

14

Derivadas Parciais

Um modo efetivo de visualizar uma função de duas variáveis é plotar as curvas de nível (também chamadas linhas de contorno). Essas curvas indicam pontos onde a função tem um mesmo valor.

Até aqui, tratamos o cálculo de funções de uma única variável. No entanto, no mundo real, quantidades físicas freqüentemente dependem de duas ou mais variáveis, de modo que, neste capítulo, focalizaremos nossa atenção em funções com diversas variáveis e estenderemos nossas idéias básicas do cálculo diferencial para tais funções.

14.1 Funções de Várias Variáveis

Nesta seção estudaremos as funções de duas ou mais variáveis sob quatro pontos de vista diferentes:

- verbalmente (pela descrição em palavras)
- numericamente (por uma tabela de valores)
- algebricamente (por uma fórmula explícita)
- visualmente (por um gráfico ou curvas de nível)

Funções de Duas Variáveis

A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em um dado instante de tempo depende da longitude x e da latitude y do ponto. Podemos pensar em T como uma função de duas variáveis x e y , ou como uma função do par (x, y) . Indicamos essa dependência funcional escrevendo $T = f(x, y)$.

O volume V de um cilindro circular depende de seu raio r e de sua altura h . De fato, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Podemos dizer que V é uma função de r e de h , e escrevemos $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Definição Uma **função f de duas variáveis** é uma regra que associa, a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D , um único valor real denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f , e sua **imagem**, o conjunto de valores possíveis de f , ou seja, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

Freqüentemente escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícitos os valores tomados por f em um ponto genérico (x, y) . As variáveis x e y são **variáveis independentes**, e z é a **variável dependente**. [Compare com a notação $y = f(x)$ para as funções de uma única variável.]

Uma função de duas variáveis é aquela cujo domínio é um subconjunto de \mathbb{R}^2 e cuja imagem é um subconjunto de \mathbb{R} . Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas (veja a Figura 1), onde o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy .

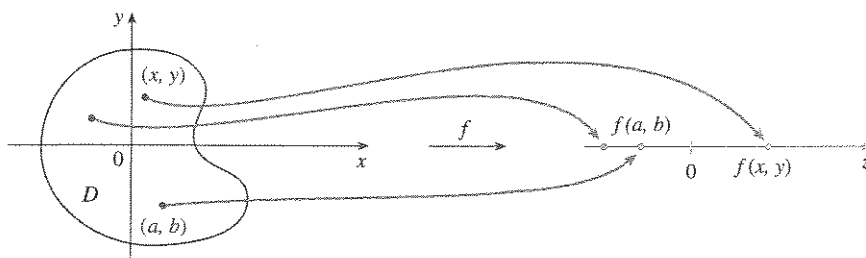


FIGURA 1

Se a função f é dada por sua fórmula e seu domínio não é especificado, fica entendido como domínio de f o conjunto de todos os pares de valores (x, y) para os quais a expressão dada fornece um número real bem-definido.

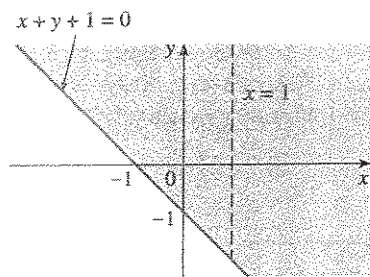


FIGURA 2

Domínio de $f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

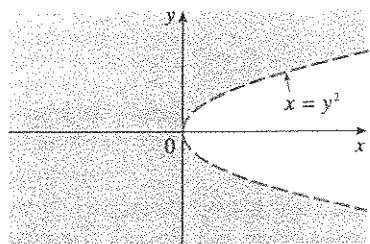


FIGURA 3

Domínio de $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

EXEMPLO 1 □ Determine os domínios das seguintes funções e calcule $f(3, 2)$.

(a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$ (b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

SOLUÇÃO

(a) $f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

A expressão para f está bem-definida se o denominador for diferente de 0 e o número cuja raiz quadrada será extraída for não-negativo. Portanto, o domínio de f é

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$$

A desigualdade $x + y + 1 \geq 0$, ou $y \geq -x - 1$, descreve os pontos que estão sobre ou acima da reta $y = -x - 1$, ao passo que $x \neq 1$ significa que os pontos sobre a reta $x = 1$ precisam ser excluídos do domínio. (Veja a Figura 2.)

(b) $f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$

Como $\ln(y^2 - x)$ é definido somente quando $y^2 - x > 0$, ou seja, $x < y^2$, o domínio de f é $D = \{(x, y) \mid x < y^2\}$. Isso representa o conjunto de pontos à esquerda da parábola $x = y^2$. (Veja a Figura 3.)

Nem todas as funções podem ser representadas por fórmulas explícitas. A função do próximo exemplo é descrita verbalmente e por estimadores numéricos de seus valores.

EXEMPLO 2 □ Em regiões com inverno severo, o índice *sensação térmica* é freqüentemente utilizado para descrever a severidade aparente do frio. Esse índice W mede a temperatura subjetiva que depende da temperatura real T e da rapidez do vento v . Assim W é uma função de T e de v , e podemos escrever $W = f(T, v)$. A Tabela 1 apresenta valores de W compilados pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos e Serviço Meteorológico do Canadá.

TABELA 1 Índice sensação térmica como função da temperatura do ar e rapidez do vento

		Velocidade do vento (km/h)										
		5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
Temperatura real (°C)	5	-4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
	0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10
	-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17
	-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24
	-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31
	-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38
	-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45
	-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52
	-35	-41	-45	-48	-49	-51	-52	-54	-56	-57	-58	-60
	-40	-47	-51	-54	-56	-57	-59	-61	-63	-64	-65	-67

O NOVO ÍNDICE SENSÇÃO TÉRMICA

Um novo índice denominado sensação térmica foi introduzido em novembro de 2001 e é muito mais preciso que o velho índice de medição de quanto frio se sente quando está ventando. O novo índice é baseado em um modelo de quanto rápido um rosto humano perde calor. Foi desenvolvido por meio de ensaios clínicos nos quais voluntários eram expostos a uma variedade de temperaturas e rapidez do vento em um túnel de vento refrigerado.

Por exemplo, a tabela mostra que, se a temperatura é -5°C e a rapidez do vento, 50 km/h, então subjetivamente parecerá tão frio quanto uma temperatura de cerca de -15°C sem vento. Portanto

$$f(-5, 50) = -15$$

EXEMPLO 3 □ Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelavam o crescimento da economia norte-americana durante o período 1899-1922. Eles consideraram uma visão simplificada onde a produção é determinada pela quantidade de trabalho e pela quantidade de capital investido. Apesar de existirem muitos outros fatores afetando o desempenho da economia, o modelo provou-se impressionantemente razoável. A função utilizada para modelar a produção era da forma

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

onde P é a produção total (valor monetário dos bens produzidos no ano); L , a quantidade de trabalho (número total de pessoas-hora trabalhadas em um ano); e K , a quantidade de capital investido (valor monetário das máquinas, equipamentos e prédios). Na Seção 14.3, vamos mostrar como obter a Equação 1 com algumas hipóteses econômicas.

Cobb e Douglas usaram dados econômicos publicados pelo governo para construir a Tabela 2. Eles tomaram o ano de 1899 como base, e P , L e K foram tomados valendo 100 nesse ano. Os valores para outros anos foram expressos como porcentagens do valor de 1899.

Cobb e Douglas utilizaram o método dos mínimos quadrados para ajustar os dados da Tabela 2 à função

$$P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$$

(Veja o Exercício 71 para detalhes.)

Se usarmos o modelo dado pela função na Equação 2 para calcular a produção nos anos de 1910 e 1920, obteremos os valores

$$P(147, 208) = 1,01(147)^{0,75}(208)^{0,25} \approx 161,9$$

$$P(194, 407) = 1,01(194)^{0,75}(407)^{0,25} \approx 235,8$$

que são muito próximos dos valores reais, 159 e 231.

A função de produção (1) foi usada posteriormente em muitos ajustes, de firmas individuais até para questões globais de economia. Ela passou a ser conhecida como **função de produção de Cobb-Douglas**. Seu domínio é $\{(L, K) \mid L \geq 0, K \geq 0\}$, pois, como L e K representam trabalho e capital, não podem ser negativos.

EXEMPLO 4 □ Determine o domínio e a imagem de

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

SOLUÇÃO O domínio de g é

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

que é o disco com centro $(0, 0)$ e raio 3 (veja a Figura 4). A imagem de g é

$$\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$$

TABELA 2

Ano	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	165
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	265
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

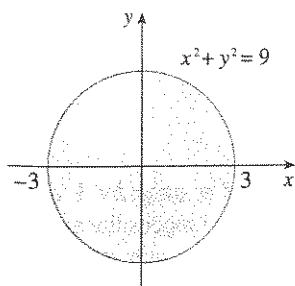


FIGURA 4

Domínio de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Como z é a raiz quadrada positiva, $z \geq 0$. Temos também

$$9 - x^2 - y^2 \leq 9 \Rightarrow \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$$

Assim a imagem é

$$\{z \mid 0 \leq z \leq 3\} = [0, 3]$$

Gráficos

Outra forma de visualizar o comportamento de uma função de duas variáveis é considerar seu gráfico.

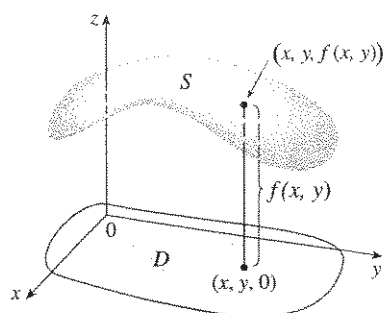


FIGURA 5

Definição Se f é uma função de duas variáveis com domínio D , então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em \mathbb{R}^3 tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertençam a D .

Assim como o gráfico de uma função f de uma única variável é uma curva C com equação $y = f(x)$, o gráfico de uma função com duas variáveis é uma superfície S com equação $z = f(x, y)$. Podemos enxergar a superfície S de f como estando diretamente em cima ou abaixo de seu domínio D que está no plano xy (veja a Figura 5).

EXEMPLO 5 □ Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

SOLUÇÃO O gráfico de f tem a equação $z = 6 - 3x - 2y$, ou $3x + 2y + z = 6$, que representa um plano. Para desenhar o plano, primeiro achamos os interceptos. Fazendo $y = z = 0$ na equação obtemos $x = 2$ como o intercepto. Analogamente, o intercepto y é 3 e o intercepto z é 6. Isso nos ajuda a esboçar a parte do gráfico que se encontra no primeiro octante (Figura 6).

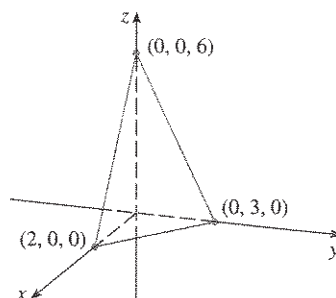


FIGURA 6

A função do Exemplo 5 é um caso especial da função

$$f(x, y) = ax + by + c$$

e é chamada **função linear**. O gráfico de uma função tem a equação $z = ax + by + c$, ou $ax + by - z + c = 0$, e portanto é um plano. Do mesmo modo que as funções lineares de uma única variável são importantes no cálculo de uma variável, veremos que as funções lineares de duas variáveis têm um papel central no cálculo com muitas variáveis.

EXEMPLO 6 □ Desenhe o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

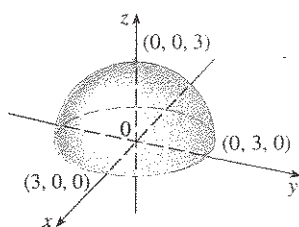


FIGURA 7

Gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

SOLUÇÃO O gráfico tem a equação $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, ou $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, que reconhecemos como a equação da esfera de centro na origem e raio 3. Mas como $z \geq 0$, o gráfico de g é somente a metade superior da esfera (veja a Figura 7).

EXEMPLO 3 Utilize o computador para traçar o gráfico da função de produção de Cobb-Douglas $P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$.

SOLUÇÃO A Figura 8 mostra o gráfico de P para os valores de trabalho L e capital K que estão entre 0 e 300. O computador utilizou os traços verticais para desenhar a superfície. Vemos desses traços que o valor da produção P aumenta com o crescimento de L ou de K , como esperado.

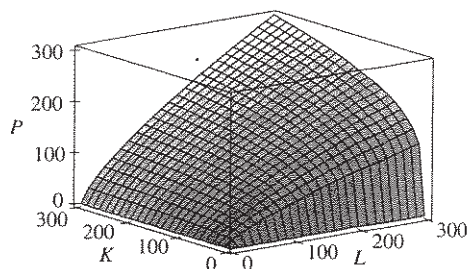
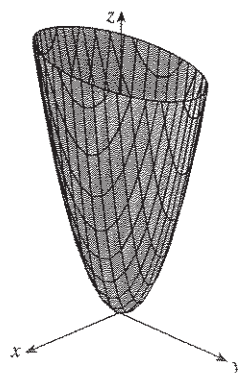


FIGURA 8

EXEMPLO 4 Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUÇÃO Note que $h(x, y)$ é definida para todos os possíveis pares ordenados de números reais (x, y) , e seu domínio é \mathbb{R}^2 , o plano xy todo. A imagem de h é o conjunto $[0, \infty)$ de todos os reais não-negativos. [Note que $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$, portanto $h(x, y) \geq 0$ para todo x e y .]

O gráfico de h é dado pela equação $z = 4x^2 + y^2$, que é um parabolóide elíptico que esboçamos no Exemplo 4 da Seção 12.6. Os traços horizontais são elipses e os verticais, parábolas (veja a Figura 9).

FIGURA 9
Gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$

Existem programas de computador desenvolvidos para traçar os gráficos de funções de duas variáveis. Na maioria desses programas, são desenhados os traços nos planos verticais $x = k$ e $y = k$ para os valores de k igualmente espaçados, e as linhas do gráfico que estariam escondidas são removidas.

A Figura 10 mostra uma série de gráficos de diversas funções, gerados por computador. Note que obtemos uma melhor visão da função quando a rodamos de modo a olhá-la por diferentes pontos de vista. Nos itens (a) e (b) o gráfico da f é achatado e próximo do plano xy exceto perto da origem; isso se dá porque $e^{-x^2-y^2}$ é muito pequeno quando x ou y é muito grande.

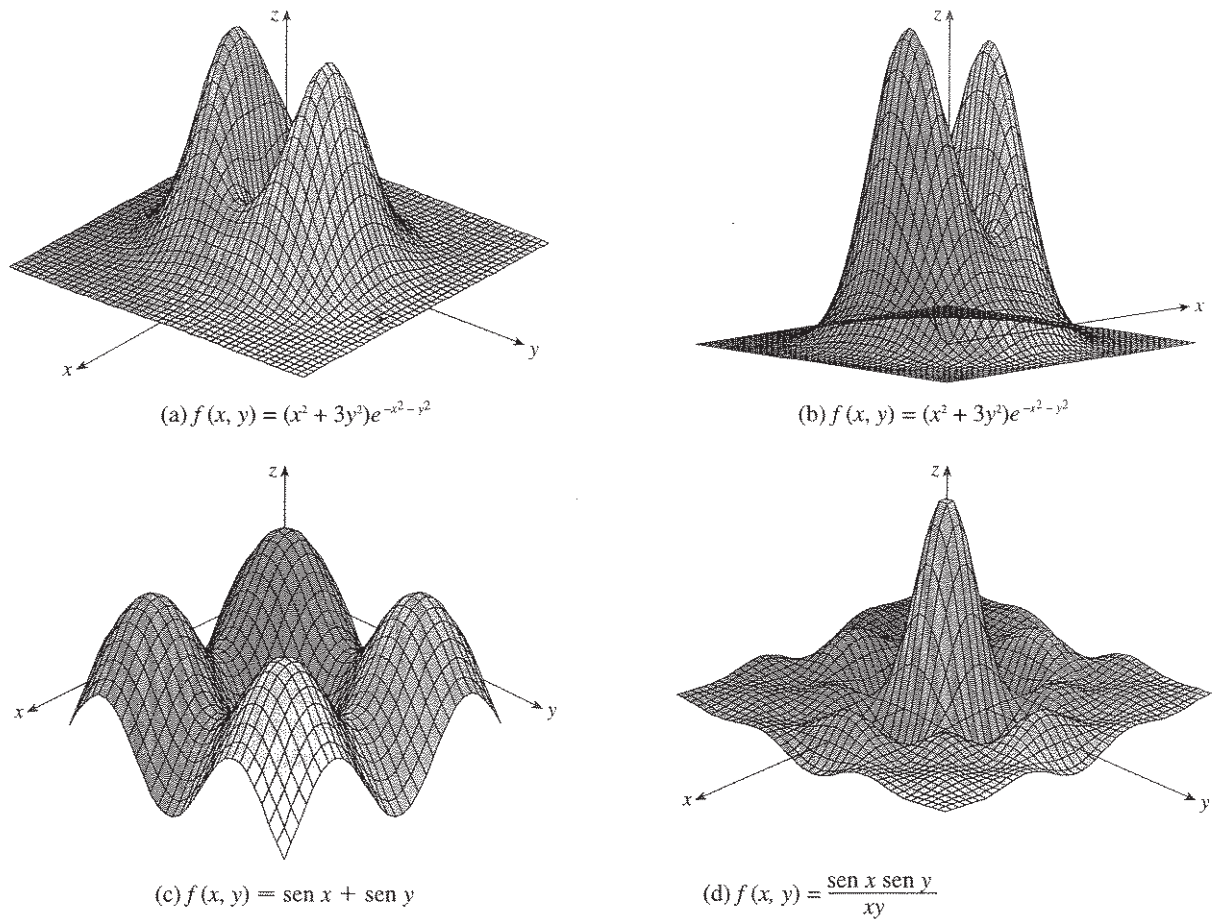


FIGURA 10

Curvas de Nível

Até aqui vimos dois métodos diferentes para visualizar funções: o diagrama de setas e os gráficos. Um terceiro método, emprestado dos cartógrafos, é um mapa de contornos, em que os pontos com elevações constantes são ligados para formar *curvas de contorno* ou *curvas de nível*.

