitas soluções $\rightarrow$ sistema possível e indeterminado

Variável Livre : z

$$x = 2 - z \quad y = 2 + 2z$$

4) Para um sistema ter solução é necessário que $PC = PA$, e para PC ser igual a PA não importa o valor de a, b ou c.

12 ESPAÇOS VETORIAIS

Um conjunto V munido com duas operações $M+N=.....$, $r.M=..... \forall M,N \in V, \forall r \in \mathbb{R}$ é chamado de ESPAÇO VETORIAL REAL, e usamos a notação (V, +, .), se valem:

- 1) $V \neq \emptyset$
- 2) $M + N \in V$ $\forall M, N \in V$
- 3) $M + N = N + M$ $\forall M, N \in V$
- 4) $(M + N) + P = N + (M + P)$ $\forall M, N, P \in V$
- 5) $\exists O \in V$ tal que $M + O = M$ $\forall M \in V$
- 6) Para cada $M \in V$ existe $-M \in V$ tal que $-M + M = O$
- 7) $r \cdot M \in V$ $\forall r \in \mathbb{R} \quad \forall M \in V$
- 8) $1 \cdot M = M$ $\forall M \in V$
- 9) $r \cdot (M + N) = r \cdot M + r \cdot N$ $\forall r \in \mathbb{R} \quad \forall M, N \in V$
- 10) $(r + s) \cdot M = r \cdot M + s \cdot M$ $\forall r, s \in \mathbb{R} \quad \forall M \in V$
- 11) $(r \cdot s) \cdot M = r \cdot (s \cdot M)$ $\forall r, s \in \mathbb{R} \quad \forall M \in V$

Observação: Se $(V, +, \cdot)$ é um Espaço Vetorial Real, então:

- a) os elementos de V são ditos VETORES;
- b) o elemento O é dito VETOR ZERO;
- c) Se na definição acima, ao invés de termos como escalares, números reais, tivermos números complexos, V será um ESPAÇO VETORIAL COMPLEXO.

Exemplo 1: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, onde $+$ e $\cdot$ são a soma e multiplicação usuais em $\mathbb{R}$, é um espaço vetorial.

Exemplo 2: $(M_{3 \times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, onde $+$ e $\cdot$ são operações usuais em matrizes, é um espaço vetorial onde

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad -M = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \\ -e & -f \end{bmatrix} \quad \text{se} \quad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: Prove que $V = \mathbb{R}^2$ com as operações: $M+N = (a+u, b+w)$ e $r.M = (ra, rb)$ é um espaço vetorial.

Solução:

Para os vetores M, N, P e escalar r , devemos verificar se as 11 propriedades acima são válidas.

1) $\mathbb{R}^2 \neq \emptyset$, pois $(1,2) \in \mathbb{R}^2$

Sejam $M = (a, b)$, $N = (u, w)$, $P = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}$.

2) $M + N = (a+u, b+w) \in \mathbb{R}^2$, pois $a+u \in \mathbb{R}$ e $b+w \in \mathbb{R}$

3) $M + N = (a+u, b+w) = (u+a, w+b) = (u, w) + (a, b) = N + M$

4) $(M + N) + P = (a+u, b+w) + (c, d) = (a+u+c, b+w+d) = (a, b) + (u+c, w+d) = M + (N + P)$

5) $M + O = (a, b) + (0, 0) = (a, b) = M$ sendo $O = (0, 0)$

6) $M + (-M) = (a, b) + (-a, -b) = (a-a, b-b) = (0, 0) = O$

7) $r.M = r.(a, b) = (r.a, r.b) \in \mathbb{R}^2$, pois $r.a \in \mathbb{R}$ e $r.b \in \mathbb{R}$

8) $1.M = 1.(a, b) = (a, b) = M$

9) $r.(M + N) = r.(a+u, b+w) = (r.(a+u), r.(b+w)) = (ra+ru, rb+rw) = (ra, rb) + (ru, rw) = r(a, b) + r(u, w) = r.M + r.N$

$$10)(r+s).M = (r+s).(a,b) = ((r+s).a, (r+s).b) = (ra+sa, rb+sb) = (ra,rb) + (sa,sb) = r.(a,b) + s.(a,b) = r.M + s.M$$

$$11)(r.s).M = (r.s).(a,b) = ((r.s).a, (r.s).b) = (r.s.a, r.s.b) = (r.(s.a), r.(s.b)) = r.(s.(a,b)) = r.(s.M)$$

Logo, $\mathbb{R}^2$ com as operações acima é um espaço vetorial

12.1 SUBESPAÇOS VETORIAIS

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial e seja $W \subseteq V$. Se $(W, +, \cdot)$ satisfaz:

$$1) W \neq \emptyset$$

$$2) A+B \in W \quad \forall A, B \in W$$

$$3) r.A \in W \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad \forall A \in W$$

então W é um SUBESPAÇO de V .

Observação: Se $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial então:

a) $W = V$ é um subespaço de V ;

b) $W = \{O\}$ é um subespaço de V ;

Exemplo 4: Prove que $W = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u+v = 0\}$, ou seja, $W = \{(u,-u) : u \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

$$1) W \neq \emptyset, \text{ pois } (2, -2) \in W$$

Sejam $u = (x, -x)$, $v = (y, -y) \in W$ e $r \in \mathbb{R}$

$$2) u+v = (x,-x)+(y,-y) = (x+y,-x-y) = ((x+y), -(x+y)) \in W$$

$$3) r.A = r.(x, -x) = (rx, -rx) = (rx, -(rx)) \in W$$

Logo, W é subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

12.2 COMBINAÇÃO LINEAR

Sejam $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial e sejam $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Qualquer vetor $v \in V$ do formato $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ (onde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$) é dito COMBINAÇÃO LINEAR dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Exemplo 5: Escreva o vetor $v = (1, -2, 5)$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$ e $v_3 = (2, -1, 1)$.

Solução:

Queremos expressar v como $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$, onde a_1, a_2, a_3 são escalares a determinar. Sendo assim, temos:

$$(1, -2, 5) = a_1.(1, 1, 1) + a_2.(1, 2, 3) + a_3.(2, -1, 1)$$

$$(1, -2, 5) = (a_1, a_1, a_1) + (a_2, 2a_2, 3a_2) + (2a_3, -a_3, a_3)$$

$$(1, -2, 5) = (a_1 + a_2 + 2a_3, a_1 + 2a_2 - a_3, a_1 + 3a_2 + a_3)$$

Igualando os vetores, encontramos o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 1 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = -2 \\ a_1 + 3a_2 + a_3 = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{matriz ampliada}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{matriz ampliada escalonada}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 1 \\ 0 + a_2 - 3a_3 = -3 \\ 0 + 0 + a_3 = 2 \end{cases}$, por substituição, encontrado depois do escalonamento, temos : $a_1 = -6, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2$

Portanto, $\mathbf{v} = -6\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$.

Exemplo 6: É possível escrever a matriz $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solução: $E = a_1.A + a_2.B + a_3.C$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a_3 \\ 0 & -a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_1 + 2a_3 \\ a_1 + a_2 & a_2 - a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ -a_1 + 2a_3 = 1 \\ a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 - a_3 = -1 \end{cases}$$

Sistema impossível! Portanto, a matriz E não pode ser escrita como combinação linear das matrizes A, B e C .

12.3 SUBESPAÇO GERADO E GERADORES

O subespaço gerado por um subconjunto NÃO VAZIO S de um espaço vetorial V ($S \subset V \wedge S \neq \emptyset$) é o conjunto de todas as combinações lineares em S .

Exemplo 7: Mostre que os vetores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$ geram $\mathbb{R}^3$.

Solução:

Precisamos mostrar que um vetor arbitrário $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

$$(x, y, z) = a_1.\vec{u} + a_2.\vec{v} + a_3.\vec{w}$$

$$(x, y, z) = a_1.(1, 2, 3) + a_2.(0, 1, 2) + a_3.(0, 0, 1)$$

$$(x, y, z) = (a_1, 2a_1, 3a_1) + (0, a_2, 2a_2) + (0, 0, a_3)$$

$$(x, y, z) = (a_1, 2a_1 + a_2, 3a_1 + 2a_2 + a_3)$$

Igualando os vetores, temos:

$$\begin{cases} a_1 = x \\ 2a_1 + a_2 = y \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_3 + 2a_2 + 3a_1 = z \\ a_2 + 2a_1 = y \\ a_1 = x \end{cases} \xrightarrow{\text{matriz ampliada e escalonada}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & z \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Podemos verificar que o sistema é possível e temos como solução: $a_1 = x$, $a_2 = y - 2x$ e $a_3 = x - 2y + z$

Logo, os vetores **u**, **v** e **w** geram $\mathbb{R}^3$

12.4 DEPENDÊNCIA LINEAR

Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ pertencentes ao espaço V , são ditos **Linearmente Dependente** (L.D) ou simplesmente **Dependentes** se existir escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ pertencentes aos $\mathbb{R}$, **nem todos nulos**, tais que:

$$a_1.v_1 + a_2.v_2 + \dots + a_n.v_n = \mathbf{0} \quad (\text{combinação linear deles igual a zero})$$

Do contrário, quando todos os escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ são **nulos**, dizemos que os vetores são **Linearmente Independentes** (L.I).

Dica: Para determinar os escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ é necessário avaliar um sistema homogêneo, ou seja, verificar se o sistema é:

- a) S.P.D. então os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são L.I.
- b) S.P.I. então os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são L.D.

Exemplo 8: Determine se os vetores $(1, -2, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(7, -4, 1) \in \mathbb{R}^3$ é linearmente dependentes ou não.

Solução:

Fazer uma combinação linear dos vetores igual ao vetor nulo, usando incógnitas escalares a_1, a_2, a_3 .

$$\begin{aligned} a_1(1, -2, 1) + a_2(2, 1, -1) + a_3(7, -4, 1) &= (0, 0, 0) \\ (a_1, -2a_1, a_1) + (2a_2, a_2, -a_2) + (7a_3, -4a_3, a_3) &= (0, 0, 0) \\ (a_1 + 2a_2 + 7a_3, -2a_1 + a_2 - 4a_3, a_1 - a_2 + a_3) &= (0, 0, 0) \\ \begin{cases} a_1 + 2a_2 + 7a_3 = 0 \\ -2a_1 + a_2 - 4a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 \end{cases} &\xrightarrow{\text{matriz ampliada}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{matriz ampliada e escalonada}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{PC} &= \text{PA} = 2 \\ \text{GL} &= 3 - 2 = 1 \end{aligned} \right\} \text{Sistema Possível e Indeterminado (S.P.I.)}$$

Logo, os vetores $(1, -2, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(7, -4, 1) \in \mathbb{R}^3$ são LINEARMENTE DEPENDENTES.

Exemplo 9: Seja V o espaço vetorial das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$. Determine se as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V \text{ são dependentes.}$$

Solução:

Fazer uma combinação linear das matrizes A, B e C igual a matriz nula, usando incógnitas escalares

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1, a_2, a_3 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & a_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_3 \\ a_1 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 0a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$$

Como o sistema é Possível e Determinado (S.P. D.),

As matrizes A, B e C são LINEARMENTE INDEPENDENTES.

Observações:

- O conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é chamada *dependente* ou *independente* se os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são dependentes ou independentes. Também definimos que o conjunto vazio $\emptyset$ é *independente*.
- Se dois dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são iguais, digamos $v_1 = v_2$, então os vetores são *dependentes*. Pois $v_1 - v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n = 0$ e o coeficiente de v_1 *não é zero*.
- Dois vetores v_1 e v_2 são *dependentes* se, e somente se, um deles é *múltiplo* de outro.
- Um conjunto que contém um subconjunto dependente é também dependente. Portanto, qualquer subconjunto independente é independente.
- No espaço real $\mathbb{R}^3$ a dependência de vetores pode ser descrita geometricamente como segue: dois vetores quaisquer u e v são dependentes se, e somente se, estão na mesma reta passando pela origem; três vetores quaisquer u , v e w são dependentes se, e somente se, estão no mesmo plano passando pela origem.

Lista de Exercícios 19:

- Escreva o vetor $\mathbf{v} = (2, -5, 3)$ em $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -3, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, -5, 7)$.
- Para qual valor de k o vetor $\mathbf{u} = (1, -2, k)$ de $\mathbb{R}^3$, será combinação linear dos vetores $\mathbf{v} = (3, 0, 2)$ e $\mathbf{w} = (2, -1, -5)$?
- Considere os vetores $\mathbf{u} = (1, -3, 2)$ e $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$ em $\mathbb{R}^3$:
 - Escreva $(1, 7, -4)$ como combinação linear de u e v .
 - Para que valores de k $(1, k, 5)$ é uma combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$?
- Mostre que $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(0, 1, -1)$ geram $\mathbb{R}^3$, isto é, que qualquer vetor (x, y, z) é combinação linear dos vetores dados.
- Encontre condições em x, y, z de modo que $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertença ao espaço gerado por $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ e $\mathbf{w} = (0, 3, -4)$.
- Qual dos conjuntos de vetores abaixo de $\mathbb{R}^4$ são Linearmente Dependentes? No caso dos vetores que forem L.D. escreva um dos vetores como uma combinação linear dos restantes.

- a) $\mathbf{v}_1=(1,1,2,1)$, $\mathbf{v}_2=(1,0,0,2)$, $\mathbf{v}_3=(4,6,8,6)$, $\mathbf{v}_4=(0,3,2,1)$
 b) $\mathbf{v}_1=(1,1,1,1)$, $\mathbf{v}_2=(2,3,1,2)$, $\mathbf{v}_3=(3,1,2,1)$, $\mathbf{v}_4=(2,2,1,1)$

7) Mostre que o plano yz $W = \{(0,b,c)\}$ em $\mathbb{R}^3$ é gerado por

- a) $(0, 1, 1)$ e $(0, 2, -1)$
 b) $(0, 1, 2)$, $(0, 2, 3)$ e $(0, 3, 1)$

8) Determine se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente dependentes onde:

- a) $\mathbf{u} = (1,0,0)$, $\mathbf{v} = (0,0,-3)$
 b) $u = t^3 + 3t + 4$ $v = t^3 + 4t + 3$

9) Determine se as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ são L.I. ou L.D.

Respostas:

1. não é possível
2. $k = -12$
3. a) $-3u + 2v$ b) $k = -8$
4. $a_1 = x$ $a_2 = \frac{-2x + y + z}{2}$ $a_3 = \frac{y - z}{2}$
5. $2x - 4y - 3z = 0$
6. a) L. D. $V_3 = 3V_1 + V_2 + V_4$ b) L. I.
7. a) $a_1 = \frac{y + 2z}{3}$ $a_2 = \frac{y - z}{3}$ b) não gera
8. a) não b) não
9. L.I

12.5 BASE

Uma base de V é a sequência de vetores $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ que são vetores **Linearmente Independentes** (L.I.) e que **geram** V .

Observações:

- a) Os vetores $\mathbf{e}_1=(1, 0)$ e $\mathbf{e}_2=(0,1)$ formam uma base para $\mathbb{R}^2$, os vetores $\mathbf{e}_1=(1,0, 0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1, 0)$ e $\mathbf{e}_3=(0, 0, 1)$ formam base para $\mathbb{R}^3$ e, em geral os vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$. Cada um desses conjuntos de vetores é chamado de uma **base natural** ou **canônica** de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente.
- b) Embora um espaço vetorial tenha muitas bases, todas elas têm um mesmo número de vetores.

Exemplo 10: Determine se os vetores $\mathbf{u} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = (1,2,3)$ e $\mathbf{w} = (2,-1,1)$ formam base do espaço $\mathbb{R}^3$.

Solução:

- 1^o) verificar se os vetores são geradores

$$\begin{aligned}
a_1(1,1,1) + a_2(1,2,3) + a_3(2,-1,1) &= (x, y, z) \\
(a_1, a_1, a_1) + (a_2, 2a_2, 3a_2) + (2a_3, -a_3, a_3) &= (x, y, z) \\
(a_1 + a_2 + 2a_3, a_1 + 2a_2 - a_3, a_1 + 3a_2 + a_3) &= (x, y, z)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = x \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = y \\ a_1 + 3a_2 + a_3 = z \end{cases} \xrightarrow{\text{matriz ampliada}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & -1 & y \\ 1 & 3 & 1 & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{matriz ampliada e escalonada}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x-2y+z}{5} \end{pmatrix}$$

Resolvendo por substituição, temos:

$$a_1 = x + y - z \quad a_2 = \frac{-2x - y + 3z}{5} \quad a_3 = \frac{x - 2y + z}{5}$$

Logo, como foi possível determinar os escalares a_1, a_2 e a_3 , os vetores u, v e w geram $\mathbb{R}^3$.

2º) verificar se os vetores são L.I.

$$\begin{aligned}
a_1(1,1,1) + a_2(1,2,3) + a_3(2,-1,1) &= (0,0,0) \\
(a_1, a_1, a_1) + (a_2, 2a_2, 3a_2) + (2a_3, -a_3, a_3) &= (0,0,0) \\
(a_1 + a_2 + 2a_3, a_1 + 2a_2 - a_3, a_1 + 3a_2 + a_3) &= (0,0,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{matriz ampliada}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{matriz ampliada e escalonada}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Discussão do sistema:

$$\left. \begin{aligned} P.C. &= P.A. = 3 \\ G.L. &= 3 - 3 = 0 \end{aligned} \right\} \text{Sistema Possível e Determinado} \rightarrow \text{Linearmente Independentes}$$

Portanto, os vetores $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,3)$ e $w = (2,-1,1)$ formam base do espaço $\mathbb{R}^3$.

12.6 DIMENSÃO

A dimensão de um espaço vetorial V , denotado $\dim V$, é o número de elementos de uma base V . Por exemplo, a dimensão de V para o exemplo anterior é $\dim V = 3$.

Observações:

- A dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2; a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3; e, em geral, a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n .
- A dimensão de um polinômio do 2º grau (P_2) é 3; a dimensão de um polinômio do 3º grau (P_3) é 4; e, em geral, a dimensão de um polinômio de grau n (P_n) é $n + 1$.
- A dimensão de $A_{2 \times 2}$ é 4; a dimensão de $A_{3 \times 2}$ é 6; a dimensão de $A_{5 \times 1}$ é 5; e, em geral, a dimensão de $A_{m \times n}$ é $m \times n$.

Dica: Seja V um espaço vetorial de dimensão n ($\dim V = n$) e $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto de n vetores em V . para verificar se os vetores de X formam uma base de V , basta verificar uma das duas condições;

- se os vetores de X geram V ;
- se os vetores de X são L. I.

Espaço Linha

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ uma matriz } m \times n. \text{ As linhas de } A, \begin{matrix} X_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ X_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \vdots \\ X_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{matrix}$$

consideradas como vetores em $\mathbb{R}^n$, geram um subespaço de $\mathbb{R}^n$ chamado **espaço - linha** de A.

Observações:

- Se A e B são duas matrizes $m \times n$ equivalentes por linhas, então os espaços - linha de A e B são iguais.
- Se escalonarmos uma matriz A encontrando uma matriz equivalente B, então os espaços - linha de A e B são iguais.
- Os vetores NÃO NULOS de uma matriz na forma escalonada são uma base para seu espaço - linha.
- A dimensão do espaço - linha de A é chamada de POSTO - LINHA de A.

Exemplo 1: Seja V o espaço das matrizes 2×2 sobre os R e seja W o subespaço gerado por

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } x_4 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Encontre uma base e a dimensão de W.}$$

Resolução: Como as matrizes são geradoras do subespaço W, para encontrar uma base é preciso encontrar quais dessas matrizes são L.I. Para isso, utilizaremos o processo de espaço - linha. Isto é, devemos ver cada matriz acima como uma linha em uma nova matriz, conforme esquema abaixo, após o escalonamento o posto resultante indicará o número de vetores, ou no caso, matrizes L.I.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & -5 & 7 \\ 1 & -7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{matriz ampliada escalonada}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Posto - Linha} = 2 \\ \dim A = \text{posto - linha} = 2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

é a base de W

Exemplo 2:

Encontre uma base para $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $X_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $X_2 = (-1, 1, -1, 0)$.