Definição As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

Uma curva de nível $f(x, y) = k$ é o conjunto de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k . Em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de f tem altura k .

Você pode ver na Figura 11 a relação entre as curvas de nível e os traços horizontais. As curvas de nível $f(x, y) = k$ são apenas traços do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetado sobre o plano xy . Assim, se você traçar as curvas de nível da função e visualizá-las elevadas para a superfície na altura indicada, poderá imaginar o gráfico da função

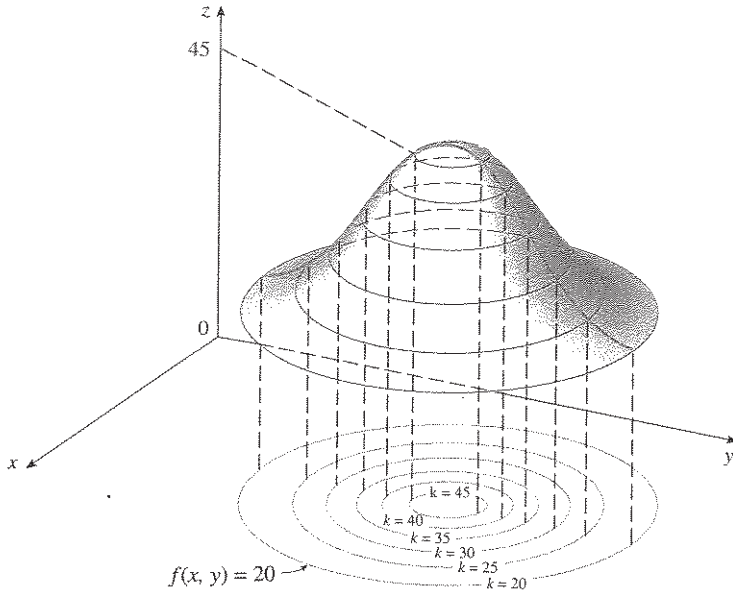


FIGURA 11

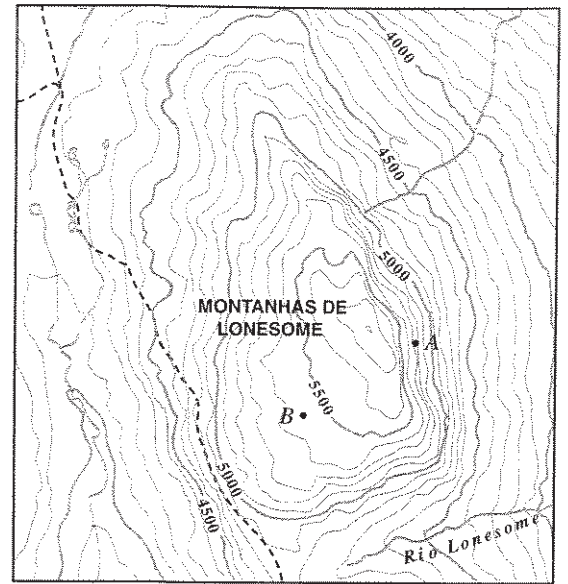


FIGURA 12

colocando as duas informações juntas. A superfície será mais inclinada onde as curvas de nível estiverem mais próximas umas das outras. Ela é mais ou menos plana onde as curvas de nível estão distantes umas das outras.

Um exemplo comum de curvas de nível ocorre em mapas topográficos de regiões montanhosas, como o mapa da Figura 12. As curvas de nível são aquelas em que a elevação em relação ao nível do mar é constante. Se você andar sobre um desses contornos, nem descerá nem subirá. Outro exemplo comum é a função temperatura introduzida no parágrafo inicial desta seção. Aqui as curvas são chamadas **curvas isotérmicas** e ligam localidades que têm a mesma temperatura. A Figura 13 mostra um mapa-múndi indicando as temperaturas médias do mês de janeiro. Isotérmicas são as curvas que separam as bandas destacadas.

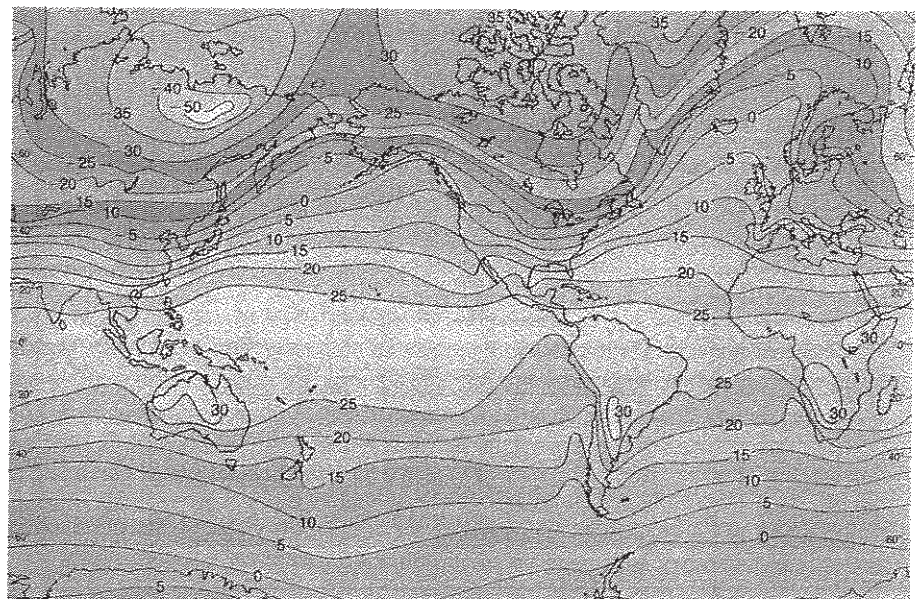


FIGURA 13
Temperaturas médias ao nível do mar
no mês de janeiro, em graus Celsius

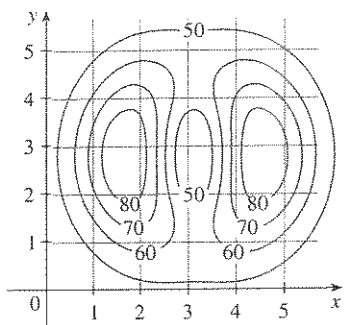


FIGURA 14

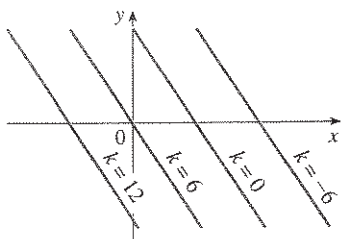


FIGURA 15
Mapa de contorno de $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

EXEMPLO 9 □ A Figura 14 mostra um mapa de contorno para uma função f . Utilize-o para estimar os valores de $f(1, 3)$ e $f(4, 5)$.

SOLUÇÃO O ponto $(1, 3)$ está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 70 e 80. Estimamos que

$$f(1, 3) \approx 73$$

Da mesma forma, estimamos que

$$f(4, 5) \approx 56$$

EXEMPLO 10 □ Esboce o gráfico das curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os valores $k = -6, 0, 6, 12$.

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$6 - 3x - 2y = k \quad \text{ou} \quad 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

ou seja, uma família de retas com inclinação $-\frac{3}{2}$. As quatro curvas de nível particulares pedidas com $k = -6, 0, 6$ e 12 são $3x + 2y - 12 = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 2y = 0$ e $3x + 2y + 6 = 0$. Elas estão apresentadas na Figura 15. As curvas de nível são retas paralelas, igualmente espaçadas, porque o gráfico de f é um plano (veja a Figura 6). □

EXEMPLO 11 □ Esboce o gráfico das curvas de nível das funções

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

que corresponde a uma família de circunferências concêntricas com centro em $(0, 0)$ e raio $\sqrt{9 - k^2}$. Os casos $k = 0, 1, 2, 3$ estão mostrados na Figura 16. Tente visualizar essas curvas de nível elevadas da superfície e compare com o gráfico de g (um hemisfério) da Figura 7.

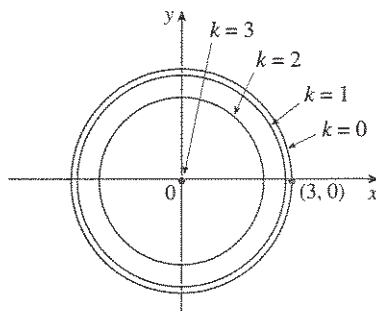


FIGURA 16
Mapa de contorno de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

EXEMPLO 12 □ Esboce algumas curvas de nível da função $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$4x^2 + y^2 = k \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$$

que, para $k > 0$, descrevem uma família de elipses com semi-eixos $\sqrt{k}/2$ e \sqrt{k} . A Figura 17(a) mostra o diagrama de contornos de h desenhado por computador com curvas de nível correspondendo a $k = 0,25; 0,5; 0,75, \dots, 4$. A Figura 17(b) apresenta essas curvas de nível elevadas para termos o gráfico de h (um parabolóide elíptico) que coincide com os traços horizontais. Vemos da Figura 17 como o gráfico de h é montado de suas curvas de nível.

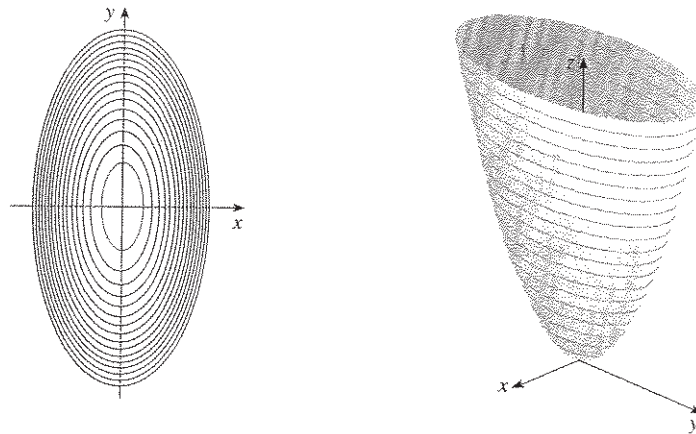


FIGURA 17

O gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$ é formado levantando-se as curvas de nível.

(a) Mapa de contornos

(b) Traços horizontais são curvas de nível elevadas □

EXEMPLO 13 □ Trace as curvas de nível para a função de produção de Cobb-Douglas do Exemplo 3.

SOLUÇÃO Na Figura 18 usamos o computador para desenhar os contornos da função produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1,01P^{0,75}K^{0,25}$$

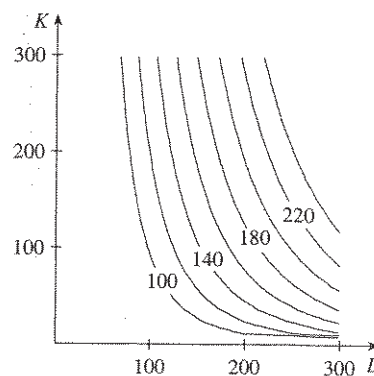
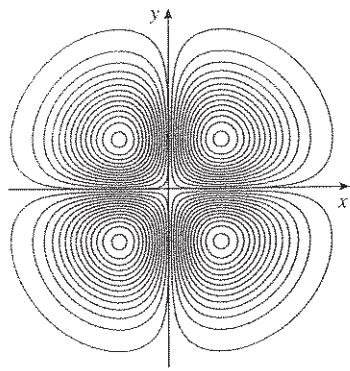


FIGURA 18

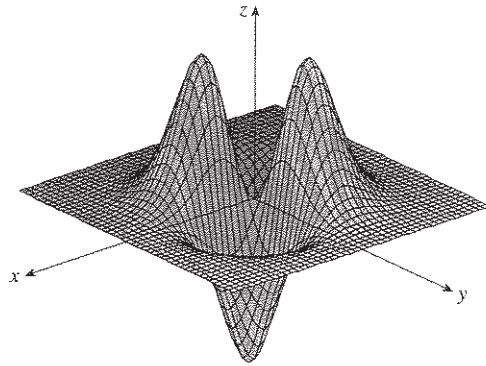
As curvas de nível estão indicadas com os valores da produção P correspondentes. Por exemplo, a curva de nível indicada com 140 mostra todos os valores de quantidade de trabalho L e de capital investido K que resultam na produção $P = 140$. Vemos que, para um valor fixo de P , quando L aumenta K diminui, e vice-versa. □

Para alguns propósitos, o mapa de contornos (ou diagrama de contornos) é mais útil que um gráfico. Certamente isso é verdadeiro no Exemplo 13. (Compare a Figura 18 com a Figura 8.) Isso também é verdadeiro quando queremos fazer uma estimativa de valores, como no Exemplo 9.

A Figura 19 mostra algumas curvas de nível geradas por computador juntamente com os gráficos correspondentes. Note que as curvas de nível apresentadas na parte (c) da figura aparecem muito amontoadas perto da origem. Isso corresponde, no gráfico mostrado na parte (d), a uma mudança de inclinação muito acentuada nessa região.



(a) Curvas de nível de $f(x, y) = -xye^{-(x+y)}$



(b) Duas vistas de $f(x, y) = -xye^{-(x+y)}$

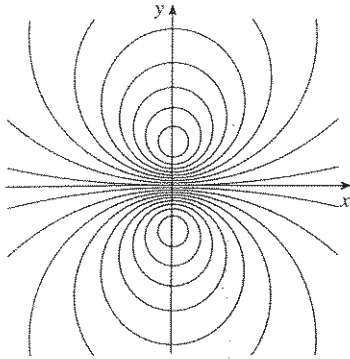
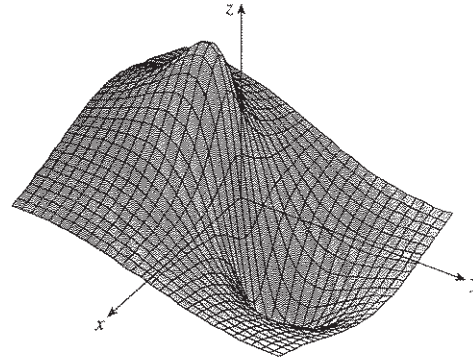


FIGURA 19 (c) Curvas de nível de $f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$



(d) $f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

Funções com Três ou Mais Variáveis

Uma **função com três variáveis**, f , é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ um único número real denotado por $f(x, y, z)$. Por exemplo, a temperatura T em um ponto da superfície terrestre depende da latitude y e da longitude x do ponto e do tempo t , de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$.

EXEMPLO 14 □ Determine o domínio de

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

SOLUÇÃO A expressão para $f(x, y, z)$ é definida desde que $z - y > 0$, de modo que o domínio de f seja

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Isso é o **semi-espaço** constituído por todos os pontos que estão acima do plano $z = y$. □

É muito difícil visualizar uma função f de três variáveis por seu gráfico, uma vez que estaríamos em um espaço de quatro dimensões. Entretanto ganhamos algum conhecimento de f desenhando suas **superfícies de nível**, que são as superfícies com equação $f(x, y, z) = k$, onde k é uma constante. Se um ponto (x, y, z) se move ao longo de uma superfície de nível, o valor de $f(x, y, z)$ permanece fixo.