Resolução:

$$\begin{matrix} X_1 \rightarrow \\ X_2 \rightarrow \\ e_1 \rightarrow \\ e_2 \rightarrow \\ e_3 \rightarrow \\ e_4 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{matriz ampliada escalonada}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow X_1 \\ \leftarrow X_2 \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_4 \\ \leftarrow e_3 \\ \leftarrow e_2 \end{matrix}$$

A base para $\mathbb{R}^4$ são os vetores:
 X_1, X_2, e_1 e e_4

Observe que, além dos vetores X_1 e X_2 foram inseridos os vetores unitários e_1, e_2, e_3 e e_4 . Após o processo de escalonamento as posições relativas aos vetores e_2, e_3 foram zeradas ficando apenas as linhas relativas aos vetores X_1, X_2, e_1 e e_4 . Logo, uma base para este espaço vetorial é dado pelo conjunto formado destes vetores, isto é, $\{X_1, X_2, e_1, e_4\}$.

Lista de Exercícios 20:

- Quais dos seguintes conjuntos de vetores são base de $\mathbb{R}^2$?

- a) $(1, 3), (1, -1)$
 b) $(0, 0), (1, 2), (2, 4)$
 c) $(1, 2), (2, -3), (3, 2)$
 d) $(1, 3), (-2, -6)$
2. Considere o seguinte subconjunto de P_3 : (polinômio do 3º grau)
 $W = \{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1, t^3 - 2t, 2t^3 + 3t^2 - 4t + 3\}$. Ache uma base para o subespaço W .
 Determine a dimensão de W .
3. Ache uma base para $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{x}_2 = (0, 1, -1, 0)$.
4. Ache a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados pelos vetores:
 a) $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)$ e $(0, 1, 1, 1)$
 b) $(1, -1, 0, 2), (3, -1, 2, 1)$ e $(1, 0, 0, 1)$
 c) $(-2, 4, 6, 4), (0, 1, 2, 0), (-1, 2, 3, 2), (-3, 2, 5, 6)$ e $(-2, -1, 0, 4)$
 d) $(0, 0, 1, 1), (-1, 1, 1, 2), (1, 1, 0, 0)$ e $(2, 1, 2, 1)$
5. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são bases de P_3 (polinômio do 3º grau)
 a) $t^3 + 2t^2 + 3t, 2t^3 + 1, 6t^3 + 8t^2 + 6t + 4$ e $t^3 + 2t^2 + t + 1$
 b) $t^3 + t^2 + 1, t^3 - 1$ e $t^3 + t^2 + t$
6. Mostre que as matrizes $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ formam uma base para o espaço vetorial de todas as matrizes 2×2 .
7. Seja $X = \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \}$ em que $\mathbf{x}_1 = (1, 2, 2), \mathbf{x}_2 = (3, 2, 1), \mathbf{x}_3 = (11, 10, 7)$ e $\mathbf{x}_4 = (7, 6, 4)$.
 Ache uma base para o subespaço W de $\mathbb{R}^3$. Qual a dimensão de W ?

Respostas:

- 1.a) 2. $X = \{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1\}$ dim $W = 2$
 3. $X = \{x_1, x_2, e_1, e_4\}$ 4. a) dim $W = 4$ b) dim $W = 3$ c) dim $W = 3$ d) dim $W = 4$
 5. nenhum 7. $X = \{x_1, x_2\}$ dim $W = 2$

13 TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Sejam $(V, +, \cdot)$ e $(U, +, \cdot)$ espaços vetoriais.

Uma função $\begin{cases} T: V \rightarrow U \\ A \rightarrow T(A) \end{cases}$ é dita uma **Transformação Linear** ou **Operador Linear em V**

se:

- a) $T(A+B) = T(A) + T(B)$
 b) $T(r \cdot A) = r \cdot T(A) \quad \forall A, B \in V \text{ e } r \in \mathbb{R}$

Em outras palavras, $T: V \rightarrow U$ É LINEAR se "*preserva*" as duas operações básicas de um espaço vetorial, isto é, adição de vetores e multiplicação por escalar.

Observação: Se substituirmos r pelo escalar zero ($r = 0$) obtemos $T(0) = 0$. Isto é, toda transformação leva o vetor zero no vetor zero, mas *nem toda transformação que leva o vetor zero no vetor zero é linear*.

Exemplo 1: Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação "projeção" no plano xy : $F(x, y, z) = (x, y, 0)$. Mostraremos que F é linear.

Solução:

Seja $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

a) $F(A+B) = F(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, 0) = (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = F(A) + F(B)$

b) $F(r.A) = F(r.(x_1, y_1, z_1)) = F(r.x_1, r.y_1, r.z_1) = (r.x_1, r.y_1, 0) = r.(x_1, y_1, 0) = r.F(A)$, para todo $r \in \mathbb{R}$.

Logo, F é linear.

Exemplo 2: Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação "translação" definida por $F(x, y) = (x+1, y+2)$. Observe que $F(0) = (0,0) \neq (1,2) \neq 0$. Isto é, o vetor zero NÃO É transformado no vetor zero. Portanto F NÃO É LINEAR.

Exemplo 3: Seja $F : V \rightarrow U$ a transformação que associa o vetor 0 (zero) $\in U$ a todo $A \in V$. Então para qualquer $A, B \in V$ e qualquer $r \in \mathbb{R}$, temos:

a) $F(A+B) = 0 = 0+0 = F(A)+F(B)$

b) $F(r.A) = 0 = r.F(A)$

Assim, F é linear. Chamamos F a transformação zero e, usualmente, anotaremos 0.

Exemplo 4: Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a transformação linear para a qual $T(1,1) = 3$ e $T(0,1) = -2$. Encontre $T(x,y)$.

Solução:

Escrever (x,y) como combinação linear de $(1,1)$ e $(0,1)$, usando incógnitas escalares a_1 e a_2 .

$$(x, y) = a_1(1, 1) + a_2(0, 1) = (a_1, a_1) + (0, a_2) = (a_1, a_1 + a_2) \therefore a_1 = x \text{ e } a_2 = y - x$$

$$(x, y) = x(1, 1) + (y-x)(0, 1)$$

$$T(x, y) = T[x(1, 1) + (y-x)(0, 1)] = T(x(1, 1)) + T((y-x)(0, 1)) = xT(1, 1) + (y-x)T(0, 1) = x(3) + (y-x)(-2)$$

$$T(x, y) = 3x - 2y + 2x$$

$$T(x, y) = 5x - 2y$$

Lista de Exercícios 21:

1) Mostre que as seguintes transformações são lineares:

a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (x+y, x)$

b) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = 2x-3y+4z$

2) Mostre que as seguintes transformações não são lineares:

a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = xy$

b) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F(x,y) = (x+1, y, x+y)$

3) Encontre $T(x,y)$ onde $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definida por $T(1,2) = (3,-1, 5)$ e $T(0,1) = (2, 1, -1)$

4) Encontre $T(x,y,z)$ onde $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $T(1,1,1) = 3$, $T(0,1,-2) = 1$ e $T(0,0,1) = -2$

Respostas:

2a) $F(A+B) \neq F(A)+F(B)$

2b) $F(0,0) = (1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$

$$3) T(x, y) = (-x + 2y, -3x + y, 7x - y)$$

$$4) T(x, y, z) = 8x - 3y - 2z$$

13.1 TRANSFORMAÇÕES LINEARES E MATRIZES

Seja A uma matriz $m \times n$, definimos: $T_A : R^n \rightarrow R^m$ onde v é tomado como vetor coluna $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
 $v \rightarrow A \cdot v$

Logo, $T_A(v) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$. Utilizando operações com matrizes temos:

$$T_A(u+v) = A(u+v) = Au + Av = T_A(u) + T_A(v) \quad \text{e} \quad T_A(ku) = k(Au) = kT_A(u).$$

Logo T_A é uma transformação linear.

Exemplo 5: Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Então, } L_A(x_1, x_2) = (2x_1, 0, x_1 + x_2).$$

13.2 TRANSFORMAÇÕES DO PLANO NO PLANO

O que iremos apresentar é uma visão geométrica das transformações lineares, trabalhando com transformações do plano ($\mathbb{R}^2$) no plano ($\mathbb{R}^2$), pois todas tem a forma $T_A : R^n \rightarrow R^m$, onde A é
 $v \rightarrow A \cdot v$

uma matriz de ordem $m \times n$ e v é o vetor coluna $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$.

Exemplo 6: Dada a função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$v \rightarrow \alpha \cdot v$$

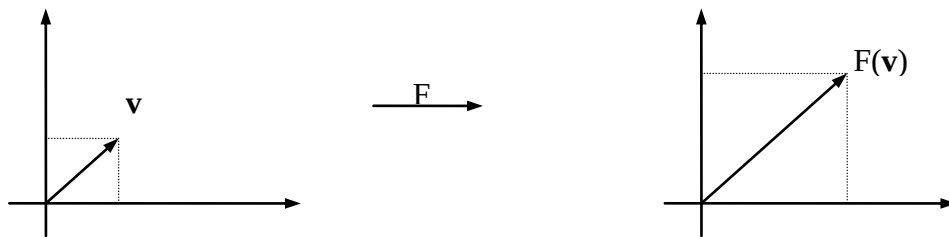
a) Expresse graficamente essa função quando $\alpha = 2$, denominada **Expansão**

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v \rightarrow 2 \cdot v,$$

ou seja, $T(x, y) = 2(x, y)$.

Esta função leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e sentido de v , mas de módulo maior.



b) Expresse – a na forma de vetores coluna:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{bmatrix}$$

c) Verifique se F é uma Transformação Linear.

$$F_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{Como } \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Se tomássemos $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)$, F seria uma **contração**.

Exemplo 7: (outra solução para o exemplo 4) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a transformação linear para a qual $T(1,1) = 3$ e $T(0,1) = -2$. Encontre $T(x,y)$.

Resolução: (Matricial)

$$T(1,1) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$T(0,1) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2$$

$$1a + 1b = 3$$

$$0a + 1b = -2$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ b = -2 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Para um vetor qualquer $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ usando a matriz de transformação $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ a transformação é dada por:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [5x - 2y]$$

Logo, $T(x,y) = (5x - 2y)$

Exemplo 8: Encontre uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que: $T(1, 2) = (3, -1)$ e $T(0, 1) = (1, 2)$.

Resolução 1: (usando linearidade) Escrevendo (x, y) como combinação linear de $(1, 2)$ e $(0, 1)$.
Temos:

$(x, y) = x(1, 2) + (y - 2x)(0, 1)$. Deste modo, a transformação T deve satisfazer

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(x(1, 2) + (y - 2x)(0, 1)) = xT(1, 2) + (y - 2x)T(0, 1) \\ &= x(3, -1) + (y - 2x)(1, 2) = (x + y, 2y - 5x). \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que a transformação T definida como acima, isto é, $T(x, y) = (x + y, 2y - 5x)$.

Resolução 2: (usando matrizes)

$T(1, 2) = (3, -1)$ e $T(0, 1) = (1, 2)$.

$$\begin{aligned} T(1, 2) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} & T(0, 1) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{cases} 1a + 2b = 3 \\ 1c + 2d = -1 \end{cases} & & \begin{cases} 0a + 1b = 1 \\ 0c + 1d = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Juntando as equações para as mesmas variáveis temos:

$$\begin{cases} 1a + 2b = 3 \\ 0a + 1b = 1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{logo } a=1 \text{ e } b=1$$

$$\begin{cases} 1c + 2d = -1 \\ 0c + 1d = 2 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{logo } c=-5 \text{ e } d=2$$

Para um vetor qualquer $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ usando a matriz de transformação $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ então,

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ -5x+2y \end{bmatrix}$$

Logo, $T(x, y) = (x + y, 2y - 5x)$.

Obs:

Perceba que a matriz de coeficientes em ambos os sistemas é igual, logo poderíamos resolver esses sistemas de uma única vez, isto é:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e por fim $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, que é a transposta da submatriz presente na matriz aumentada única.

Lista de Exercícios 22:

1) Dada a função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \rightarrow (x, -y)$$

- Expresse graficamente essa **reflexão em torno do eixo X**.
- Expresse-a na forma de vetores-coluna.
- Verifique se F é uma transformação linear.

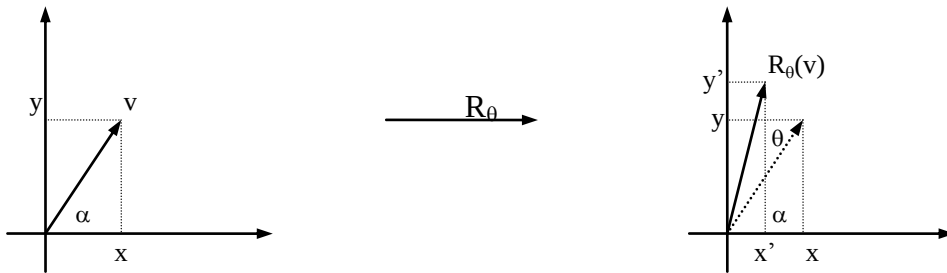
2) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$v \rightarrow -v,$$

ou seja, $T(x, y) = (-x, -y)$.

- Expresse graficamente essa **reflexão na origem**.
- Expresse-a na forma de vetores-coluna.
- Verifique se T é uma transformação linear.

3) **Rotação em um ângulo θ (no sentido anti-horário)**



$$x' = r \cos(\alpha + \theta) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta$$

Mas $r \cos \alpha = x$ e $r \sin \alpha = y$. Então, $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$.

Analogamente, $\sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cdot \cos \theta + \cos \alpha \cdot \sin \theta$

$$y' = r \sin(\alpha + \theta) = y \cos \theta + x \sin \theta.$$

Logo, $R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta)$,

ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ y \cos \theta + x \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Considere o caso particular $\theta = \frac{\pi}{2}$:

- Expresse graficamente essa **rotação de 90°** no sentido anti-horário.

- b) Expresse-a na forma de vetores-coluna.
 c) Verifique se R_θ é uma transformação linear.

4) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(x,y) = (x+a, y+b)$$

- a) Expresse graficamente essa **translação** do plano segundo o vetor (a, b) .
 b) Expresse-a na forma matricial.
 c) Mostre que T não é linear, a menos que $a = b = 0$.

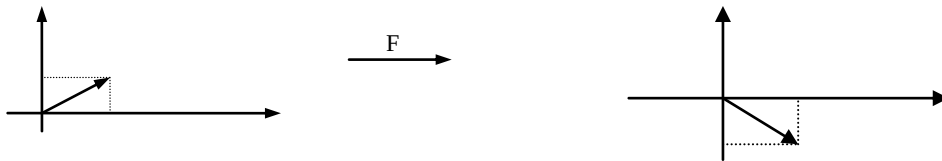
5) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(x, y) = (x+2y, y)$$

- a) Expresse graficamente esse **cisalhamento horizontal**
 b) Expresse-a na forma de vetores-coluna.
 c) Verifique se T é uma transformação linear.

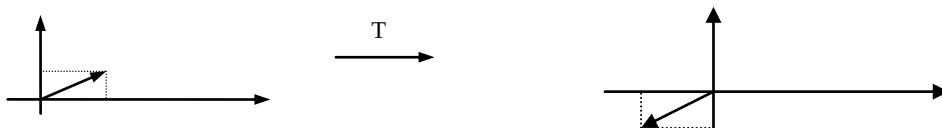
Respostas:

1. a)



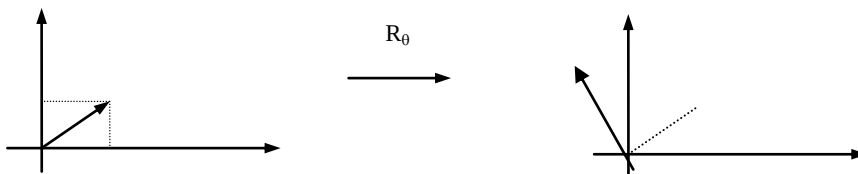
b) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y \end{bmatrix}$ c) Como $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação é linear.
 $v \rightarrow v \cdot A$

2. a)



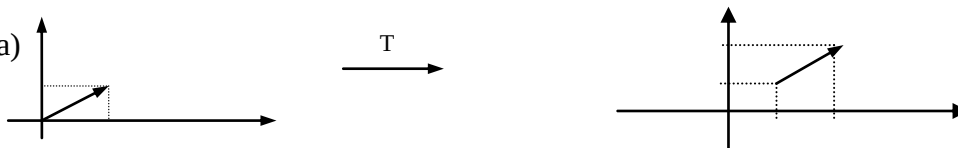
b) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -y \end{bmatrix}$ c) Como $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação é linear.
 $v \rightarrow v \cdot A$

3. a)

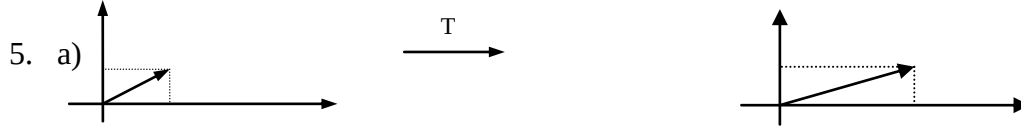


b) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & x \end{bmatrix}$ c) Como $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação é linear.
 $v \rightarrow v \cdot A$

4. a)



b) $[x \ y] \rightarrow [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + [a \ b] = [x+a \ y+b]$ c) Como $T(0,0) = (a,b) \neq (0,0)$ a transformação não é linear.



b) $[x \ y] \rightarrow [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = [x+2y \ y]$

c) Como $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação é linear.
 $v \rightarrow v.A$

13.3 NÚCLEO E IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Definição: Sejam V e W espaços vetoriais e seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear.

(i) O *núcleo* de T , denotado por $\text{Nu}(T)$, é o conjunto de todos os vetores de V que têm imagem nula.

$$\text{Nu}(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$$

Observação: O núcleo de T é também chamado *kernel* de T ($\ker(T)$).

(ii) A *imagem* de T , denotada por $\text{Im}(T)$, é o conjunto de todos os vetores $w \in W$ que são imagem dos vetores de V .

$$\text{Im}(T) = \{w \in W; w = T(v) \text{ para algum } v \in V\}.$$

Observação: $\text{Nu}(T)$ nunca é vazio, pois contém, pelo menos, o vetor nulo do espaço domínio.

De fato, $T(0) = 0$, pois T linear. Assim, $0 \in \text{Nu}(T)$.

Note que $T(0_V) = 0_W$, onde 0_V e 0_W indicam o vetor nulo de V e W , respectivamente.

Propriedades do Núcleo e da Imagem.

Se $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear então:

Propriedade 1. $\text{Nu}(T)$ é um subespaço vetorial de V ;

Propriedade 2. $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de W .

Exemplo 7: Núcleo e imagem da transformação nula,

$$T: V \rightarrow W; T(v) = 0.$$

a) Núcleo de T :

Pela definição, os vetores que pertencem ao núcleo de uma transformação são os que têm o vetor nulo como imagem. Considerando a transformação T dada, qualquer vetor $\mathbf{v} \in V$ tem como imagem o vetor $\mathbf{0} \in W$. Dessa forma,

$$\text{Nu}(T) = V$$

b) Imagem de T :

Se todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ tem como imagem o vetor nulo, então ele é o único vetor que pertence à imagem de T . Assim,

$$\text{Im}(T) = \{\mathbf{0}\}. \blacklozenge$$

Exemplo 8: Núcleo e imagem da transformação identidade

$$T: V \rightarrow V; T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

a) Núcleo de T :

A transformação identidade caracteriza-se pelo fato de que a imagem de cada vetor $\mathbf{v} \in V$ (domínio) é o próprio vetor $\mathbf{v} \in V$ (contra-domínio). Ainda, como o núcleo contém todos os vetores de V cuja imagem é o vetor nulo, temos que o único vetor pertencente ao núcleo de T é o vetor $\mathbf{0}$, ou seja

$$\text{Nu}(T) = \{\mathbf{0}\};$$

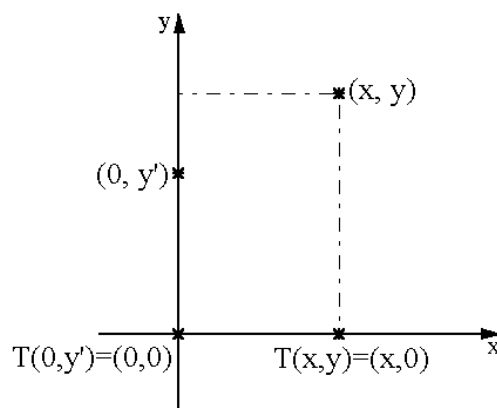
b) Imagem de T :

Como todo vetor $\mathbf{v} \in V$ é imagem de si mesmo, temos

$$\text{Im}(T) = V. \blacklozenge$$

Exemplo 9: Núcleo e imagem do operador projeção:

$$T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; T_1(x, y) = (x, 0)$$



$$* \text{Nu}(T_1) = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$$

* Uma base do $\text{Nu}(T_1)$: $\beta = \{(0, 1)\}$,
pois $(0, y) = y(0, 1)$

$$* \dim \text{Nu}(T_1) = 1$$

$$* \text{Im}(T_1) = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$$

* Uma base da $\text{Im}(T_1)$: $\beta = \{(1, 0)\}$,
pois $(x, 0) = x(1, 0)$

$$* \dim \text{Im}(T_1) = 1$$

Observação: Outra propriedade, que não demonstraremos aqui, mas que pode ser útil na conferência de resultados é a seguinte:

Se $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear então

$$\dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim V$$

Confira esse resultado nos exemplos anteriores.