EXEMPLO 15 □ Determine as curvas de superfície da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

SOLUÇÃO As superfícies de nível são $x^2 + y^2 + z^2 = k$, onde $k \geq 0$. Elas formam uma família de esferas concêntricas com raio \sqrt{k} . (Veja a Figura 20.) Então, quando (x, y, z) varia sobre uma das esferas com centro O , o valor de $f(x, y, z)$ permanece fixo. □

As funções com qualquer número de variáveis também podem ser consideradas. Uma **função com n variáveis** é uma regra que associa um número real $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ à n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) de números reais. Denotamos por \mathbb{R}^n o conjunto de todas as n -uplas. Por exemplo, se uma fábrica de alimentos usa n ingredientes diferentes para manufaturar um determinado alimento, sendo c_i seu custo por unidade do i -ésimo ingrediente, e se são necessárias x_i unidades do i -ésimo ingrediente, então o custo total C dos ingredientes é uma função de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\boxed{3} \quad C = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

A função f é uma função real cujo domínio é um subconjunto de \mathbb{R}^n . Algumas vezes utilizaremos a notação vetorial para escrever essas funções de forma mais compacta: se $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, freqüentemente escreveremos $f(\mathbf{x})$ no lugar de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Com essa notação podemos reescrever a função definida na Equação 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle$ e $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota o produto escalar dos vetores \mathbf{c} e \mathbf{x} em V_n .

Tendo em vista a correspondência biunívoca entre os pontos (x_1, x_2, \dots, x_n) em \mathbb{R}^n e os vetores de posição $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ em V_n , podemos olhar de três formas diferentes para a função f definida em um subconjunto de \mathbb{R}^n :

1. Como uma função de n variáveis reais x_1, x_2, \dots, x_n
2. Como uma função de um único ponto variável (x_1, x_2, \dots, x_n)
3. Como uma função de um vetor variável $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

Veremos que todos os três pontos de vista têm sua utilidade.

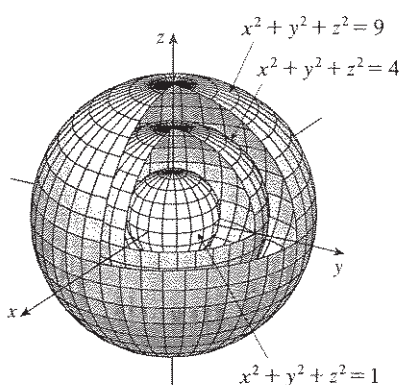


FIGURA 20

14.1

Exercícios

1. No Exemplo 2 consideramos a função $W = f(T, v)$, onde W era o índice sensação térmica ocasionado pelo vento; T a temperatura real; e v , a rapidez do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1.
- (a) Qual o valor de $f(-15, 40)$? Qual seu significado?
 - (b) Descreva em palavras o significado da questão “Para que valores de v é $f(-20, v) = -30$?”. Em seguida, responda à questão.

- (c) Descreva o significado da questão “Para que valores de T vale $f(T, 20) = -49$?”. Em seguida, responda à questão.
- (d) Qual o significado da função $W = f(-5, v)$? Descreva o comportamento dessa função.
- (e) Qual o significado da função $W = f(T, 50)$? Descreva o comportamento dessa função.

2. O índice I de temperatura-umidade (ou simplesmente Umindex) em função da umidade I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h , de modo que possamos escrever $I = f(T, h)$. A tabela seguinte com os valores de I foi extraída de uma tabela do Serviço de Administração Nacional de Oceanos e Atmosfera dos Estados Unidos.

TABELA 3 Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

		Umidade relativa (%)						
		h	20	30	40	50	60	70
Temperatura real (°F)	T							
	80	77	78	79	81	82	83	
	85	82	84	86	88	90	93	
	90	87	90	93	96	100	106	
	95	93	96	101	107	114	124	
100	99	104	110	120	132	144		

- (a) Qual é o valor de $f(95, 70)$? Qual seu significado?
 - (b) Para que valor de h temos $f(90, h) = 100$?
 - (c) Para que valor de T temos $f(T, 50) = 88$?
 - (d) Qual o significado de $I = f(80, h)$ e $I = f(100, h)$? Compare o comportamento dessas duas funções de h .
3. Verifique que, para a função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$$

discutida no Exemplo 3, a produção dobrará se a quantidade de trabalho e a de capital investido forem dobradas. É verdade também para uma função de produção genérica $P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}$?

4. O índice sensação térmica W discutido no Exemplo 2 foi modelado pela seguinte equação:

$$W(T, v) = 13,12 + 0,6215T - 11,37v^{0,16} + 0,3965Tv^{0,16}$$

Verifique quão próximo este modelo está dos valores da Tabela 1 para alguns valores de T e v .

5. A altura das ondas h em um mar aberto depende da rapidez do vento v e do intervalo de tempo t no qual está ventando com a mesma intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ dados em pés, são apresentados na tabela que se segue.
- (a) Qual é o valor de $f(40, 15)$? Qual seu significado?
 - (b) Qual o significado da função $h = f(30, t)$? Descreva seu comportamento.
 - (c) Qual o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

$v \backslash t$	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

- 6. Seja $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.
 - (a) Estime $f(1, 1)$.
 - (b) Estime $f(e, 1)$.
 - (c) Determine o domínio de f .
 - (d) Estabeleça a imagem de f .
- 7. Seja $f(x, y) = x^2e^{3xy}$.
 - (a) Calcule $f(2, 0)$.
 - (b) Determine o domínio de f .
 - (c) Estipule a imagem de f .
- 8. Determine e esboce o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{1 + x - y^2}$. Qual é a imagem da f ?
- 9. Seja $f(x, y, z) = e^{\sqrt{x^2 - y^2}}$.
 - (a) Calcule $f(2, -1, 6)$.
 - (b) Estabeleça o domínio de f .
 - (c) Determine a imagem f .
- 10. Seja $g(x, y, z) = \ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$.
 - (a) Calcule $g(2, -2, 4)$.
 - (b) Determine o domínio de g .
 - (c) Estipule a imagem de g .

11-20 □ Determine e faça o esboço do domínio da função.

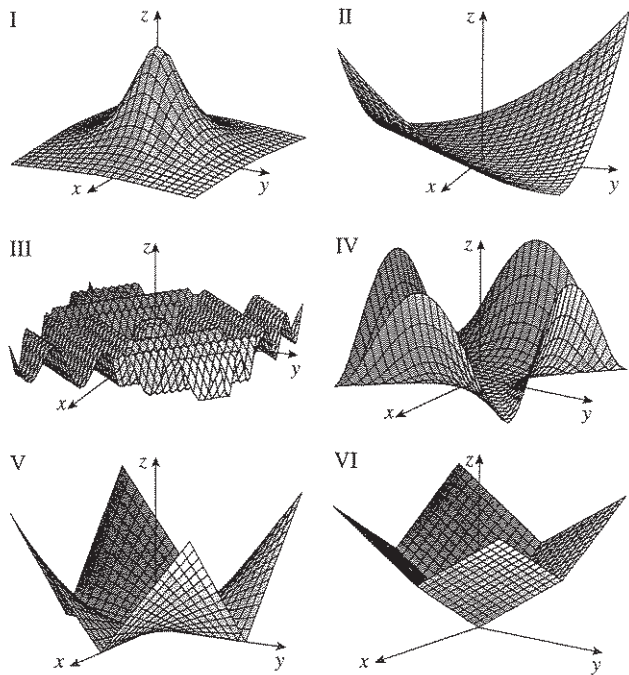
- 11. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
- 12. $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
- 13. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$
- 14. $f(x, y) = \frac{x - 3y}{x + 3y}$
- 15. $f(x, y) = \frac{3x + 5y}{x^2 + y^2 - 4}$
- 16. $f(x, y) = \sqrt{y - x} \ln(y + x)$
- 17. $f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$
- 18. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$
- 19. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$
- 20. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

21–29 □ Esboce o gráfico da função.

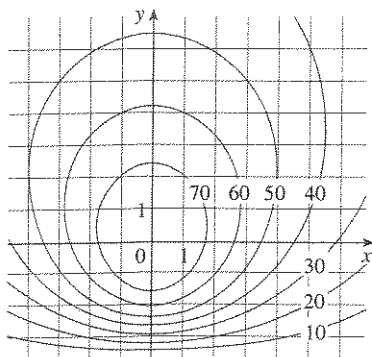
21. $f(x, y) = 3$ 22. $f(x, y) = y$
 23. $f(x, y) = 1 - x - y$ 24. $f(x, y) = \cos x$
 25. $f(x, y) = 1 - x^2$ 26. $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$
 27. $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$
 28. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$
 29. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

30. Case a função com o gráfico (indicado por I–VI). Dê razões para sua escolha.

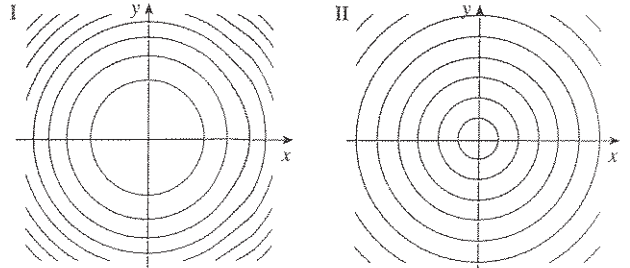
- (a) $f(x, y) = |x| + |y|$ (b) $f(x, y) = |xy|$
 (c) $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ (d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$
 (e) $f(x, y) = (x - y)^2$ (f) $f(x, y) = \text{sen}(|x| + |y|)$



31. É mostrado o mapa de contorno para a função f . Use-o para estimar o valor de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?

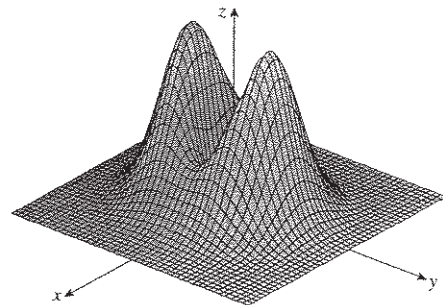


32. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é da função f cujo gráfico é um cone. O outro é para uma função g cujo gráfico é um parabolóide. Qual é qual? Por quê?

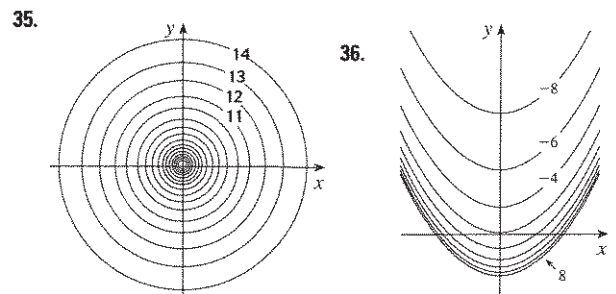


33. Localize os pontos A e B no mapa das Montanhas de Lonesome (Figura 12). Qual a descrição do terreno perto de A? E perto de B?

34. Faça um esboço do diagrama de contorno da função cujo gráfico é mostrado.



35–36 □ Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f .



37–44 □ Faça o mapa de contornos da função mostrando várias curvas de nível.

37. $f(x, y) = xy$ 38. $f(x, y) = x^2 - y^2$
 39. $f(x, y) = y - \ln x$ 40. $f(x, y) = e^{y/x}$
 41. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ 42. $f(x, y) = y \sec x$
 43. $f(x, y) = x - y^2$ 44. $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

45–46 □ Faça o esboço do diagrama de contornos e do gráfico da função e compare-os.

45. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$
 46. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

47. Uma camada fina de metal, localizada no plano xy , tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y) . As curvas de nível de T são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = 100/(1 + x^2 + 2y^2)$$

48. Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico de um ponto (x, y) do plano xy , as curvas de nível de V são chamadas *curvas equipotenciais*, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, onde c é uma constante positiva.

49-52 □ Use um computador para traçar o gráfico da função utilizando vários pontos de vista. Imprima a que, em sua opinião, saiu melhor. Se seu programa também produz curvas de nível, trace o diagrama de contornos da mesma função e compare.

49. $f(x, y) = x^3 + y^3$ 50. $f(x, y) = \text{sen}(ye^{-x})$

51. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (sela do macaco)

52. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (sela do cachorro)

53-56 □ Case a função (a) com seu gráfico (indicado por A-F na página 899) e (b) com seus mapas de contorno (indicado por I-VI). Dê razões para sua escolha.

53. $z = \text{sen} \sqrt{x^2 + y^2}$ 54. $z = x^2y^2e^{-x^2-y^2}$

55. $z = \frac{1}{x^2 + 4y^2}$ 56. $z = x^3 - 3xy^2$

57. $z = \text{sen } x \text{ sen } y$ 58. $z = \text{sen}^2x + \frac{1}{4}y^2$

59-62 □ Descreva as superfícies de nível da função.

59. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

60. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

61. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$

62. $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

63-64 □ Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f .

63. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
 (c) $g(x, y) = -f(x, y)$ (d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

64. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$ (b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
 (c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

65-66 □ Faça uso do computador para traçar o gráfico da função, utilizando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Imprima aquela que apresente melhor os “picos e vales”. Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos “máximos locais”? E os “mínimos locais”?

65. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

66. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

67-68 □ Utilize o computador para traçar o gráfico da função, usando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando x e y se tornam muito grandes? O que acontece quando (x, y) se aproxima da origem?

67. $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$

68. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

69. Utilize o computador para estudar o comportamento da família de funções $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. Como a forma da função é afetada por uma mudança do valor de c ?

70. Esboce o gráfico das funções

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \quad f(x, y) = \text{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})$$

e $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Em geral, se g é uma função de uma variável, como obter o gráfico de $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ a partir do gráfico de g ?

71. (a) Mostre que, tomando logaritmos, uma função generalizada de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^{1-\alpha}$ pode ser expressa como

$$\ln \frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln \frac{L}{K}$$

(b) Se tomarmos $x = \ln(L/K)$ e $y = \ln(P/K)$, a equação da parte (a) se tornará uma equação linear $y = \alpha x + \ln b$. Utilize a Tabela 2 (do Exemplo 3) para fazer uma tabela de valores de $\ln(L/K)$ e $\ln(P/K)$ para os anos de 1899-1922. Use então um computador ou calculadora gráfica para achar, pelo método dos mínimos quadrados, a reta de regressão através dos pontos $(\ln(L/K)$ e $\ln(P/K))$.

(c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é $P = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$.

14.2 Limites e Continuidade

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

quando x e y se aproximam de 0 [e portanto o ponto (x, y) se aproxima da origem].