Exemplo 10: Seja $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \text{Im}(L)?$

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \in \text{Im}(L)?$

c) Encontre $\text{Im}(L)$.

d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{Nu}(L)?$

e) Encontre $\text{Nu}(L)$.

Solução:

a) Temos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ x+y+2z \\ x+2y+2z \end{bmatrix}$ como o vetor genérico de $\text{Im}(L)$.

Se $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \text{Im}(L)$, então $\begin{bmatrix} x+z \\ x+y+2z \\ x+2y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ para algum x, y, z . Resolvendo a equação obtemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Logo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \text{Im}(L)$ pois existe $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tal que $L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

b) Do mesmo modo, se $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \in \text{Im}(L)$, então $\begin{bmatrix} x+z \\ x+y+2z \\ x+2y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix}.$

Assim, $L\left(\begin{bmatrix} -6 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \in \text{Im}(L).$

c) O vetor genérico da $\text{Im}(L)$ $\begin{bmatrix} x+z \\ x+y+2z \\ x+2y+2z \end{bmatrix}$ pode ser escrito assim: $x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Portanto, $\text{Im}(L) = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3]$, onde $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Além disso, os vetores geradores de $\text{Im}(L)$ são l.i. (verifique), e, portanto, $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $\text{Im}(L)$. Sendo essa base de $\text{Im}(L)$ um conjunto de 3 vetores l.i. do $\mathbb{R}^3$, temos que $\text{Im}(L) = \mathbb{R}^3$.

d) $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$

Como $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, concluímos que $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \text{Nu}(L).$

e) Sabendo que $\mathbf{v} \in \text{Nu}(L)$ se e somente se $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, temos que $\begin{bmatrix} x+z \\ x+y+2z \\ x+2y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, cuja única

solução é o vetor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Assim, $\text{Nu}(L) = \{\mathbf{0}\}.$ ♦

Exemplo 11: Seja $L: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_1$; $L(at^2 + bt + c) = (a+b)t + (b+c).$

a) $2t + 2 \in \text{Im}(L)?$

b) $t^2 - t + 1 \in \text{Nu}(L)?$

c) Encontre uma base para $\text{Im}(L)$;

d) Encontre uma base para $\text{Nu}(L).$

Solução:

a) $2t + 2 \in \text{Im}(L) \Rightarrow \exists p(t) = at^2 + bt + c$ tal que $L[p(t)] = 2t + 2$
 $\Rightarrow (a+b)t + (b+c) = 2t + 2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ b+c=2 \end{cases} \\ &\Rightarrow a=c \text{ e } b=2-c \end{aligned}$$

Portanto, $2t+2 \in \text{Im}(L)$, pois $L(ct^2 + (2-c)t + c) = 2t+2, \forall c \in \mathbb{R}$.

b) Devemos verificar se $L(t^2 - t + 1) = \mathbf{0}$.

$L(t^2 - t + 1) = (1-1)t + (-1+1) = 0t + 0 = \mathbf{0}$, portanto $t^2 - t + 1 \in \text{Nu}(L)$.

c) Sendo $L[p(t)] = (a+b)t + (b+c)$, vamos associar o vetor $(a+b, b+c)$ ao polinômio $L[p(t)]$.

Assim, o vetor genérico da imagem é $(a+b, b+c) = a(1, 0) + b(1, 1) + c(0, 1)$. Buscando os vetores l.i. no conjunto gerador $\{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ obtemos $\{(1, 0), (0, 1)\}$ como um conjunto gerador l.i.

Associando, a cada um desses vetores, um polinômio $p(t)$, temos que $\beta_1 = \{t, 1\}$, é uma base de $\text{Im}(L)$. Outra base de $\text{Im}(L)$ poderia ser, por exemplo, $\beta_1' = \{t, t+1\}$.

d) Sabemos que $p(t) \in \text{Nu}(L)$ se e somente se $L[p(t)] = \mathbf{0}$.

Dessa forma, $L[p(t)] = L(at^2 + bt + c) = (a+b)t + (b+c) = \mathbf{0}$. Ou seja, $(a+b)t + (b+c) = 0t + 0$; o que nos permite escrever o sistema $\begin{cases} a+c=0 \\ b+c=0 \end{cases}$ cuja solução é $a = -b$ e $c = -b$.

Portanto, $L(-bt^2 + bt - b) = \mathbf{0}, \forall b \in \mathbb{R}$.

Para obter uma base do $\text{Nu}(L)$ associamos o polinômio $p(t) = at^2 + bt + c$ ao vetor $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Então, $\mathbf{v} \in \text{Nu}(L)$ se e somente se $\mathbf{v} = (-b, b, -b)$, que é o vetor genérico do subespaço $\text{Nu}(L)$ e, de $(-b, b, -b) = b(-1, 1, -1)$ e podemos afirmar que $\text{Nu}(L) = [(-1, 1, -1)]$. Como o conjunto gerador é l.i., uma base de $\text{Nu}(L)$ é $\beta_2 = \{-t^2 + t - 1\}$.

Exemplo 12: Seja $L: M_{22} \rightarrow M_{22}$ a transformação linear definida por

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\dim \text{Nu}(L) + \dim \text{Im}(L) = \dim M_{22}$.

Solução:

• $\text{Nu}(L)$:

Se $\mathbf{A}$ é um vetor do núcleo de L , temos $L(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Assim,

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a=0 \text{ e } c=0.$$

Logo, o vetor genérico do subespaço $\text{Nu}(L)$ é $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ e $\dim \text{Nu}(L) = 2$, pois $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right\}$, com b e d não nulos, é uma base de $\text{Nu}(L)$;

• $\text{Im}(L)$:

O vetor genérico do subespaço $\text{Im}(L)$ é $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$ e uma base para $\text{Im}(L)$ é $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right\}$, para $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Logo, $\dim \text{Im}(L) = 2$.

7. Encontre o subespaço imagem da transformação linear $T(x, y, z) = (x + y - z, x + y, y + z)$.

Respostas:

1 a) $(0, 2) \in \text{Nu}(T)$

b) $(2, 2) \notin \text{Nu}(T)$

c) $(3, 0) \in \text{Im}(T)$

d) $(3, 2) \notin \text{Im}(T)$

e) $\text{Nu}(T) = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$

f) $\text{Im}(T) = \{(a, 0); a \in \mathbb{R}\}$.

2 a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \notin \text{Nu}(L)$

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Nu}(L)$

c) $\mathbf{w} \in \text{Im}(L) \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 3-2y$

Logo, $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \in \text{Im}(L)$.

d) $\begin{bmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y = 2 \\ 2x+4y = 3 \end{cases}$

que é um sistema impossível, portanto

$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \notin \text{Im}(L)$.

e) Núcleo:

$\begin{bmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -2y \quad \therefore \text{Nu}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix}; y \in \mathbb{R} \right\}.$

Imagem:

$\begin{bmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, ou seja, $\text{Im}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & b \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & b-2a \end{bmatrix}$ Assim, $b-2a = 0 \Rightarrow b = 2a$. $\therefore \text{Im}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\}.$

f) Uma base para $\text{Nu}(L)$: $\beta_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e uma base para $\text{Im}(L)$: $\beta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

3. a) $\mathbf{v}_1 \in \text{Nu}(f)$; $\mathbf{v}_2 \notin \text{Nu}(f)$; $\mathbf{v}_3 \in \text{Nu}(f)$.

b) $\text{Nu}(f) = \{(w, -w, -w, w); w \in \mathbb{R}\}$

c) $\text{Im}(f) = [(1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)] = \mathbb{R}^3$; $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ podem ser quaisquer vetores do $\mathbb{R}^3$.

d) $\dim \text{Nu}(f) = 1$ e $\dim \text{Im}(f) = 3$. Temos $\dim \text{Nu}(f) + \dim \text{Im}(f) = 1 + 3 = 4 = \dim V$.

4. a) $L(t^3 + t^2 + t - 1) = (1, -1)t^3 + (1 + 1)t = 2t$
 $\therefore t^3 + t^2 + t - 1 \notin \text{Nu}(L)$

b) $L(t^3 - t^2 + t - 1) = (1 + 1)t^3 + (1 + 1)t = 2t^3 + 2t$
 $\therefore t^3 - t^2 + t - 1 \notin \text{Nu}(L)$

c) $L(at^3 + bt^2 + ct + d) = 3t^3 - t \Rightarrow (a-b)t^3 + (c-d)t = 3t^3 - t \Rightarrow$
 $\begin{cases} a-b=3 \\ c-d=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3+b \\ c=d-1 \end{cases}$
 $\therefore 3t^3 - t \in \text{Im}(L).$

d) Núcleo:

$$L(at^3 + bt^2 + ct + d) = 0 \Rightarrow (a-b)t^3 + (c-d)t = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ c-d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix}$$

$$\therefore \text{Nu}(L) = \{bt^3 + bt^2 + dt + d; b, d \in \mathbb{R}\} \text{ e uma base para Nu}(L) \text{ é } \beta_1 = \{t^3 + t^2, t + 1\}$$

Imagem:

$$(a-b)t^3 + (c-d)t = at^3 + (-b)t^3 + ct + (-d)t, \text{ ou seja,}$$

$$a(1, 0, 0, 0) + b(-1, 0, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 0, -1, 0).$$

Assim, $\text{Im}(L) = [(1, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, -1, 0)]$ e uma base para

$$\text{Im}(L) \text{ é } \beta_2 = \{t^3, t\}.$$

5. Apenas $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Nu}(T)$. Escolha dois vetores quaisquer de M_{22} e calcule suas imagens, através de T , para encontrar dois vetores pertencentes à imagem de T .

$$6. \text{ a) } \dim \text{Im}(L) = 2 \quad \text{b) } \dim \text{Nu}(L) = 1 \quad 7. \text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$$

14 AUTOVALOR E AUTOVETOR DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Dado um operador linear $T: V \rightarrow V$, estaremos interessados, nesse capítulo, em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo, isto é, procuraremos um vetor $\mathbf{v} \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}. \quad (I)$$

Neste caso $T(\mathbf{v})$ será um vetor de mesma “direção” que $\mathbf{v}$, ou melhor, $T(\mathbf{v})$ e $\mathbf{v}$ estão sobre a mesma reta suporte.

Como $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ satisfaz a equação (I) para todo λ , estaremos interessados em determinar $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ que satisfaça a condição acima. Tentaremos elucidar o exposto através dos exemplos que seguem.

Exemplo 1: $\mathbb{I}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (aplicação identidade)
 $(x, y) \mapsto (x, y)$

Neste caso, todo $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é tal que $\mathbb{I}(\mathbf{v}) = 1 \cdot \mathbf{v}$. ♦

Exemplo 2: $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (reflexão no eixo Ox)
 $(x, y) \mapsto (x, -y)$

Aqui, $\mathbf{u} = (x, 0)$ é tal que $T_1(\mathbf{u}) = 1 \cdot \mathbf{u}$ e $\mathbf{v} = (0, y)$ é tal que $T_1(\mathbf{v}) = -1 \cdot \mathbf{v}$. ♦

Ou seja, vetores que possuem uma componente nula são levados em um múltiplo de si mesmo.

Exemplo 3: $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / $T_2(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$.

$$\text{a) } T_2(5, 2) = (30, 12) = 6(5, 2)$$

$$\text{d) } T_2(10, 4) = (60, 24) = 6(10, 4)$$

$$\text{b) } T_2(2, 1) = (13, 5)$$

$$\text{e) } T_2(-5/2, -1) = (-15, -6) = 6(-5/2, -1)$$

$$\text{c) } T_2(-5, -2) = (-30, -12) = 6(-5, -2)$$

f) Quais vetores dos itens anteriores são levados por T_2 a um múltiplo de si mesmo? (a), (c),

(d) e (e). ♦

A fim de encontrarmos os vetores $\mathbf{v} \in V$ e os escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ citados em (I), bem como denominá-los, seguimos com a definição:

Definição: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Um vetor $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq 0$, é um *autovetor* de T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}.$$

O número real λ é denominado *autovalor* de T associado ao autovetor $\mathbf{v}$.

Exemplo 4: No exemplo 2, desse capítulo, um vetor do tipo $\mathbf{u} = (x, 0)$ é um autovetor de T_1 associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, pois $T_1(x, 0) = 1 \cdot (x, 0)$. Também é verdade que $\mathbf{v} = (0, y)$ é um autovetor de T_1 associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$, pois $T_1(0, y) = -1 \cdot (0, y)$. ♦

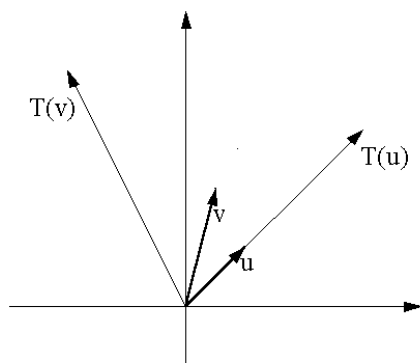
Observação: Sempre que um vetor $\mathbf{v}$ é autovetor de um operador linear T associado ao autovalor λ , isto, é $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, o vetor $k\mathbf{v}$, para qualquer real $k \neq 0$, é também um autovetor de T associado ao mesmo λ . De fato:

$$T(k\mathbf{v}) = k T(\mathbf{v}) = k \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (k\mathbf{v}).$$

Isto pode ser visto, por exemplo, nos itens (a), (c), (d) e (e) do exemplo 3.

É comum tomarmos um representante de cada conjunto de autovetores associados a um único valor de λ . Por exemplo, se temos $T(x, 0) = 1 \cdot (x, 0)$, isto é, $\mathbf{u} = (x, 0)$ é autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, tomamos $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$, ou outro, para representar o conjunto W , onde $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$.

A interpretação geométrica, em $\mathbb{R}^2$, de autovetores de um operador linear T é dada a seguir:



- $\mathbf{u}$ é autovetor de T pois $\exists \lambda \in \mathbb{R} / T(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$.
- $\mathbf{v}$ não é autovetor de T pois $\nexists \lambda \in \mathbb{R} / T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

14.1 DETERMINAÇÃO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES

Para determinar os autovalores e autovetores de um operador linear $T: V \rightarrow V$ usamos a sua representação matricial.

Seja $\mathbf{A}$ a matriz canônica de T , de forma que $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$. Então, autovalores λ de $\mathbf{A}$ e autovetores $\mathbf{v}_{\lambda}$ de V são soluções da equação $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$. Ou seja:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda \mathbf{I}\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0,$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de mesma ordem que $\mathbf{A}$. Observamos que a última equação, $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$, representa um sistema homogêneo, que é sempre compatível, cuja solução desejada, conforme definição, é a não-trivial, ou seja, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Assim, devemos ter o sistema em questão como compatível e indeterminado, de forma que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

As raízes da equação $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, chamada equação característica de $\mathbf{A}$ (ou de T), são os autovalores de $\mathbf{A}$ (ou de T). Para cada autovalor λ , corresponde um conjunto $W = \{\mathbf{v} \in V / \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$ de autovetores, que é obtido pela solução da equação $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ou, equivalentemente, da equação $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$.

TEOREMA: Se $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times n$, o sistema homogêneo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (*)$$

tem uma solução não-trivial se e somente se $\mathbf{A}$ é singular.

Demonstração: Suponha que $\mathbf{A}$ seja invertível. Então, $\mathbf{A}^{-1}$ existe e multiplicando ambos os lados de (*) por $\mathbf{A}^{-1}$, temos

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} \\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Portanto, a única solução para (*) é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

A demonstração da recíproca – se $\mathbf{A}$ é singular, então (*) tem uma solução não-trivial – é deixada como exercício.

Resumindo:

Sendo $\mathbf{A}$ a matriz canônica que representa um operador linear T , temos:

- *autovalores λ de T ou de $\mathbf{A}$:* são as raízes da equação $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$,
- *autovetores $\mathbf{v}$ de T ou de $\mathbf{A}$:* para cada λ , são as soluções da equação $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ou $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$.

Exemplo 5: Consideremos o operador linear definido anteriormente:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (4x + 5y, 2x + y)$$

- autovalores de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, matriz canônica de T .

Resolvemos a equação característica $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow (4 - \lambda)(1 - \lambda) - 10 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ e } \lambda_2 = 6.$$

- autovetores de $\mathbf{A}$ ou de T :

Para cada autovalor λ encontrado, resolvemos o sistema linear $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$:

$$\lambda_1 = -1; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 - (-1) & 5 \\ 2 & 1 - (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -y$$

Então, $\mathbf{v}_{\lambda_1} = (-y, y)$ sendo um de seus representantes o vetor $\mathbf{v}_1 = (-1, 1)$.

$$\lambda_2 = 6; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 - 6 & 5 \\ 2 & 1 - 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}y.$$

Então $\mathbf{v}_{\lambda_2} = (\frac{5}{2}y, y)$ sendo um de seus representantes o vetor $\mathbf{v}_2 = (\frac{5}{2}, 1)$.

Observe que:

$$T(\mathbf{v}_{\lambda_1}) = T(-y, y) = -1. (-y, y) \text{ e}$$

$$T(\mathbf{v}_{\lambda_2}) = T(\frac{5}{2}y, y) = 6. (\frac{5}{2}y, y). \quad \blacklozenge$$

Exemplo 6: Encontre os autovalores e autovetores para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

- equação característica: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3} - \lambda & -1 \\ 1 & \sqrt{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\sqrt{3} - \lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i$$

- autovalores de $\mathbf{A}$: os valores $\lambda_1 = \sqrt{3} + i$ e $\lambda_2 = \sqrt{3} - i$ não são reais, e dizemos que $\mathbf{A}$ não possui autovalores reais.
- autovetores de $\mathbf{A}$: segundo a definição, os autovetores devem estar associados a autovalores reais. Dizemos que $\mathbf{A}$ não possui autovetores. $\blacklozenge$

Observação: Se estivéssemos trabalhando com espaços vetoriais complexos, e não somente em espaços vetoriais reais como definimos no início de nosso estudo, todos os operadores teriam autovalores e autovetores, uma vez que todo polinômio sempre admite raiz.

Exemplo 7: Encontre os autovalores e autovetores para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

- equação característica: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Então, $(3-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$.

- autovalores de $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = -1$. Observe que um autovalor é duplo.
- autovetores de $\mathbf{A}$:

$$\lambda_2 = \lambda_1 = 3; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-3 & 0 & -4 \\ 0 & 3-3 & 5 \\ 0 & 0 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4z = 0 \\ 5z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \text{ . Daí, } x = x, y = y \text{ e } z = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_{\lambda_{1,2}} = (x, y, 0) \text{ e daqui retiramos dois representantes } \mathbf{v}_1 = (1, 0, 0) \text{ e } \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0).$$

$\lambda_3 = -1$; origina o autovetor $\mathbf{v}_{\lambda_3} = (z, -\frac{5}{4}z, z)$, sendo um de seus representantes o autovetor $\mathbf{v}_3 = (1, -\frac{5}{4}, 1)$.