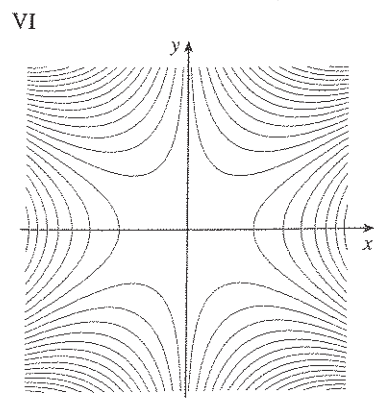
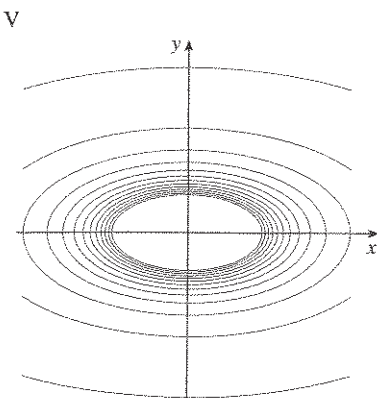
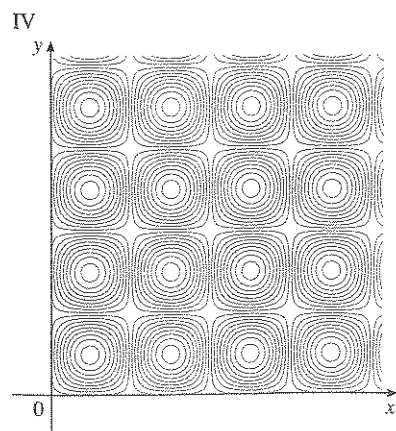
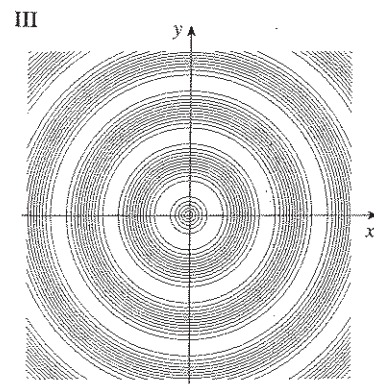
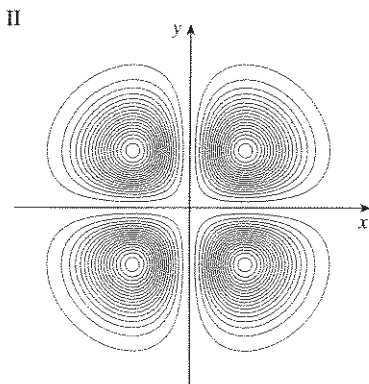
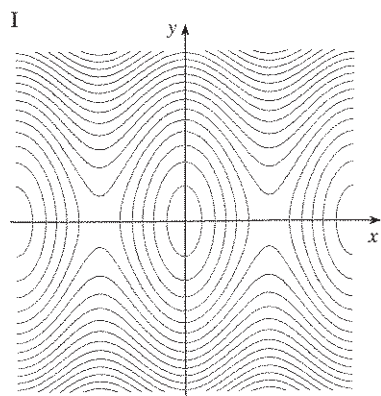
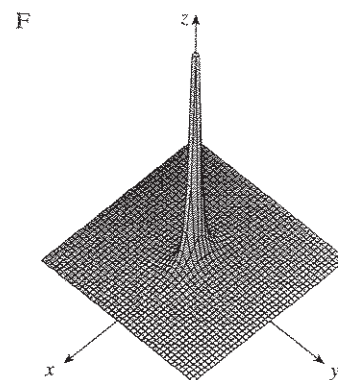
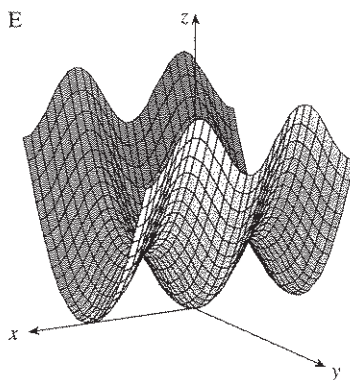
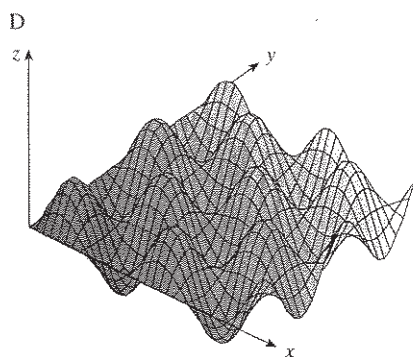
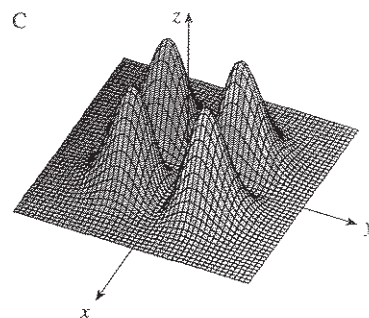
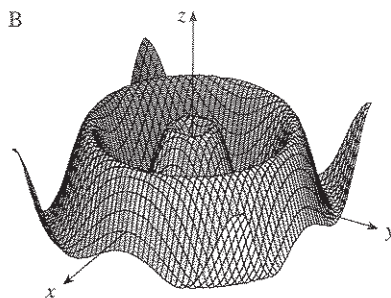
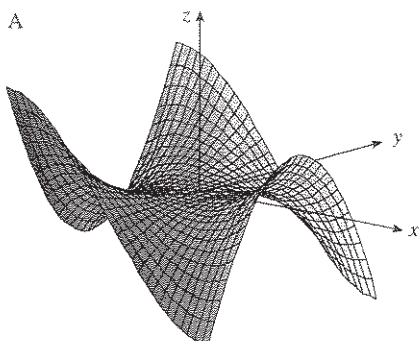


TABELA 1 Valores de $f(x, y)$

$x \backslash y$	-1,0	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	1,0
-1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455
-0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
-0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0	0,841	0,990	1,000		1,000	0,990	0,841
0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455

TABELA 2 Valores de $g(x, y)$

$x \backslash y$	-1,0	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	1,0
-1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000
-0,5	-0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	-0,600
-0,2	-0,923	-0,724	0,000	1,000	0,000	-0,724	-0,923
0	-1,000	-1,000	-1,000		-1,000	-1,000	-1,000
0,2	-0,923	-0,724	0,000	1,000	0,000	-0,724	-0,923
0,5	-0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	-0,600
1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000

As Tabelas 1 e 2 mostram valores de $f(x, y)$ e $g(x, y)$, com precisão até três decimais, para os pontos (x, y) próximos da origem. (Note que a função não está definida na origem.) Parece que, quando (x, y) se aproxima de $(0, 0)$, os valores de $f(x, y)$ se aproximam de 1, ao passo que os valores de $g(x, y)$ não se aproximam de valor algum. Essa nossa observação baseada em evidências numéricas está correta, e podemos escrever

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ não existe}$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

para indicar que os valores de $f(x, y)$ se aproximam do número L quando o ponto (x, y) se aproxima do ponto (a, b) ao longo de qualquer caminho contido no domínio da função f . Em outras palavras, podemos tomar os valores de $f(x, y)$ tão próximos de L quanto o desejado escolhendo pontos (x, y) suficientemente próximos do ponto (a, b) , mas não iguais a (a, b) . Uma definição mais precisa é a seguinte:

1 Definição* Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b) . Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b) é L** e escrevemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } (x, y) \in D \text{ e } 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

Outras notações para o limite da Definição 1 são

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = L \quad \text{e} \quad f(x, y) \rightarrow L \text{ quando } (x, y) \rightarrow (a, b)$$

Note que $|f(x, y) - L|$ corresponde à distância entre os números $f(x, y)$ e L , e $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ é a distância entre o ponto (x, y) e o ponto (a, b) . Assim, a Definição 1 diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser arbitrariamente pequena se

*NT: Na definição 1 acima, ao conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta\}$, onde o número real δ é maior que zero, damos o nome de *bola aberta de centro em (a, b) e raio δ* . "No plano, a bola aberta de centro em (a, b) e raio δ é o conjunto de todos os pontos "interiores" ao círculo do centro em (a, b) e raio δ ".

tornarmos a distância de (x, y) a (a, b) suficientemente pequena (mas não nula). A Figura 1 ilustra a Definição 1 por meio de um diagrama de setas. Se nos é dado um pequeno intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ em torno de L , então podemos determinar uma bola aberta D_δ com centro em (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que f leve todos os pontos de D_δ [exceto possivelmente (a, b)] no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

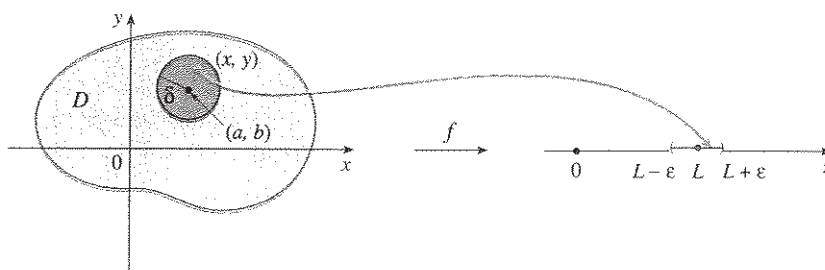


FIGURA 1

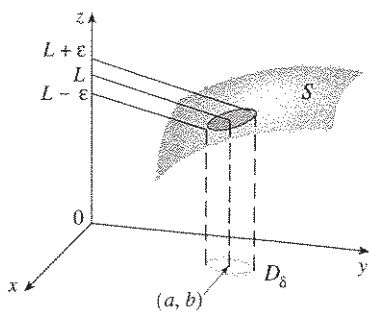


FIGURA 2

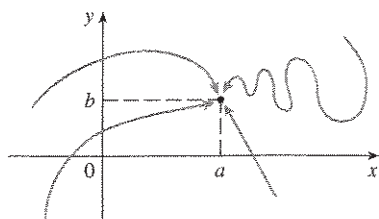


FIGURA 3

Outra ilustração da Definição 1 é dada na Figura 2, onde a superfície S representa o gráfico de f . Se $\varepsilon > 0$ é dado, podemos achar $\delta > 0$ tal que, se (x, y) pertence à bola aberta D_δ e $(x, y) \neq (a, b)$, sua imagem em S estará entre os planos horizontais $z = L - \varepsilon$ e $z = L + \varepsilon$.

Para as funções de uma única variável, quando fazemos x se aproximar de a , só existem duas direções possíveis de aproximação: pela esquerda ou pela direita. Lembremos do Capítulo 2 (Volume I) que, se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe.

Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples porque existem infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (a, b) por uma quantidade infinita de direções e de qualquer maneira que se queira (veja a Figura 3), bastando que (x, y) se mantenha no domínio de f .

A Definição 1 diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode se tornar arbitrariamente pequena fazendo a distância de (x, y) a (a, b) suficientemente pequena (mas não nula). A definição se refere somente à *distância* entre (x, y) e (a, b) ; não se refere à direção de aproximação. Portanto, se o limite existe, $f(x, y)$ deve se aproximar do mesmo valor-limite, independentemente do modo como (x, y) se aproxima de (a, b) . Assim, se acharmos dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais $f(x, y)$ tem limites diferentes, segue então que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ não existe.

Se $f(x, y) \rightarrow L_1$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \rightarrow L_2$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C_2 , com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ não existe.

EXEMPLO 1 □ Mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

SOLUÇÃO Seja $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Vamos primeiro aproximar $(0, 0)$ ao longo do eixo x . Tomando $y = 0$, temos $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todo $x \neq 0$, logo

$$f(x, y) \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Agora, vamos nos aproximar ao longo do eixo y colocando $x = 0$. Assim

$$f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1 \quad \text{para todo } y \neq 0, \text{ logo}$$

$$f(x, y) \rightarrow -1 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

(Veja a Figura 4.) Como f tem dois limites diferentes ao longo de duas retas diferentes, o limite não existe. (Isso confirma a conjectura que fizemos com base na evidência numérica no início desta seção.) □

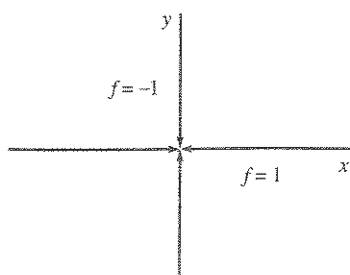


FIGURA 4

EXEMPLO 2 □ Se $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, será que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ existe?

SOLUÇÃO Se $y = 0$, temos $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Portanto

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Se $x = 0$, então $f(0, y) = 0/y^2 = 0$. Assim

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

Apesar de termos encontrado valores idênticos caminhando sobre os eixos, não podemos afirmar que esse limite exista, dado por 0. Vamos agora aproximar de $(0, 0)$ ao longo de outra reta; por exemplo, $y = x$. Para todo $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Logo, $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de $y = x$

(Veja a Figura 5.) Como obtivemos valores diferentes para o limite ao longo de caminhos diferentes, podemos afirmar que o limite dado não existe.

A Figura 6 nos dá uma idéia do que acontece no Exemplo 2. A cumeeira que ocorre acima da reta $y = x$ corresponde ao fato de que $f(x, y) = \frac{1}{2}$ para todos os pontos (x, y) dessa reta, exceto na origem.

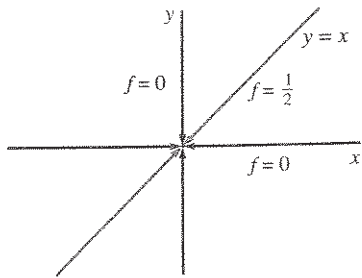


FIGURA 5

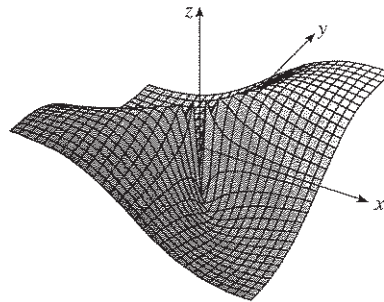


FIGURA 6

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

EXEMPLO 3 □ Se $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$, será que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ existe?

SOLUÇÃO Considerando a solução do Exemplo 2, vamos tentar economizar tempo fazendo $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de uma reta não-vertical que passa pela origem. Tomemos $y = mx$, onde m é a inclinação da reta e

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$

Portanto $f(x, y) \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de $y = mx$

Logo, f tem o mesmo limite ao longo de qualquer reta não-vertical que passe pela origem. Mas isso ainda não garante a existência do limite com valor 0, pois, se tomarmos agora $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo da parábola $x = y^2$, teremos

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

E assim $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de $x = y^2$

Como caminhos diferentes levaram a resultados diferentes, o limite não existe.

□ A Figura 7 mostra o gráfico da função do Exemplo 3. Note a cumeeira sobre a parábola $x = y^2$.

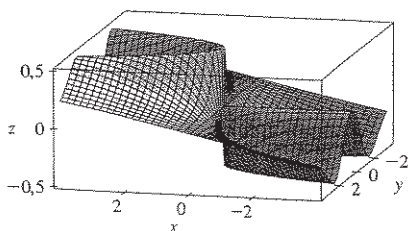


FIGURA 7

Vamos agora olhar o caso onde o limite *existe*. Como para a função de uma única variável, o cálculo do limite de funções com duas variáveis pode ser muito simplificado usando-se as propriedades dos limites. As Leis do Limite listadas na Seção 2.3 do Volume I podem ser estendidas para as funções de duas variáveis. O limite da soma é a soma dos limites; o limite do produto é o produto dos limites; e assim por diante. Em particular, as seguintes equações são verdadeiras:

$$\boxed{2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} c = c$$

O Teorema do Confronto também vale.

EXEMPLO 4 □ Determine, se existir, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 3, podemos mostrar que o limite ao longo de uma reta qualquer que passa pela origem é 0. Isso não prova a existência do limite igual a 0, mas ao longo das parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ também obtemos o limite 0, o que nos leva a suspeitar que o limite exista e seja igual a 0.

Seja $\varepsilon > 0$. Queremos achar $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

ou seja,
$$\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

Mas $x^2 \leq x^2 + y^2$ uma vez que $y^2 \geq 0$, logo $x^2/(x^2 + y^2) \leq 1$ e portanto

$$\boxed{3} \quad \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Então, se escolhermos $\delta = \varepsilon/3$ e seja $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, temos

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Logo, pela Definição 1,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 \quad \square$$

□ Outro modo de resolver o Exemplo 4 é pelo Teorema do Confronto em vez de pela Definição 1. De (2) segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 3|y| = 0$$

e portanto a primeira desigualdade em (3) mostra que o limite dado é 0.

Continuidade

Lembremo-nos de que o cálculo de limite de funções *contínuas* de uma única variável é fácil. Ele pode ser obtido por substituição direta, porque, pela definição de função contínua, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Funções contínuas de duas variáveis também são definidas pela propriedade da substituição direta.

4 Definição Uma função f de duas variáveis é dita **contínua em** (a, b) se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que f é **contínua em** D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D .

O significado intuitivo de continuidade é que, se o ponto (x, y) varia de uma pequena quantidade, o valor de $f(x, y)$ variará de uma pequena quantidade. Isso quer dizer que a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou ruptura.

Usando as propriedades de limites, podemos ver que soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas são contínuos em seus domínios. Vamos usar esse fato para dar exemplos de funções contínuas.

Uma **função polinomial de duas variáveis** (ou simplesmente polinômio) é uma soma de termos da forma $cx^m y^n$, onde c é uma constante e m e n são números inteiros não-negativos. Uma **função racional** é uma razão de polinômios. Por exemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

é um polinômio, ao passo que

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

é uma função racional.

Os limites em (2) mostram que as funções $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ e $h(x, y) = c$ são contínuas. Como qualquer polinômio pode ser obtido a partir das funções f , g e h por multiplicação e adição, segue que *todos os polinômios são funções contínuas em \mathbb{R}^2* . Da mesma forma, qualquer função racional é contínua em seu domínio, porque ela é o quociente de funções contínuas.

EXEMPLO 5 □ Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

SOLUÇÃO Como $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ é um polinômio, ela continua em qualquer lugar, portanto podemos calcular seu limite pela substituição direta:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11 \quad \square$$

EXEMPLO 6 □ Onde a função $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ é contínua?

SOLUÇÃO A função f é descontínua em $(0, 0)$, pois ela não está definida nesse ponto. Como f é uma função racional, ela é contínua em seu domínio, o que corresponde ao conjunto $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$. □

EXEMPLO 7 □ Seja

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aqui g está definida em $(0, 0)$, mas ainda assim g é descontínua em 0 , porque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ não existe (veja o Exemplo 1). □

EXEMPLO 8 □ Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

□ A Figura 8 mostra o gráfico da função contínua do Exemplo 8.

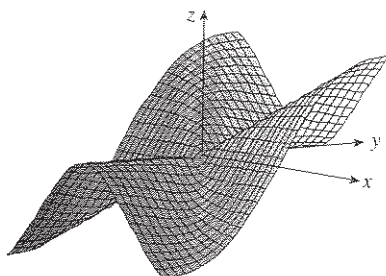


FIGURA 8

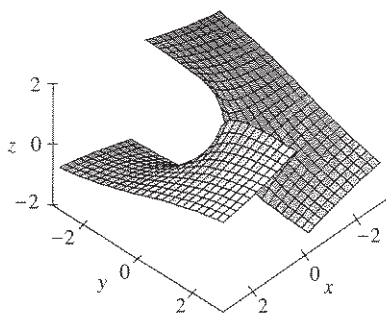


FIGURA 9

A função $h(x, y) = \arctg(y/x)$ é descontínua onde $x = 0$.