- O conjunto dos autovetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é l.i. e forma uma base de $\mathbb{R}^3$. ♦

Exemplo 8: Encontre os autovalores e autovetores para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$

- equação característica de $\mathbf{A}$ ou de T :

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5-\lambda & -5 & -9 \\ 8 & 9-\lambda & 18 \\ -2 & -3 & -7-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow (-5-\lambda)(9-\lambda)(-7-\lambda) + 180 + 216 - 18(9-\lambda) + 54(-5-\lambda) + 40(-7-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

- autovalores de $\mathbf{A}$: são as raízes da equação $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$.

Para resolver tal equação e procurando soluções inteiras, na expectativa de que existam, usamos um importante teorema da álgebra que diz:

“ Se a equação polinomial

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0,$$

com coeficientes inteiros e coeficiente do termo de maior grau valendo 1, tem uma raiz inteira então essa raiz é um divisor do termo independente c_0 .”

Na equação em questão, o coeficiente de λ^3 é 1 e os divisores do termo independente são ± 1 .

Verifiquemos, por Briot-Ruffini, se um desses valores é solução da equação. Começemos com $\lambda = -1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & \downarrow & & & \\ & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$\lambda_1 = -1$ é uma das raízes e as outras são raízes da equação $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, que são $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -1$. Os valores λ_1, λ_2 e λ_3 são os autovalores de **A**.

• autovetores de **A**:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1;$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 - (-1) & -5 & -9 \\ 8 & 9 - (-1) & 18 \\ -2 & -3 & -7 - (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x - 5y - 9z = 0 \\ 8x + 10y + 18z = 0 \\ -2x - 3y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3z}{2} \text{ e } y = -3z.$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_{\lambda_{1,2,3}} = \left(-\frac{3z}{2}, -3z, z \right), \text{ com } z \in \mathbb{R}; \text{ cujo representante pode ser } \mathbf{v}_{1,2,3} = (-3/2, -3, 1).$$

Observemos que apenas um vetor l.i. é encontrado. Dessa forma, não é possível formar uma base de autovetores de **A** (ou de T) para $\mathbb{R}^3$. ♦

Exemplo 9: Dada a transformação $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear / $T(a, b, c) = (a + 2c, -a + c, a + b + 2c)$. Encontre os autovalores e autovetores para a matriz canônica desta transformação.

• matriz canônica de T:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

• equação característica de **A** (ou de T):

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 &\Rightarrow -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) - 2 + 2\lambda - (1-\lambda) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0. \end{aligned}$$

• autovalores de **A** (ou de T): são as raízes da equação $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$.

Temos $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$.

- autovetores de **A** (ou de T): para cada λ , a solução da equação $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = 0$ fornece

$$\lambda_1 = -1; \mathbf{v}_{\lambda_1} = (x, 2x, -x); \text{um deles: } \mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$$

$$\lambda_2 = 1; \mathbf{v}_{\lambda_2} = (-y, y, 0); \text{um deles: } \mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0)$$

$$\lambda_3 = 3; \mathbf{v}_{\lambda_3} = (x, 0, x); \text{um deles: } \mathbf{v}_3 = (1, 0, 1). \blacklozenge$$

Observamos que, também nesse caso, é possível escrever uma base para o $\mathbb{R}^3$ de autovetores de **A** (ou de T).

Propriedades de Autovalores e Autovetores

Seja **A** uma matriz $n \times n$.

- Se λ e μ são autovalores distintos de **A** com autovetores associados **x** e **y**, respectivamente, então **x** e **y** são linearmente independentes.
- A** e $\mathbf{A}^T$ têm os mesmos autovalores.
- Se **A** é uma matriz diagonal, triangular superior ou inferior, então seus autovalores são os elementos da sua diagonal principal.
- Os autovalores de uma matriz simétrica são todos números reais.
- A** é singular se e somente se 0 for um autovalor de **A**.

Revisão:

Exemplo 1:

Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Verifique se **u** e **v** são autovetores de **A**.

Resolução:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4 \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4\mathbf{u}$$

Assim, **u** é um **autovetor** associado ao autovalor -4, mas **v não é autovetor** de **A**, pois **v.A** não é múltiplo de **v**.

Observação: Ao invés de autovalor e autovetor, podemos encontrar os termos valor característico e vetor característico ou valor próprio e vetor próprio, respectivamente.

Exemplo 2:

Encontre autovalores e autovetores, não-nulos, e auto-espacos associados a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução: Procuramos um escalar λ e um vetor não-nulo $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, tais que, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$, ou seja, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \lambda \cdot \mathbf{v} = 0 \therefore (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = 0$, onde **I** representa a matriz identidade de mesma ordem de **A**.

Passo1: Escrever a equação $(A - \lambda.I).v = 0$ na forma matricial e encontrar o sistema associado.

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{cases} (1-\lambda)x + 3y = 0 \\ 3x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Passo 2: Encontrar o escalar λ .

Como o vetor v deve ser diferente de zero ($v \neq 0$), e o sistema associado é um sistema homogêneo, é necessário que encontremos uma solução diferente da trivial, para isso, basta igualar a zero o determinante da matriz $A - \lambda.I$ (matriz característica).

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \quad \therefore \quad \underbrace{\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0}_{\text{polinômio característico}} \quad \therefore \quad \lambda = 4 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1$$

Passo 3: Encontrar os autovetores associados aos autovalores encontrados.

Substitua os valores de λ no sistema encontrado no passo 1 e determine os valores de x e y .

Para $\lambda = 4$

$$\begin{cases} (1-4)x + 3y = 0 \\ 2x + (2-4)y = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{ou simplesmente} \quad x - y = 0 \quad \therefore \quad x = y$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, v é um autovetor não-nulo pertencente ao autovalor $\lambda = 4$ (ou pertencente ao auto-espaço de 4) e qualquer outro autovetor pertencente a $\lambda = 4$ é um múltiplo de v .

Para $\lambda = -1$

$$\begin{cases} (1+1)x + 3y = 0 \\ 2x + (2+1)y = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad \text{ou simplesmente} \quad 2x + 3y = 0 \quad \therefore \quad x = -\frac{3}{2}y$$

$$v = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Assim, v é um autovetor não-nulo pertencente ao autovalor $\lambda = -1$ (ou pertencente ao auto-espaço de -1) e qualquer outro autovetor pertencente a $\lambda = -1$ é um múltiplo de v .

Logo, os espaços gerados por todos os autovetores associados aos autovalores $\lambda = 4$ e $\lambda = -1$, chamados auto-espaços são: $S_{\lambda=4} = [(1,1)]$ e $S_{\lambda=-1} = [(-3,2)]$

Exemplo 3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Encontre autovalores e autovetores, não-nulos, e auto-espaços associados a matriz

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Resolução: Procuramos um escalar λ e um vetor não-nulo v , tais que, $A.v = \lambda.v$, ou seja

$A.v - \lambda.v = 0 \quad \therefore \quad (A - \lambda.I).v = 0$, onde I representa a matriz identidade de mesma ordem de A .

Passo1: Escrever a equação $(A - \lambda.I).v = 0$ na forma matricial e encontrar o sistema associado.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore$$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Encontrar o escalar λ .

Como o vetor v deve ser diferente de zero ($v \neq 0$), e o sistema associado é um sistema homogêneo, é necessário que encontremos uma solução diferente da trivial, para isso, basta igualar a zero o determinante da matriz $A - \lambda \cdot I$ (matriz característica).

$$\text{DET} \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda+5 & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \therefore \quad 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 - \lambda^3 = 0 \quad \therefore \quad (\lambda-6) \cdot (-\lambda^2 + 5\lambda - 6) \quad \therefore$$

$$-(\lambda-6)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \quad \therefore \quad \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = 3 \quad \text{ou} \quad \lambda = 6$$

Passo 3: Encontrar os autovetores associados aos autovalores encontrados.

Substitua os valores de λ no sistema encontrado no passo 1 e determine os valores de x e y .

Para $\lambda = 2$

$$\begin{cases} (3-2)x - y + z = 0 \\ -x + (5-2)y - z = 0 \\ x - y + (3-2)z = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \text{em forma matricial temos o mesmo sistema dado por:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ que usando eliminação gaussiana torna-se } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo temos que $2y = 0$ e $x - y + z = 0 \therefore x - (0) + z = 0 \therefore x + z = 0 \therefore x = -z$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor não-nulo associado ao autovalor $\lambda = 2$ (ou pertencente ao auto-espço de 2) e qualquer outro autovetor pertencente a $\lambda = 2$ é um múltiplo de v .

Para $\lambda = 3$

$$\begin{cases} (3-3)x - y + z = 0 \\ -x + (5-3)y - z = 0 \\ x - y + (3-3)z = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 0x - y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x - y + 0z = 0 \end{cases} \quad \text{em forma matricial temos o mesmo sistema dado por:}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ que usando eliminação gaussiana torna-se } \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo temos que $-y+z=0 \therefore y=z$ e $-x+2y-z=0 \therefore -x+2(z)-z=0 \therefore -x+z=0 \therefore x=z$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix} = z \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor não-nulo associado ao autovalor $\lambda = 3$ (ou pertencente ao auto-espaço de 3) e qualquer outro autovetor pertencente a $\lambda = 3$ é um múltiplo de v .

Para $\lambda = 6$

$$\begin{cases} (3-6)x - y + z = 0 \\ -x + (5-6)y - z = 0 \\ x - y + (3-6)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ -x - 1y - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

em forma matricial temos o mesmo sistema dado por:

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ que usando eliminação gaussiana torna-se } \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo temos que $-2y-4z=0 \therefore y=-2z$ e $3x-y+z=0 \therefore 3x-(-2z)+z=0 \therefore 3x+3z=0 \therefore x=-z$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $v = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor não-nulo associado ao autovalor $\lambda = 6$ (ou pertencente ao auto-espaço de 6) e qualquer outro autovetor pertencente a $\lambda = 6$ é um múltiplo de v .

Logo, os espaços gerados por todos os autovetores associados aos autovalores $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ e $\lambda = 6$, chamados auto-espaços são: $S_{\lambda=2} = [(-1, 0, 1)]$, $S_{\lambda=3} = [(1, 1, 1)]$ e $S_{\lambda=6} = [(-1, -2, 1)]$.

Lista de Exercícios 24:

1. Encontre a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.

2. Ache os autovalores e autovetores da transformação linear T :

a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$;

b) $T: P_2 \rightarrow P_2; T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + bx + c;$

c) $T: M_{22} \rightarrow M_{22}; T(A) = A^t.$

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

a) Ache os autovalores de A e de $A^{-1};$

b) Quais são os autovetores correspondentes?

4. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

a) Calcule AB e BA e observe que estes produtos são distintos.

b) Encontre os autovalores e autovetores de AB e de BA e compare os resultados obtidos.

Solução:

1. Sabemos (pela definição) $\lambda v = Av$, onde λ = autovalor de A e v = autovetor associado a λ .

Se $\lambda_1 = -2$ e $v_{\lambda_1} = (3y, y)$, temos:

$$-2 \begin{bmatrix} 3y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3y \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = -6 \\ 3c + d = -2 \end{cases} \leftarrow$$

Se $\lambda_2 = 3$ e $v_{\lambda_2} = (-2y, y)$, temos:

$$3 \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -6 \\ -2c + d = 3 \end{cases} \uparrow$$

De $\leftarrow$ e $\uparrow$, concluímos que $a = 0$; $b = -6$; $c = -1$ e $d = 1$.

Logo, $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ou $T(x, y) = (-6y, -x + y).$

2.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$$

• Para $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$:

$$(A - \lambda_1 I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

$$\therefore v_{\lambda_1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y, y \right), y \in \mathbb{R}^*$$

• Para $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$

$$v_{\lambda_2} = (x, -\sqrt{2}x), x \in \mathbb{R}^*.$$

b) $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$\mathbf{v}_{\lambda_{1,2,3}} = (a, b, c)$; $a, b, c \in \mathbb{R}$, não simultaneamente nulos.

$\therefore p(t)_{\lambda_{1,2,3}} = at^2 + bt + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$, não simultaneamente nulos.

$$c) \quad T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz que representa T é $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1; \lambda_4 = -1.$$

- Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, temos $\mathbf{v} = (a, b, c, d) / [\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -b+c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Rightarrow b=c$$

$$\therefore \mathbf{v}_{\lambda_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ b \\ d \end{bmatrix}; a, b, d \in \mathbb{R}^*, \text{ ou seja, } \underbrace{\mathbf{A}_{\lambda_{1,2,3}}}_{\text{vetor em } \mathbf{M}_{22}} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}; a, b, d \in \mathbb{R}^*, \text{ com } a, b \text{ e } c \text{ não simultaneamente nulos.}$$

- Para $\lambda_4 = -1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0-(-1) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0-(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a=0 \\ b+c=0 \\ b+c=0 \\ 2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-c \\ d=0 \end{cases}$$

$$\therefore \mathbf{v}_{\lambda_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ c \\ 0 \end{bmatrix}; c \in \mathbb{R}^* \text{ ou } \underbrace{\mathbf{A}_{\lambda_4}}_{\text{vetor em } \mathbf{M}_{22}} = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix}; c \in \mathbb{R}^*.$$

3.

- Para $\mathbf{A}$:

$$\lambda_1 = 2; \mathbf{v}_{\lambda_1} = (x, x); x \in \mathbb{R}^*$$

$$\lambda_2 = -1; \mathbf{v}_{\lambda_2} = (-2y, y); y \in \mathbb{R}^*.$$

- Para $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\lambda_1 = -1; \mathbf{v}_{\lambda_1} = (-2y, y); y \in \mathbb{R}^*$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}; \mathbf{v}_{\lambda_2} = (x, x); x \in \mathbb{R}^*.$$

4.

$$\text{a) } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Autovalores e respectivos autovetores:

$$\lambda_1 = 1; \mathbf{v}_{\lambda_1} = (x, 0, 0); x \in \mathbb{R}^*$$

$$\lambda_2 = -2; \mathbf{v}_{\lambda_2} = \left(-\frac{7}{3}y, y, 0\right); y \in \mathbb{R}^*$$

$$\lambda_3 = -3; \mathbf{v}_{\lambda_3} = \left(\frac{17}{4}z, -3z, z\right); z \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{a) } \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Autovalores e respectivos autovetores:

$$\lambda_1 = 1; \mathbf{v}_{\lambda_1} = (x, 0, 0); x \in \mathbb{R}^*$$

$$\lambda_2 = -2; \mathbf{v}_{\lambda_2} = (x, 3x, 0); x \in \mathbb{R}^*$$

$$\lambda_3 = -3; \mathbf{v}_{\lambda_3} = \left(-\frac{5}{4}z, -2z, z\right); z \in \mathbb{R}^*$$

Exercícios Extras:

1) A figura abaixo é constituída de 9 quadrados congruentes. Para cada uma das afirmações abaixo, coloque V se ela for verdadeira ou F se ela for falsa.

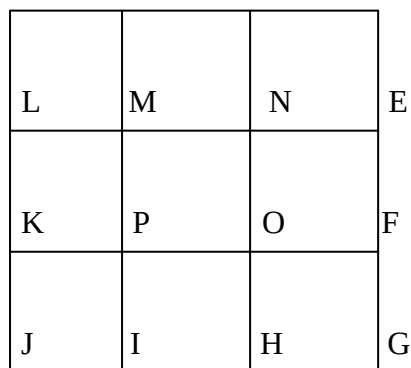


Figura 1

- a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$ () g) $\overrightarrow{JO} \parallel \overrightarrow{LD}$ () m) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{NB}$ ()
b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PH}$ () h) $\overrightarrow{AJ} \parallel \overrightarrow{FG}$ () n) $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BL}$ ()
c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP}$ () i) $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{HI}$ () o) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{FP}|$ ()
d) $\overrightarrow{BL} = -\overrightarrow{MC}$ () j) $\overrightarrow{CO} \parallel \overrightarrow{GI}$ () p) $|\overrightarrow{IF}| = |\overrightarrow{MF}|$ ()
e) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED}$ () k) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EG}$ () q) $|\overrightarrow{AJ}| = |\overrightarrow{AC}|$ ()
f) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MG}$ () l) $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{EC}$ () r) $|\overrightarrow{AO}| = 2|\overrightarrow{NP}|$ ()

Respostas a) V, b) V, c) F, d) V, e) V, f) V, g) F, h) V, i) V, j) F, k) V, l) F, m) V, n) V, o) V, p) V, q) F, r) V.

2) A figura abaixo representa um paralelepípedo. Para cada uma das afirmações abaixo, coloque V se ela for verdadeira ou F se ela for falsa.

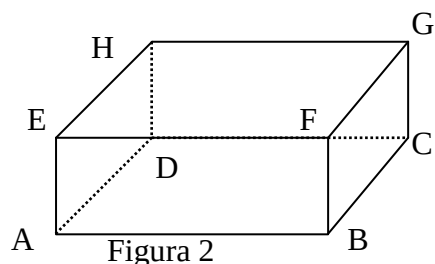


Figura 2

- a) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$ () d) $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BC}$ ()
b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$ () e) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{HF}|$ ()
c) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$ () f) $\overrightarrow{BG} \parallel \overrightarrow{ED}$ ()

Respostas a) V, b) F, c) V, d) V, e) V, f) F.

3) Dada a figura abaixo, determine:

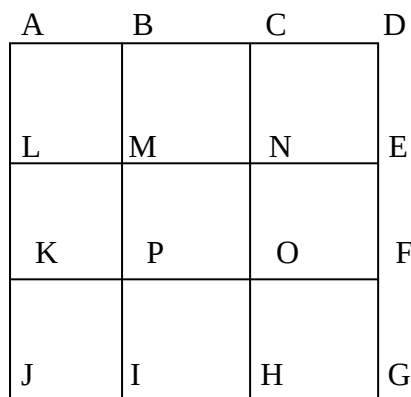


Figura 1

- a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ g) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AN}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ h) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OE}$
c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ i) $\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{NP}$
d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK}$ j) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CB}$
e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EO}$ k) $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NF}$
f) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BL}$ l) $\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PB}$

Respostas:

- a) $\overrightarrow{AN}$ b) $\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AO}$ e) $\overrightarrow{AM}$ f) $\overrightarrow{AK}$ g) $\overrightarrow{AH}$ h) $\overrightarrow{AI}$ i) $\overrightarrow{AC}$ j) $\overrightarrow{AC}$ k) $\overrightarrow{AE}$ l) $\vec{0}$
 Lista Extra:

1) Determine se o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base para o $\mathbb{R}^3$.

2) Nos problemas que seguem determine se W é ou não um subespaço do espaço vetorial:

a) $V = \mathbb{R}^2$; $W_1 = \{(x, y) | y \geq 0\}$;

$W_2 = \{(x, y) | y < 0\}$;

$W_3 = \{(x, y) | y = 2\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$; $W_1 =$ o plano xy ;

$W_2 = \{(x, y, z) | x = y = z\}$;

$W_3 = \{(x, y, z) | x = y\}$

3) Determine se o conjunto de vetores $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ são L.I. Eles formam uma

base para o $\mathbb{R}^3$? Justifique:

4) Verifique se o conjunto de vetores $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$ gera o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

5) Determine se o conjunto de vetores $\{(1, 2, 1, 1), (3, 0, 2, 2), (0, 4, 1, 1), (5, 0, 3, 1)\}$ em $\mathbb{R}^4$ é L.I ou L.D.

6) Encontre uma base para o subespaço S de $\mathbb{R}^4$ formado por todos os vetores da forma $(a + b, a + b + 2c, b, c)$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

7) Sejam $\vec{v}_1 = (1, -2, -5)$, $\vec{v}_2 = (2, 5, 6)$ e $\vec{v} = (7, 4, -3)$. Determine se $\vec{v}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

8) Sejam $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 3)$, $\vec{v}_3 = (4, 2, 6)$ e $\vec{w} = (3, 1, 2)$. Determine se $\vec{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$

9) Sejam $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$. Mostre que o conjunto $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$.

10) Encontre todos os valores de a para os quais $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$.