Sabemos que f é contínua para $(x, y) \neq (0, 0)$ uma vez que ela é uma função racional definida nessa região. Do Exemplo 4 temos que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

Portanto f é contínua em $(0, 0)$, e, conseqüentemente, contínua em \mathbb{R}^2 . □

Como para as funções de uma variável, a composição é outra maneira de combinar funções contínuas para obter outra também contínua. De fato, pode ser mostrado que, se f é uma função contínua de duas variáveis e g é uma função contínua de uma única variável definida na imagem de f , a função composta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ é também contínua.

EXEMPLO 9 □ Onde a função $h(x, y) = \arctg(y/x)$ é contínua?

SOLUÇÃO A função $f(x, y) = y/x$ é racional e, desse modo, contínua em todo lugar, exceto sobre a reta $x = 0$. A função $g(t) = \arctg t$ é contínua em qualquer lugar. Logo, a função composta

$$g(f(x, y)) = \arctg(y/x) = h(x, y)$$

é contínua, exceto onde $x = 0$. O desenho da Figura 9 mostra a ruptura existente no gráfico da função h acima do eixo y . □

■ Funções com Três ou Mais Variáveis

Tudo o que fizemos até aqui pode ser estendido para as funções com três ou mais variáveis. A notação

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)} f(x, y, z) = L$$

significa que os valores de $f(x, y, z)$ se aproximam do número L quando o ponto (x, y, z) se aproxima do ponto (a, b, c) ao longo de um caminho qualquer no domínio de f . Como a distância entre os dois pontos (x, y, z) e (a, b, c) em \mathbb{R}^3 é dada por $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, podemos escrever em uma forma precisa a definição como se segue: para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y, z) - L| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$$

e (x, y, z) pertence ao domínio de f .

A função f é contínua em (a, b, c) se

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Por exemplo, a função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

é racional em três variáveis, e portanto é contínua em todo ponto de \mathbb{R}^3 , exceto onde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ou seja, é descontínua na esfera de centro na origem e raio 1.

Se usarmos a notação vetorial introduzida no final da Seção 14.1, poderemos escrever as definições de limite para as funções de duas ou três variáveis de uma forma compacta, como se segue.

5 Se f é definida em um subconjunto D de \mathbb{R}^n , então $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$$

Note que se $n = 1$, então $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{a} = a$, e (5) é exatamente a definição do limite para as funções de uma única variável simples. Para o caso $n = 2$, temos $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b \rangle$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, de modo que (5) se torna a Definição 1. Se $n = 3$, então $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c \rangle$, e (5) é a definição de limite de uma função de três variáveis. Em cada caso a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 Exercícios

- Suponha que $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} f(x,y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3, 1)$? E se a função f for contínua?
- Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
 - A temperatura externa como função da latitude, longitude e tempo.
 - Elevação (altura acima do nível do mar) como função da longitude, latitude e tempo.
 - Custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e tempo gasto.

3–4 □ Utilize a tabela de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Em seguida explique por que sua afirmação está correta.

$$3. f(x, y) = \frac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy} \quad 4. f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$$

5–20 □ Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

$$5. \lim_{(x,y) \rightarrow (5,-2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2) \quad 6. \lim_{(x,y) \rightarrow (6,3)} xy \cos(x - 2y)$$

$$7. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad 8. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + \sin^2 y}{2x^2 + y^2}$$

$$9. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2} \quad 10. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^3y}{2x^4 + y^4}$$

$$11. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad 12. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

$$13. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} \quad 14. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2 + 2y^2}$$

$$15. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

$$16. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$$

$$17. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (3,0,1)} e^{-xy} \sin(\pi z/2)$$

$$18. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$19. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$$

$$20. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

21–22 □ Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

$$21. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$$

$$22. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$$

23–24 □ Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

$$23. g(t) = t^2 + \sqrt{t}, \quad f(x, y) = 2x + 3y - 6$$

$$24. g(t) = \frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1}, \quad f(x, y) = x^2 - y$$

25–26 □ Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida utilize fórmulas para explicar o que você observou.

25. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$

26. $f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$

27–38 □ Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

27. $F(x, y) = \frac{\text{sen}(xy)}{e^x - y^2}$

28. $F(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

29. $F(x, y) = \text{arctg}(x + \sqrt{y})$

30. $F(x, y) = e^{x^2y} + \sqrt{x + y^2}$

31. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

32. $G(x, y) = \text{sen}^{-1}(x^2 + y^2)$

33. $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{y}}{x^2 - y^2 + z^2}$

34. $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$

35. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

36. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

37–38 □ Utilize as coordenadas polares para determinar o limite. [Se (r, θ) são as coordenadas polares, o ponto (x, y) com $r \geq 0$, note que $r \rightarrow 0^+$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.]

37. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

38. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

39. Utilize as coordenadas esféricas para achar

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

40. No início desta seção consideramos a função

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e adivinhamos que $f(x, y) \rightarrow 1$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ com base em evidências numéricas. Utilize as coordenadas polares para comprovar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.

41. Mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ é contínua em \mathbb{R}^n . [Dica: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

42. Se $\mathbf{c} \in V_n$, mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ é contínua em \mathbb{R}^n .

14.3 Derivadas Parciais

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa do que a que o termômetro indica. O Serviço Nacional de Meteorologia norte-americano criou um *índice de calor* (também chamado índice de temperatura-umidade, ou Umidex, em alguns países) para descrever os efeitos combinados de temperatura e umidade. O índice de calor I é a temperatura que corresponde à sensação de calor quando a temperatura real é T e a umidade relativa do ar, H . Assim I é uma função de T e de H , e podemos escrever $I = f(T, H)$. A tabela de valores de I a seguir é extraída de uma tabela compilada pelo Serviço Nacional de Meteorologia.

TABELA 1 Índice de calor I como função da temperatura e umidade

		Umidade relativa (%)								
		50	55	60	65	70	75	80	85	90
Temperatura real (°F)	90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
	92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
	94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
	96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
	98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
	100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Se nos concentrarmos na coluna assinalada da tabela que corresponde à umidade relativa de $H = 70\%$, consideraremos o índice de calor como função da única variável T para um valor fixo de H . Vamos escrever $g(T) = f(T, 70)$. Assim $g(T)$ descreve como o índice I de calor aumenta com a elevação da temperatura T para uma umidade relativa de 70% . A derivada de g quando $T = 96^\circ\text{F}$ é a taxa de variação de I com relação a T quando $T = 96^\circ\text{F}$:

$$g'(96) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(96 + h) - g(96)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(96 + h, 70) - f(96, 70)}{h}$$

Podemos aproximar seu valor usando a Tabela 1 tomando $h = 2$ e -2 :

$$g'(96) \approx \frac{g(98) - g(96)}{2} = \frac{f(98, 70) - f(96, 70)}{2} = \frac{133 - 125}{2} = 4$$

$$g'(96) \approx \frac{g(94) - g(96)}{-2} = \frac{f(94, 70) - f(96, 70)}{-2} = \frac{118 - 125}{-2} = 3,5$$

Tomando a média desses valores, podemos dizer que a derivada $g'(96)$ é aproximadamente 3,75. Isso significa que, quando a temperatura real é de 96°F e a umidade relativa é de 70% , o índice de calor aumenta a sensação de temperatura de $3,75^\circ\text{F}$ para cada grau que a temperatura real aumenta!

Olhemos agora para a linha assinalada da Tabela 1, que corresponde à temperatura fixa de $T = 96^\circ\text{F}$. Os números da linha correspondem aos valores da função $G(H) = f(96, H)$, que descrevem como o índice de calor sobe com o aumento de umidade relativa H quando a temperatura real é de $T = 96^\circ\text{F}$. A derivada dessa função quando $H = 70\%$ é a taxa de variação de I com relação a H quando $H = 70\%$:

$$G'(70) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(70 + h) - G(70)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(96, 70 + h) - f(96, 70)}{h}$$

Tomando $h = 5$ e -5 , aproximamos o valor de $G'(70)$ usando os valores tabelados:

$$G'(70) \approx \frac{G(75) - G(70)}{5} = \frac{f(96, 75) - f(96, 70)}{5} = \frac{130 - 125}{5} = 1$$

$$G'(70) \approx \frac{G(65) - G(70)}{-5} = \frac{f(96, 65) - f(96, 70)}{-5} = \frac{121 - 125}{-5} = 0,8$$

Tomando a média desses valores obtemos uma estimativa para $G'(70) \approx 0,9$. Isso nos diz que, quando a temperatura é de 96°F e a umidade relativa é de 70% , o índice de calor aumenta em cerca de $0,9^\circ\text{F}$ para cada ponto porcentual que a umidade relativa aumenta.

Em geral, se f é uma função de duas variáveis x e y , suponha que deixemos somente x variar enquanto mantemos fixo o valor de y ; por exemplo, fazendo $y = b$, onde b é uma constante. Estaremos então considerando, realmente, uma função de uma única variável x , a saber, $g(x) = f(x, b)$. Se g tem derivada em a , nós a chamaremos **derivada parcial de f em relação a x em (a, b)** e a denotaremos por $f_x(a, b)$. Assim,

$$\boxed{f_x(a, b) = g'(a) \quad \text{onde} \quad g(x) = f(x, b)}$$

Pela definição de derivada, temos

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

e assim a Equação 1 fica

2

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

Da mesma forma, a **derivada parcial de f em relação a y em (a, b)** , denotada por $f_y(a, b)$, é obtida mantendo-se x fixo ($x = a$) e determinando-se a derivada ordinária em b da função $G(y) = f(a, y)$:

3

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

Com essa notação para as derivadas parciais, podemos escrever as razões de variação do índice de calor I com relação à temperatura real T e umidade relativa H quando $T = 96^\circ\text{F}$ e $H = 70\%$ como se segue:

$$f_T(96, 70) \approx 3,75 \qquad f_H(96, 70) \approx 0,9$$

Se agora deixamos o ponto (a, b) variar nas Equações 2 e 3, f_x e f_y se tornam funções de duas variáveis.

4 Se f é uma função de duas variáveis, suas **derivadas parciais** são as funções f_x e f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Existem diversas notações alternativas para as derivadas parciais. Por exemplo, em vez de f_x , podemos escrever f_1 ou D_1f (para indicar a diferenciação em relação à *primeira* variável) ou $\partial f/\partial x$. Mas $\partial f/\partial x$ não pode ser interpretada como a razão dos diferenciais.

Notação para as Derivadas Parciais Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1f = D_xf$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2f = D_yf$$

Para calcular as derivadas parciais, tudo o que temos a fazer é nos lembrarmos de que da Equação 1 a derivada parcial com relação a x é a derivada *ordinária* da função g de uma única variável obtida, mantendo-se fixo o valor de y . Então, temos a seguinte regra.

Regra para Determinar a Derivada Parcial de $z = f(x, y)$

1. Para achar f_x , olhe y como uma constante e diferencie $f(x, y)$ com relação a x .
2. Para achar f_y , olhe x como uma constante e diferencie $f(x, y)$ com relação a y .

EXEMPLO 1 □ Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

SOLUÇÃO Mantendo y constante e diferenciando em relação a x , obtemos

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

e assim

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Mantendo x constante e diferenciando em relação a y , obtemos

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

Interpretação das Derivadas Parciais

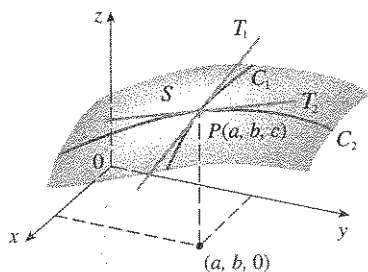


FIGURA 1
As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes C_1 e C_2 .

Para dar uma interpretação geométrica para as derivadas parciais, lembremo-nos de que a equação $z = f(x, y)$ representa a superfície S (o gráfico de f). Se $f(a, b) = c$, então o ponto $P(a, b, c)$ pertence a S . Fixando $y = b$, restringimos nossa atenção à curva C_1 na qual o plano vertical $y = b$ intercepta S . (Ou seja, C_1 é o traço de S no plano $y = b$.) Da mesma forma, o plano vertical $x = a$ intercepta S na curva C_2 . As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto P (veja a Figura 1).

Note que a curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$, de modo que a inclinação da tangente T_1 em P é $g'(a) = f_x(a, b)$. A curva C_2 é o gráfico da função $G(y) = f(a, y)$, de modo que a inclinação da tangente T_2 em P é $G'(b) = f_y(a, b)$.

Então, as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em $P(a, b, c)$ aos traços C_1 e C_2 de S nos planos $y = b$ e $x = a$.

Como vimos no caso da função índice de calor, as derivadas parciais podem ser interpretadas como *taxas de variação*. Se $z = f(x, y)$, então $\partial z / \partial x$ representa a taxa de variação de z com relação a x quando y é mantido fixo. Da mesma forma, $\partial z / \partial y$ representa a taxa de variação de z em relação a y quando x é mantido fixo.

EXEMPLO 2 □ Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, ache $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

SOLUÇÃO Temos

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= -2x & f_y(x, y) &= -4y \\ f_x(1, 1) &= -2 & f_y(1, 1) &= -4 \end{aligned}$$

O gráfico de f é o parabolóide $z = 4 - x^2 - 2y^2$, e o plano vertical $y = 1$ intercepta-o na parábola $z = 2 - x^2$, $y = 1$. (Como na discussão precedente, indicamos por C_1 na Figura 2.) A inclinação da reta tangente à parábola no ponto $(1, 1, 1)$ é $f_x(1, 1) = -2$.

Da mesma forma, a curva C_2 na qual o plano $x = 1$ intercepta o parabolóide é a parábola $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$, e a inclinação da reta tangente em $(1, 1, 1)$ é $f_y(1, 1) = -4$. (Veja a Figura 3.)

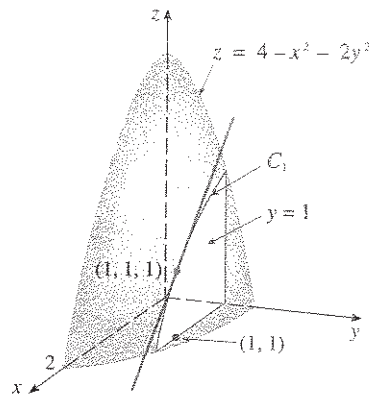


FIGURA 2

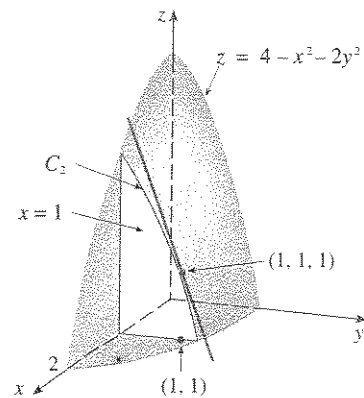


FIGURA 3

A Figura 4 nos mostra o gráfico desenhado pelo computador correspondente à Figura 2. A Parte (a) exibe o plano $y = 1$ interceptando a superfície para formar a curva C_1 , e a Parte (b) mostra C_1 e T_1 . [Usamos a equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 2 - t^2 \rangle$ para C_1 e $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1 - 2t \rangle$ para T_1 .] Do mesmo modo, a Figura 5 corresponde à Figura 3.

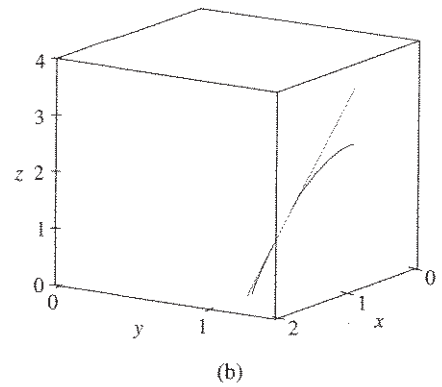
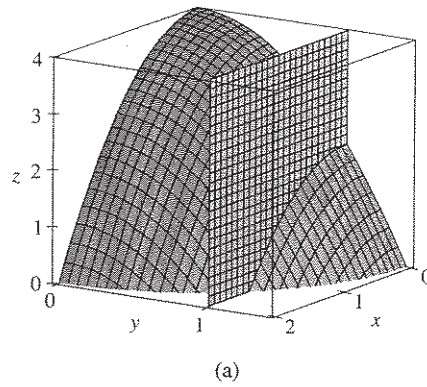


FIGURA 4

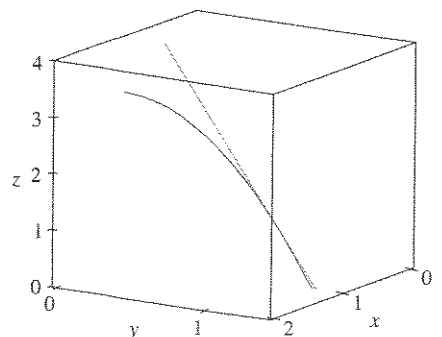
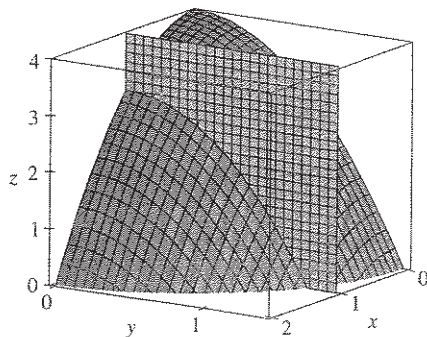


FIGURA 5

EXEMPLO 3 □ Se $f(x, y) = \text{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

SOLUÇÃO Usando a Regra da Cadeia para a função de uma variável, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2} \end{aligned}$$

□ Alguns sistemas algébricos computacionais podem plotar superfícies definidas por equações implícitas com três variáveis. A Figura 6 mostra o desenho da superfície definida implicitamente, dada no Exemplo 4.



FIGURA 6

EXEMPLO 4 □ Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

SOLUÇÃO Para achar $\partial z/\partial x$, derivamos implicitamente em relação a x , tomando o cuidado de tratar y como constante:

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Resolvendo essa equação em relação a $\partial z/\partial x$, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

Da mesma forma, derivando implicitamente em relação a y temos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

■ Função de Mais do Que Duas Variáveis

Derivadas parciais podem ser definidas para funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, se f é uma função de três variáveis x , y e z , então sua derivada parcial em relação a x é definida como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

e pode ser encontrada, olhando-se y e z como constantes e diferenciando-se $f(x, y, z)$ com relação a x . Se $w = f(x, y, z)$, então $f_x = \partial w/\partial x$ pode ser interpretada como a taxa de variação de w em relação a x quando y e z são mantidos fixos. Entretanto, não podemos interpretar geometricamente, porque o gráfico de f pertence ao espaço de dimensão quatro.

Em geral, se u é uma função de n variáveis, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sua derivada parcial em relação à i -ésima variável x_i é

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

e podemos escrever

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

EXEMPLO 5 □ Determine f_x , f_y , e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

SOLUÇÃO Mantendo constantes y e z e diferenciando em relação a x , temos

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

Da mesma forma, $f_y = xe^{xy} \ln z$ e $f_z = \frac{e^{xy}}{z}$

Derivadas de Maior Ordem

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais f_x e f_y são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$, chamadas **derivadas parciais de segunda ordem** de f . Se $z = f(x, y)$, usamos a seguinte notação:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Portanto a notação f_{xy} (ou $\partial^2 f / \partial y \partial x$) significa que primeiro derivamos com relação a x e depois em relação a y , ao passo que no cálculo de f_{yx} a ordem é invertida.

EXEMPLO 6 □ Determine as derivadas parciais de segunda ordem de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

SOLUÇÃO No Exemplo 1 achamos que

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Logo,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4 \quad \square$$

□ A Figura 7 mostra o gráfico da função f do Exemplo 6 e os gráficos de suas derivadas parciais de primeira e segunda ordens para $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$. Note que esses gráficos são consistentes com nossa interpretação de f_x e f_y como inclinação da reta tangente aos traços do gráfico de f . Por exemplo: o gráfico de f decresce se iniciamos em $(0, -2)$ e nos movemos no sentido de x positivo. Isso é refletido nos valores negativos de f_x . Devemos comparar os gráficos de f_{xy} e f_{yx} com f_y para ver as relações.

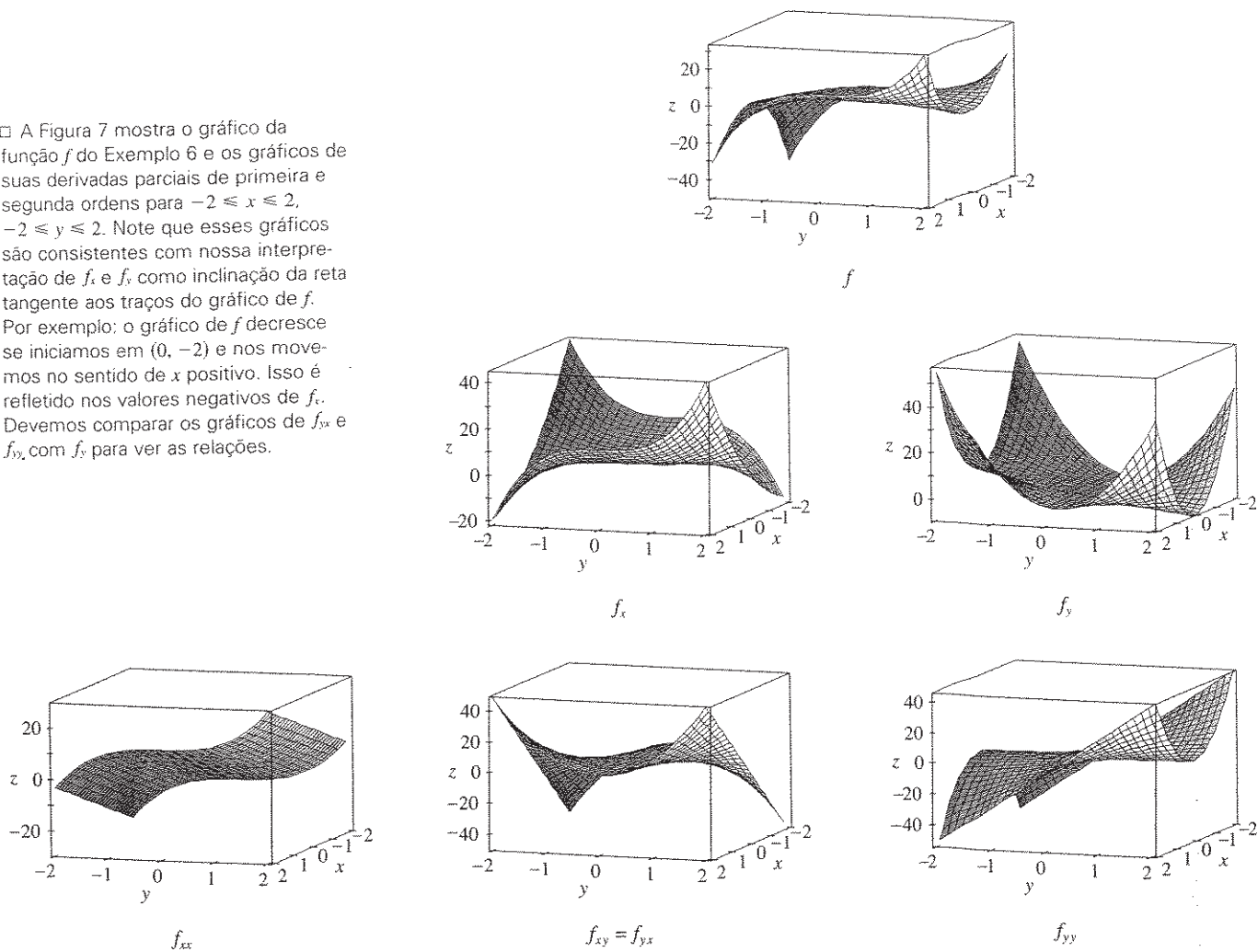


FIGURA 7

Note que $f_{xy} = f_{yx}$ no Exemplo 6. Isso não é só uma coincidência. As derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática. O próximo teorema, do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765), fornece condições sob as quais podemos afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$. A prova é feita no Apêndice F.

Teorema de Clairaut Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b) . Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D , então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

□ Alexis Clairaut foi uma criança prodígio na matemática: aos 10 anos leu o texto de cálculo de L'Hôpital, e aos 13 apresentou um artigo sobre geometria na Academia Francesa de Ciências. Aos 18 anos Clairaut publicou *Recherches sur les courbes à double courbure*, o primeiro tratado sistemático em geometria analítica tridimensional, em que incluiu o cálculo de curvas espaciais.

As derivadas parciais de ordem 3 ou maior também podem ser definidas. Por exemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

e usando o Teorema de Clairaut podemos mostrar que $f_{xy} = f_{yx} = f_{yx}$ se essas funções forem contínuas.

EXEMPLO 7 □ Calcule f_{xyz} se $f(x, y, z) = \text{sen}(3x + yz)$.

SOLUÇÃO

$$f_x = 3 \cos(3x + yz)$$

$$f_{xx} = -9 \text{sen}(3x + yz)$$

$$f_{xy} = -9z \cos(3x + yz)$$

$$f_{xyz} = -9 \cos(3x + yz) + 9yz \text{sen}(3x + yz) \quad \square$$

Equações Diferenciais Parciais

As derivadas parciais ocorrem em *equações diferenciais parciais* que exprimem algumas leis físicas. Por exemplo, a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é denominada **equação de Laplace** em homenagem a Pierre Laplace (1749-1827). As soluções dessa equação são chamadas **funções harmônicas** e são muito importantes no estudo de condução de calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

EXEMPLO 8 □ Mostre que a função $u(x, y) = e^x \text{sen } y$ é solução da equação de Laplace.

SOLUÇÃO

$$u_x = e^x \text{sen } y \qquad u_y = e^x \cos y$$

$$u_{xx} = e^x \text{sen } y \qquad u_{yy} = -e^x \text{sen } y$$

$$u_{xx} + u_{yy} = e^x \text{sen } y - e^x \text{sen } y = 0$$

Portanto, u satisfaz a equação de Laplace. □

A equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve o movimento de uma onda, que pode ser do mar, de som, luminosa ou se movendo em uma corda vibrante. Por exemplo, se $u(x, t)$ representa o deslocamento da corda vibrante de violino no instante t e a distância x de um dos terminos da corda (como na Figura 8), então $u(x, t)$ satisfaz a equação da onda. A constante a depende da densidade da corda e da tensão aplicada nela.

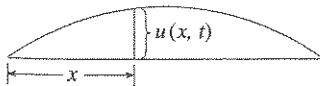


FIGURA 8

EXEMPLO 9 □ Verifique que a função $u(x, t) = \text{sen}(x - at)$ satisfaz a equação da onda.

SOLUÇÃO

$$u_x = \cos(x - at) \qquad u_{xx} = -\text{sen}(x - at)$$

$$u_t = -a \cos(x - at) \qquad u_{tt} = -a^2 \text{sen}(x - at) = a^2 u_{xx}$$

Então u satisfaz a equação da onda. □

A Função de Produção de Cobb-Douglas

No Exemplo 3 da Seção 14.1 descrevemos o trabalho de Cobb e Douglas para modelar a produção total P de um sistema econômico como função da quantidade de trabalho L e do capital investido K . Usaremos agora as derivadas parciais para mostrar como a forma particular de modelo que eles tomaram segue de certas hipóteses que eles fizeram sobre economia.

Se a função de produção é denotada por $P = P(L, K)$, a derivada parcial $\partial P/\partial L$ é a taxa de variação da produção em relação à quantidade de trabalho. Os economistas chamam isso de produção marginal em relação ao trabalho, ou *produtividade marginal do trabalho*. Da mesma forma, a derivada parcial $\partial P/\partial K$ é a taxa de variação da produção em relação ao capital investido, e é denominada *produtividade marginal do capital*. Nesses termos, as hipóteses feitas por Cobb e Douglas podem ser estabelecidas da seguinte forma:

- (i) Se ou o trabalho ou o capital desaparecem, o mesmo acontece com a produção.
- (ii) A produtividade marginal do trabalho é proporcional à quantidade de produção por unidade de trabalho.
- (iii) A produtividade marginal do capital é proporcional à quantidade de produção por unidade de capital.

Como a produção por unidade de trabalho é P/L , a hipótese (ii) diz

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$$

para alguma constante α . Se mantivermos K constante ($K = K_0$), então essa equação diferencial parcial se transforma na equação diferencial ordinária:

$$\boxed{5} \quad \frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

Se resolvermos essa equação diferencial separável pelos métodos da Seção 9.3 (veja também o Exercício 75), obteremos

$$\boxed{6} \quad P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$$

Note que escrevemos a constante C_1 como função de K_0 porque ela pode depender do valor de K_0 .

Igualmente, a hipótese (iii) diz que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

e podemos resolver essa equação diferencial obtendo

$$\boxed{7} \quad P(L_0, K) = C_2(L_0)K^\beta$$

Comparando as Equações 6 e 7, temos

$$\boxed{8} \quad P(L, K) = bL^\alpha K^\beta$$

onde b é uma constante independente de L e de K . A hipótese (i) mostra que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Note da Equação 8 que, se o trabalho e o capital são ambos aumentados por um fator m , temos

$$P(mL, mK) = b(mL)^\alpha(mK)^\beta = m^{\alpha+\beta}bL^\alpha K^\beta = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Se $\alpha + \beta = 1$, então $P(mL, mK) = mP(L, K)$, o que significa que a produção também é aumentada pelo fator m . Essa é a razão pela qual Cobb e Douglas supuseram que $\alpha + \beta = 1$ e portanto

$$P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}$$

Essa é a função de produção discutida na Seção 14.1.

14.3

Exercícios

- A temperatura T de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude x , da latitude y e do tempo t , de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$. Vamos medir o tempo em horas do princípio de janeiro.
 - Qual é o significado das derivadas parciais $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial t$?
 - Honolulu tem longitude de 158°W e latitude de 21°N . Suponha que às 9 horas em 1° de janeiro esteja ventando do noroeste uma brisa quente, de forma que a oeste e a sul o ar esteja quente e a norte e leste o ar esteja frio. Você esperaria $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ e $f_t(158, 21, 9)$ serem positivos ou negativos? Explique.
- No começo desta seção discutimos a função $I = f(T, H)$, onde I era o índice de calor; T , a temperatura; e H , a umidade relativa. Utilize a Tabela 1 para estimar $f_T(92, 60)$ e $f_H(92, 60)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?
- O índice sensação térmica W é a temperatura que se sente quando a temperatura real for T e a rapidez do vento, v , portanto podemos escrever $W = f(T, v)$. A Tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real T °C	Velocidade do vento (km/h)						
	v	20	30	40	50	60	70
-10	-18	-20	-21	-22	-23	-23	-23
-15	-24	-26	-27	-29	-30	-30	-30
-20	-30	-33	-34	-35	-36	-37	-37
-25	-37	-39	-41	-42	-43	-44	-44

- Estime os valores de $f_T(-15, 30)$ e $f_v(-15, 30)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

- Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de $\partial W/\partial T$ e $\partial W/\partial v$?

- Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

- A altura h das ondas em mar aberto depende da velocidade v do vento e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados em pés na tabela.

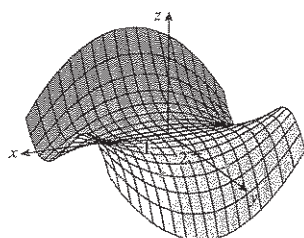
Duração (horas)

Velocidade do vento (nós)	Duração (horas)							
	t	5	10	15	20	30	40	50
v	10	2	2	2	2	2	2	2
	15	4	4	5	5	5	5	5
	20	5	7	8	8	9	9	9
	30	9	13	16	17	18	19	19
	40	14	21	25	28	31	33	33
	50	19	29	36	40	45	48	50
	60	24	37	47	54	62	67	69

- Qual o significado das derivadas parciais $\partial h/\partial v$ e $\partial h/\partial t$?
- Estime os valores de $f_v(40, 15)$ e $f_t(40, 15)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?
- Qual parece ser o valor do seguinte limite?

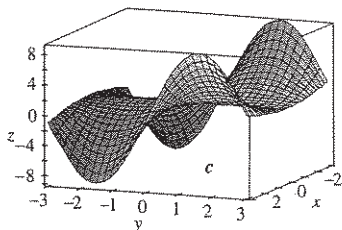
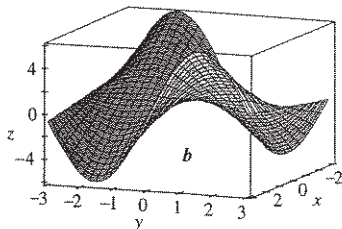
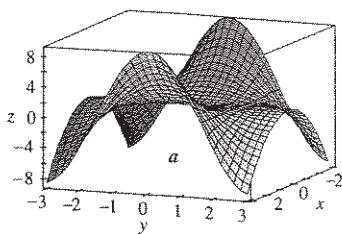
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

5-6 □ Determine os sinais das derivadas parciais da função f cujo gráfico está mostrado.

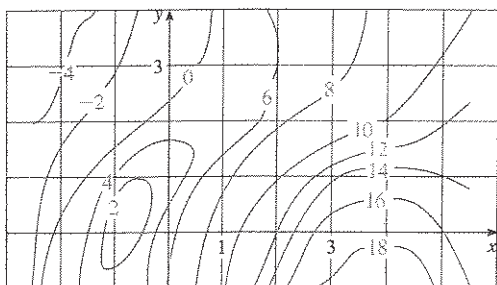


5. (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$
 6. (a) $f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$
 (c) $f_{xx}(-1, 2)$ (d) $f_{yy}(-1, 2)$

7. As seguintes superfícies, rotuladas a , b e c , são gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais f_x e f_y . Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.



8. É dado o mapa de contorno de uma função f . Use-o para estimar $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.



9. Se $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.
 10. Se $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

11-12 □ Determine f_x e f_y e faça o gráfico de f , f_x e f_y com domínios e pontos de vista que permitam ver a relação entre eles.

11. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y$ 12. $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$

13-34 □ Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

13. $f(x, y) = 3x - 2y^4$
 14. $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$
 15. $z = xe^{3y}$ 16. $z = y \ln x$

17. $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ 18. $f(x, y) = x^y$

19. $w = \sin \alpha \cos \beta$ 20. $f(s, t) = st^2/(s^2 + t^2)$
 21. $f(r, s) = r \ln(r^2 + s^2)$ 22. $f(x, t) = \arctg(x\sqrt{t})$

23. $u = te^{w/t}$ 24. $f(x, y) = \int_y^x \cos(t^2) dt$

25. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3yz$ 26. $f(x, y, z) = x^2e^{yz}$

27. $w = \ln(x + 2y + 3z)$ 28. $w = \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}$

29. $u = xe^{-t} \sin \theta$ 30. $u = x^{y/z}$

31. $f(x, y, z, t) = xyz^2 \operatorname{tg}(yt)$ 32. $f(x, y, z, t) = \frac{xy^2}{t + 2z}$

33. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

34. $u = \sin(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n)$

35-38 □ Determine as derivadas parciais indicadas.

35. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $f_x(3, 4)$
 36. $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$; $f_y(-6, 4)$
 37. $f(x, y, z) = x/(y + z)$; $f_z(3, 2, 1)$
 38. $f(u, v, w) = w \operatorname{tg}(uv)$; $f_v(2, 0, 3)$

39-40 □ Use a definição de derivadas parciais como limites (4) para achar $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

39. $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ 40. $f(x, y) = \sqrt{3x - y}$

41-44 □ Use a diferenciação implícita para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

41. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ 42. $yz = \ln(x + z)$
 43. $x - z = \arctg(yz)$ 44. $\sin(xyz) = x + 2y + 3z$

45-46 □ Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

45. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$
 46. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$
 (c) $z = f(x/y)$

47–52 □ Determine as derivadas parciais de segunda ordem.

47. $f(x, y) = x^4 - 3x^2y^3$ 48. $f(x, y) = \ln(3x + 5y)$

49. $z = x/(x + y)$ 50. $z = y \operatorname{tg} 2x$

51. $u = e^{-t} \operatorname{sen} t$ 52. $v = \sqrt{x + y^2}$

53–56 □ Verifique se as conclusões do Teorema de Clairaut são verdadeiras, isto é, se $u_{xy} = u_{yx}$.

53. $u = x \operatorname{sen}(x + 2y)$ 54. $u = x^4y^2 - 2xy^5$

55. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 56. $u = xye^y$

57–64 □ Determine as derivadas parciais indicadas.

57. $f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2$; f_{xxy} , f_{yyy}

58. $f(x, t) = x^2e^{-ct}$; f_{ttt} , f_{ttx}

59. $f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z)$; f_{xyz} , f_{yzz}

60. $f(r, s, t) = r \ln(rs^2t^3)$; f_{rst} , f_{rst}

61. $u = e^{r\theta} \operatorname{sen} \theta$; $\frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$

62. $z = u\sqrt{v-w}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial u \partial v \partial w}$

63. $w = \frac{x}{y+2z}$; $\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$

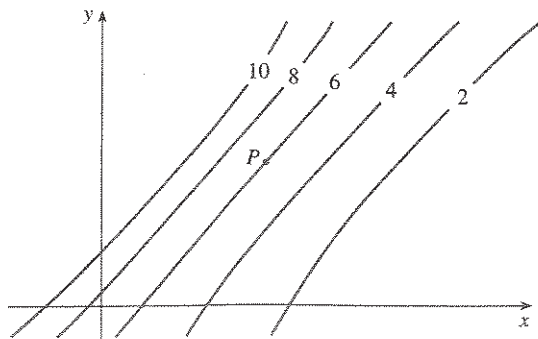
64. $u = x^a y^b z^c$; $\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$

65. Use a tabela de valores de $f(x, y)$ para estimar os valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2.2)$ e $f_{xy}(3, 2)$.

$x \backslash y$	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

66. São mostradas as curvas de nível de uma função f . Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto P .

- (a) f_x (b) f_y (c) f_{xx}
 (d) f_{xy} (e) f_{yy}



67. Verifique se a função $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \operatorname{sen} kx$ é solução da equação de condução do calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

68. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

- (a) $u = x^2 + y^2$
 (b) $u = x^2 - y^2$
 (c) $u = x^3 + 3xy^2$
 (d) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
 (e) $u = \operatorname{sen} x \cosh y + \cos x \operatorname{senh} y$
 (f) $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

69. Verifique se a função $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a solução da equação de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

70. Mostre que cada uma das seguintes funções é a solução da equação da onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

- (a) $u = \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(akt)$
 (b) $u = t/(a^2 t^2 - x^2)$
 (c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
 (d) $u = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

71. Se f e g são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda dada no Exercício 70.

72. Se $u = e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}$, onde $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

73. Mostre que a função $z = xe^y + ye^x$ é uma solução da equação

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

74. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^\beta$ satisfaz a equação

$$L \frac{\partial P}{\partial L} + K \frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

75. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas satisfaz $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$ resolvendo a equação diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

(Veja a Equação 5.)

76. A temperatura em um ponto (x, y) de uma placa plana de metal é dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, onde T é medido em °C e x, y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura com relação à distância no ponto $(2, 1)$ em (a) a direção do eixo x e (b) a direção do eixo y .

77. A resistência total R produzida por três condutores com resistências R_1, R_2 e R_3 conectados em paralelo em um circuito elétrico é dada pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine $\partial R / \partial R_1$.

78. A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T , pressão P e volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

79. Para o gás ideal do Exercício 78, mostre que

$$T \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

80. O índice sensação térmica é modelado pela função

$$W = 13,12 + 0,6215T - 11,37v^{0,16} + 0,3965Tv^{0,16}$$

onde T é a temperatura ($^{\circ}\text{C}$) e v , a velocidade do vento (km/h). Quando $T = -15^{\circ}\text{C}$ e $v = 30$ km/h quanto você espera que a temperatura aparente caia se a temperatura real decrescer em 1°C ? E se a velocidade do vento aumentar em 1 km/h?

81. A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é $K = \frac{1}{2}mv^2$. Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

82. Se a , b e c são os lados de um triângulo e A , B e C são os ângulos opostos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$ e $\partial A/\partial c$ pela diferenciação implícita da Lei dos Cossenos.

83. Foi dito que existe uma função f cujas derivadas parciais são $f_x(x, y) = x + 4y$ e $f_y(x, y) = 3x - y$ e cujas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas. Você deve acreditar nisso?

84. O parabolóide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ intercepta o plano $x = 1$ em uma parábola. Determine as equações paramétricas para a reta tangente a essa parábola no ponto $(1, 2, -4)$. Use um computador para fazer o gráfico do parabolóide, da parábola e da reta tangente em uma mesma tela.

85. O elipsóide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ intercepta o plano $y = 2$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente à elipse no ponto $(1, 2, 2)$.

86. No estudo de penetração do congelamento achou-se que a temperatura T no instante t (medido em dias) a uma

profundidade x (medida em pés) pode ser modelada pela função

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

onde $\omega = 2\pi/365$ e λ é uma constante positiva.

(a) Determine $\partial T/\partial x$. Qual seu significado físico?

(b) Determine $\partial T/\partial t$. Qual seu significado físico?

(c) Mostre que T satisfaz a equação do calor $T_t = kT_{xx}$ para uma certa constante k .

(d) Se $\lambda = 0,2$, $T_0 = 0$ e $T_1 = 10$, use um computador para traçar o gráfico de $T(x, t)$.

(e) Qual é o significado físico do termo $-\lambda x$ na expressão $\sin(\omega t - \lambda x)$?

87. Utilize o Teorema de Clairaut para mostrar que, se a derivada parcial de terceira ordem de f é contínua, então

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

88. (a) Quantas derivadas de n -ésima ordem tem uma função de duas variáveis?

(b) Se essas derivadas parciais forem contínuas, quantas distintas existirão?

(c) Responda a parte (a) da questão para uma função de três variáveis.

89. Se $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2} e^{\sin(x^3y)}$, determine $f_x(1, 0)$.

[Dica: Em vez de achar $f_x(x, y)$ primeiro, note que é mais fácil utilizar a Equação 1 ou a Equação 2.]

90. Se $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

91. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Use um computador para traçar o gráfico de f .

(b) Determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ quando $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) Determine $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ usando as Equações 2 e 3.

(d) Mostre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ e $f_{yx}(0, 0) = 1$.

(e) O resultado da parte (d) contradiz o Teorema de Clairaut? Use os gráficos de f_{xy} e f_{yx} para ilustrar sua resposta.

14.4

Planos Tangentes e Aproximações Lineares

Uma das idéias mais importantes em cálculo de funções com uma única variável é que, à medida que ampliamos o gráfico de uma função diferenciável perto de um ponto, vendo cada vez uma região menor do todo, esse gráfico vai se tornando indistinguível de sua reta tangente, e podemos aproximar a função por uma função linear (veja a Seção 3.11 do Volume I). Desenvolveremos idéias semelhantes em três dimensões. À medida que damos um *zoom* em um ponto pertencente à uma superfície, que é o gráfico de uma função

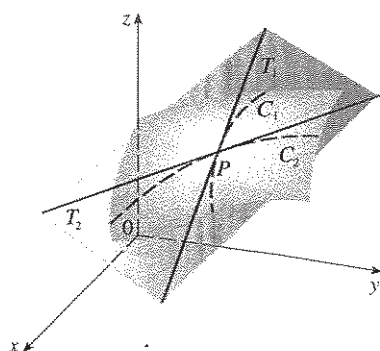


FIGURA 1
O plano tangente contém as retas tangentes T_1 e T_2

Planos Tangentes

Suponha que a superfície S tenha equação $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em S . Como na seção anterior, sejam C_1 e C_2 curvas obtidas pela interseção de S com os planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$. O ponto P pertence à interseção de C_1 com C_2 . Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes às curvas C_1 e C_2 no ponto P . Então, o **plano tangente** à superfície S no ponto P é definido como o plano que contém as duas retas tangentes T_1 e T_2 . (Veja a Figura 1.)

Veremos na Seção 14.6 que, se C é outra curva qualquer que esteja contida na superfície S e que passe pelo ponto P , então sua reta tangente no ponto P também pertence ao plano tangente. Portanto podemos pensar no plano tangente a S em P como o plano que contém todas as retas tangentes a curvas contidas em S que passam pelo ponto P . O plano tangente em P é o plano que mais se aproxima da superfície S perto do ponto P .

Sabemos da Equação 12.5.7 que qualquer plano passando pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ tem equação da forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dividindo essa equação por C e tomando $a = -A/C$ e $b = -B/C$, podemos escrevê-la como

$$\text{[1]} \quad z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Se a Equação 1 representa o plano tangente em P , sua interseção com o plano $y = y_0$ precisa ser a reta T_1 . Impondo $y = y_0$ na Equação 1, obtemos

$$z - z_0 = a(x - x_0) \quad y = y_0$$

que reconhecemos como a equação da reta (na forma de ponto, inclinação) com inclinação a . Mas da Seção 14.3 sabemos que a inclinação de T_1 é $f'_x(x_0, y_0)$. Assim, $a = f'_x(x_0, y_0)$.

Da mesma forma, tomando $x = x_0$ na Equação 1, obtemos $z - z_0 = b(y - y_0)$, que precisa representar a reta tangente T_2 , e portanto $b = f'_y(x_0, y_0)$.

□ Note a semelhança entre a equação do plano tangente e a equação da reta tangente

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

□ Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

EXEMPLO 1 □ Determine o plano tangente ao parabolóide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$.

SOLUÇÃO Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Então

$$f'_x(x, y) = 4x \quad f'_y(x, y) = 2y$$

$$f'_x(1, 1) = 4 \quad f'_y(1, 1) = 2$$

Portanto, por (2), temos a equação do plano tangente em $(1, 1, 3)$

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

ou

$$z = 4x + 2y - 3$$

A Figura 2(a) mostra o parabolóide elíptico e seu plano tangente em (1, 1, 3) que encontramos no Exemplo 1. Na parte (b) e (c) fazemos uma ampliação da região em torno do ponto (1, 1, 3) diminuindo a janela de inspeção da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Note que, quanto mais ampliamos a região próxima ao ponto, mais plano parece o gráfico da superfície se confundindo com o plano tangente.

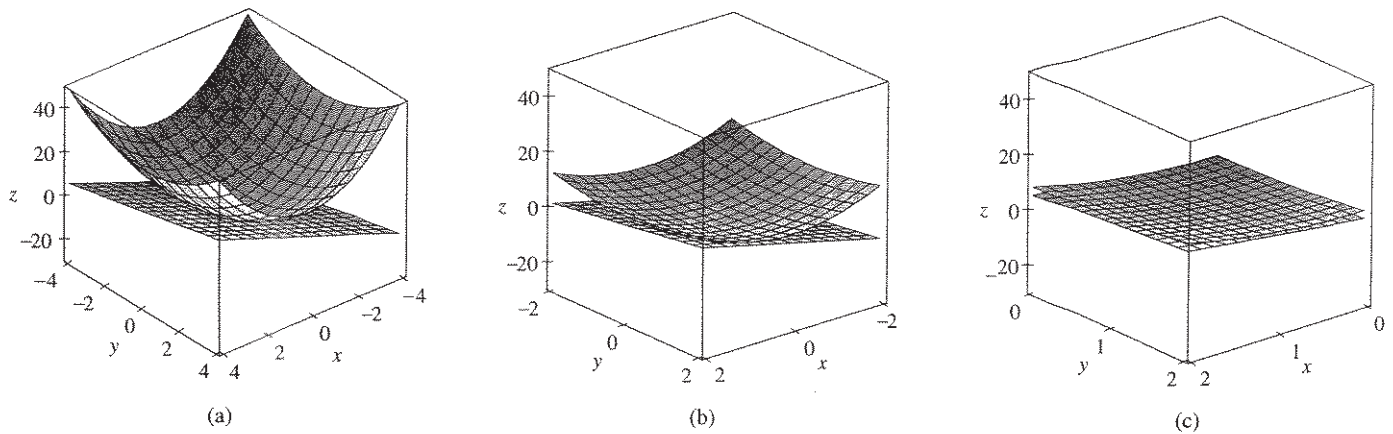


FIGURA 2 O parabolóide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ parece coincidir com o plano tangente quando ampliamos a região próxima de (1, 1, 3).

Na Figura 3 reforçamos essa impressão fazendo uma ampliação das curvas de contorno da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ próximas ao ponto (1, 1). Observe que, quanto mais ampliamos, mais as curvas de nível parecem retas igualmente espaçadas, o que caracteriza uma região plana.

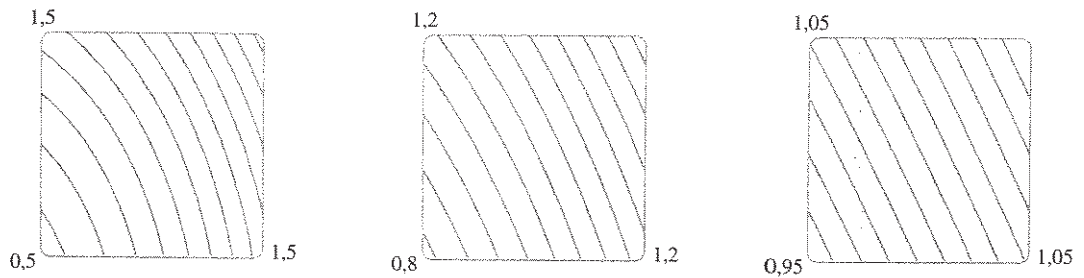


FIGURA 3 Ampliando perto do ponto (1, 1) no diagrama de contorno de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

■ Aproximação Linear

No Exemplo 1 achamos que a equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ no ponto (1, 1, 3) é $z = 4x + 2y - 3$. Portanto, em vista da evidência visual nas Figuras 2 e 3, a função linear de duas variáveis

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

é uma boa aproximação de $f(x, y)$ quando (x, y) está próximo de (1, 1). A função L é chamada *linearização* de f em (1, 1), e a aproximação

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

é denominada *aproximação linear* ou *aproximação pelo plano tangente* de f em (1, 1).

Por exemplo, no ponto (1,1; 0,95), a aproximação linear fornece

$$f(1,1; 0,95) \approx 4(1,1) + 2(0,95) - 3 = 3,3$$

que está bastante próximo do valor verdadeiro de $f(1,1, 0,95) = 2(1,1)^2 + (0,95)^2 = 3,3225$. Se entretanto tomarmos um ponto longe de $(1, 1)$, como $(2, 3)$, não teremos mais uma boa aproximação. De fato, $L(2, 3) = 11$ ao passo que $f(2, 3) = 17$.

Em geral sabemos de (2) que uma equação do plano tangente ao gráfico de uma função que tem derivadas parciais contínuas f de duas variáveis em um ponto $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

A função linear cujo gráfico é esse plano tangente, a saber,

$$\boxed{3} \quad L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é denominada **linearização** de f em (a, b) , e a aproximação

$$\boxed{4} \quad f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é chamada **aproximação linear** ou **aproximação pelo plano tangente** de f em (a, b) .

Temos definido o plano tangente para as superfícies $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas. O que acontece se f_x e f_y não são contínuas? A Figura 4 apresenta uma tal função. Sua equação é

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Podemos verificar (veja o Exercício 42) que suas derivadas parciais existem na origem e são $f_x(0, 0) = 0$ e $f_y(0, 0) = 0$, mas f_x e f_y não são contínuas. A aproximação linear seria $f(x, y) \approx 0$, porém $f(x, y) = \frac{1}{2}$ para todos os pontos da reta $y = x$. Portanto uma função de duas variáveis pode se comportar muito mal, mesmo se suas derivadas parciais existirem. Para evitar esse comportamento, introduzimos a idéia de função diferenciável de duas variáveis.

Lembremo-nos de que para uma função de uma variável, $y = f(x)$, se x varia de a para $a + \Delta x$, definimos o incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

No Capítulo 3 do Volume I mostramos que, se f é diferenciável em a , então

$$\boxed{5} \quad \Delta y = f'(a) \Delta x + \varepsilon \Delta x \quad \text{onde } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0$$

Considere agora uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, e suponha que x varie de a para $a + \Delta x$ e y varie de b para $b + \Delta y$. Então o **incremento** correspondente de z é

$$\boxed{6} \quad \Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Portanto o incremento Δz representa a variação de valor de f quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Por analogia a (5) definimos a diferenciabilidade de uma função de duas variáveis como se segue.

7 Definição Se $z = f(x, y)$, então f é **diferenciável** em (a, b) se Δz pode ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

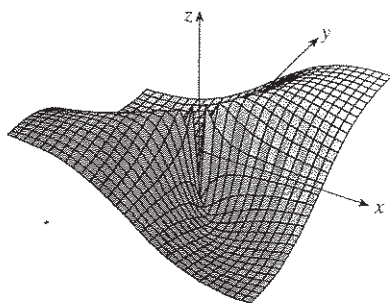


FIGURA 4

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ se } (x, y) \neq (0, 0), \\ f(0, 0) = 0$$

□ Esta é a Equação 3.5.7.

A Definição 7 diz que uma função diferenciável é aquela para a qual a aproximação linear (4) é uma boa aproximação quando (x, y) está próximo de (a, b) . Em outras palavras, o plano tangente aproxima bem o gráfico de f perto do ponto de tangência.

Algumas vezes é difícil usar a Definição 7 diretamente para checar a diferenciabilidade da função, mas o próximo teorema nos dá uma condição suficiente de forma conveniente para verificar a diferenciabilidade.

8 Teorema Se as derivadas parciais f_x e f_y existem perto do ponto (a, b) e são contínuas em (a, b) , então f é diferenciável em (a, b) .

□ O Teorema 8 será provado no Apêndice F.

EXEMPLO 2 □ Mostre que $f(x, y) = xe^{xy}$ é diferenciável em $(1, 0)$ e determine sua linearização ali. Em seguida use a linearização para aproximar $f(1,1, -0,1)$.

SOLUÇÃO As derivadas parciais são

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_y(x, y) = x^2e^{xy}$$

$$f_x(1, 0) = 1 \qquad f_y(1, 0) = 1$$

Ambas f_x e f_y são funções contínuas. Portanto, pelo Teorema 8, f é diferenciável. A linearização é dada por

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \\ &= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y \end{aligned}$$

A aproximação linear correspondente é

$$xe^{xy} \approx x + y$$

portanto

$$f(1,1, -0,1) \approx 1,1 - 0,1 = 1$$

Compare esse valor com o valor real de $f(1,1, -0,1) = 1,1e^{-0,11} \approx 0,98542$. □

EXEMPLO 3 □ No início da Seção 14.3 discutimos o índice de calor (sensação de calor) I como uma função da temperatura real T e da umidade relativa H e fornecemos a seguinte tabela de valores do Serviço Nacional de Previsão do Tempo norte-americano.

		Umidade relativa (%)									
		H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Temperatura real (°F)	T	90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
	92	100	103	105	108	112	115	119	123	128	
	94	104	107	111	114	118	122	127	132	137	
	96	109	113	116	121	125	130	135	141	146	
	98	114	118	123	127	133	138	144	150	157	
	100	119	124	129	135	141	147	154	161	168	

Determine a aproximação linear para o índice de calor $I = f(T, H)$ quando T está próximo de 96°F e H está próximo de 70% . Use essa estimativa do índice de calor quando a temperatura estiver a 97°F e a umidade relativa for 72% .

□ A Figura 5 mostra o gráfico da função f e sua linearização L no Exemplo 2.

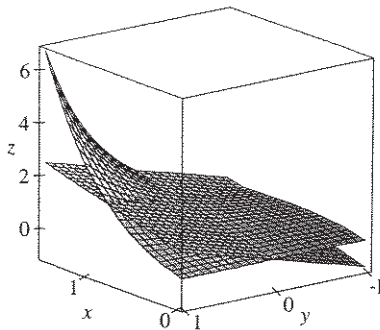


FIGURA 5

SOLUÇÃO Lemos na tabela que $f(96, 70) = 125$. Na Seção 14.3 usamos os valores tabelados para estimar $f_T(96, 70) \approx 3,75$ e $f_H(96, 70) \approx 0,9$ (veja páginas 907-908). Assim a aproximação linear é

$$\begin{aligned} f(T, H) &\approx f(96, 70) + f_T(96, 70)(T - 96) + f_H(96, 70)(H - 70) \\ &\approx 125 + 3,75(T - 96) + 0,9(H - 70) \end{aligned}$$

Em particular,

$$f(97, 72) \approx 125 + 3,75(1) + 0,9(2) = 130,55$$

Portanto, quando $T = 97^\circ\text{F}$ e $H = 72\%$, o índice de calor é

$$I \approx 131^\circ\text{F}$$

Diferenciais

Para uma função de uma única variável, $y = f(x)$, definimos o diferencial dx como uma variável independente; ou seja, dx pode valer qualquer número real. O diferencial de y é definido como

$$\boxed{9} \quad dy = f'(x) dx$$

(Veja a Seção 3.11 no Volume I.) A Figura 6 mostra as relações entre o incremento Δy e o diferencial dy : Δy representa a variação de altura da curva $y = f(x)$ e dy representa a variação de altura da reta tangente quando x varia da quantidade $dx = \Delta x$.

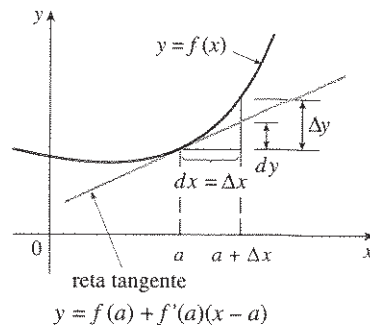


FIGURA 6

Para uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, definimos os **diferenciais** dx e dy como variáveis independentes; ou seja, podem ter qualquer valor. Então o **diferencial** dz , também chamado **diferencial total**, é definido por

$$\boxed{10} \quad dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

(Compare com a Equação 9.) Algumas vezes a notação df é usada no lugar de dz .

Se tomamos $dx = \Delta x = x - a$ e $dy = \Delta y = y - b$ na Equação 10, então a diferencial de z é

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

E assim, com a notação de diferencial, a aproximação linear (4) pode ser escrita como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

A Figura 7 é a versão tridimensional da Figura 6 e mostra a interpretação geométrica do diferencial dz e do incremento Δz : dz representa a variação na altura do plano tangente, ao passo que Δz representa a variação da altura da superfície $z = f(x, y)$ quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

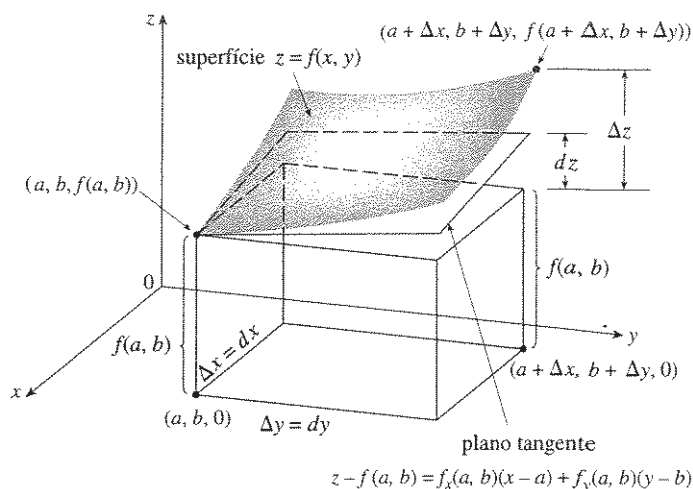


FIGURA 7

EXEMPLO 4 □

- (a) Se $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine o diferencial dz .
- (b) Se x varia de 2 a 2,05 e y varia de 3 a 2,96, compare os valores de Δz e dz .

SOLUÇÃO

- (a) Da Definição 10 vem

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x + 3y) dx + (3x - 2y) dy$$

- (b) Tomando $x = 2$, $dx = \Delta x = 0,05$, $y = 3$ e $dy = \Delta y = -0,04$, obtemos

$$\begin{aligned} dz &= [2(2) + 3(3)]0,05 + [3(2) - 2(3)](-0,04) \\ &= 0,65 \end{aligned}$$

O incremento de z é

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(2,05, 2,96) - f(2, 3) \\ &= [(2,05)^2 + 3(2,05)(2,96) - (2,96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2] \\ &= 0,6449 \end{aligned}$$

Note que $\Delta z \approx dz$ mas dz é mais simples de calcular. □

EXEMPLO 5 □ Foram feitas medidas do raio da base e da altura de um cone circular reto e obtivemos 10 cm e 25 cm, respectivamente, com possível erro nessas medidas de, no máximo, 0,1 cm. Utilize o diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone.

□ No Exemplo 4, dz está próximo de Δz porque o plano tangente é uma boa aproximação da superfície $z = x^2 + 3xy - y^2$ perto do ponto $(2, 3, 13)$ (veja a Figura 8).

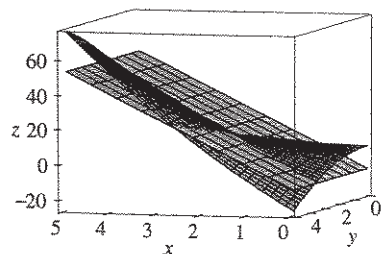


FIGURA 8

SOLUÇÃO O volume V do cone com raio da base r e altura h é $V = \pi r^2 h/3$. Logo o diferencial de V é

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

Como cada erro é de, no máximo, 0,1 cm, temos $|\Delta r| \leq 0,1$, $|\Delta h| \leq 0,1$. Para achar o erro máximo no volume, tomamos o maior erro nas medidas de r e de h . Portanto tomamos $dr = 0,1$ e $dh = 0,1$ para $r = 10$, $h = 25$. Isso dá

$$dV = \frac{500\pi}{3} (0,1) + \frac{100\pi}{3} (0,1) = 20\pi$$

Assim, o erro máximo cometido no cálculo do volume é de $20\pi \text{ cm}^3 \approx 63 \text{ cm}^3$. □



Funções de Três ou Mais Variáveis

Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais podem ser definidos de uma maneira análoga para as funções de mais do que duas variáveis. Uma função diferenciável é definida por uma expressão semelhante àquela da Definição 7. Para essas funções a **aproximação linear** é

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

e a linearização $L(x, y, z)$ é o lado direito dessa expressão.

Se $w = f(x, y, z)$, então o **incremento** de w é

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

O **diferencial** dw é definido em termos dos diferenciais dx , dy e dz das variáveis independentes por

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

EXEMPLO 6 □ As dimensões de uma caixa retangular são medidas como 75 cm, 60 cm e 40 cm, e cada medida feita com precisão de até 0,2 cm. Use diferenciais para estimar o maior valor possível do erro quando calculamos o volume da caixa usando essas medidas.

SOLUÇÃO Se as dimensões da caixa são x , y e z , seu volume é $V = xyz$ e

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = yz dx + xz dy + xy dz$$

Foi-nos dado que $|\Delta x| \leq 0,2$, $|\Delta y| \leq 0,2$ e $|\Delta z| \leq 0,2$. Para determinar o maior erro no volume, usamos $dx = 0,2$, $dy = 0,2$ e $dz = 0,2$ e $x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$:

$$\begin{aligned} \Delta V \approx dV &= (60)(40)(0,2) + (75)(40)(0,2) + (75)(60)(0,2) \\ &= 1980 \end{aligned}$$

Portanto, o erro de só 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a um erro da ordem de 1.980 cm^3 no cálculo do volume! Isso pode parecer um erro muito grande, mas de fato é um erro de 1% do volume da caixa. □

14.4 Exercícios

1-6 □ Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

1. $z = 4x^2 - y^2 + 2y$, $(-1, 2, 4)$
2. $z = 9x^2 + y^2 + 6x - 3y + 5$, $(1, 2, 18)$
3. $z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$, $(1, -1, 1)$
4. $z = y \ln x$, $(1, 4, 0)$
5. $z = y \cos(x - y)$, $(2, 2, 2)$
6. $z = e^{x^2 - y^2}$, $(1, -1, 1)$

7-8 □ Desenhe a superfície e o plano tangente no ponto dado. (Escolha o tamanho da janela de inspeção e o ponto de vista de modo a ver tanto a superfície quanto o plano tangente.) Em seguida amplie até que a superfície e o plano tangente perto do ponto se tornem indistinguíveis.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2$, $(1, 1, 5)$
8. $z = \arctg(xy^2)$, $(1, 1, \pi/4)$

9-10 □ Desenhe o gráfico de f e de seu plano tangente no ponto dado. (Utilize um sistema algébrico computacional tanto para computar as derivadas parciais quanto para traçar os gráficos da função e de seu plano tangente.) Em seguida faça uma ampliação até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

9. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/15}(\sin^2 x + \cos^2 y)$, $(2, 3, f(2, 3))$

10. $f(x, y) = \frac{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}{1 + x^4 + y^4}$, $(1, 1, 1)$

11-16 □ Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. Faça então a linearização $L(x, y)$ da função no ponto.

11. $f(x, y) = x\sqrt{y}$, $(1, 4)$
12. $f(x, y) = x/y$, $(6, 3)$
13. $f(x, y) = e^x \cos xy$, $(0, 0)$
14. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{xy}}$, $(3, 0)$
15. $f(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}(x + 2y)$, $(1, 0)$
16. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$, $(-3, 2)$

17. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ em $(2, 1)$ e use-a para aproximar $f(1,95, 1,08)$.

18. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \ln(x - 3y)$ em $(7, 2)$ e use-a para aproximar $f(6,9, 2,06)$. Ilustre traçando o gráfico da função e do plano tangente.

19. Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ em $(3, 2, 6)$ e use-a para aproximar $\sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}$.

20. A altura h de ondas em mar aberto depende da rapidez do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela.

		Duração (horas)							
		t	5	10	15	20	30	40	50
Velocidade do vento (nós)	v								
	20	5	7	8	8	9	9	9	
	30	9	13	16	17	18	19	19	
	40	14	21	25	28	31	33	33	
	50	19	29	36	40	45	48	50	
	60	24	37	47	54	62	67	69	

Use a tabela para determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 40 nós e t está próximo de 20 horas. Em seguida, estime a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 43 nós.

21. Utilize a tabela do Exemplo 3 e determine a aproximação linear do índice de calor quando a temperatura se aproxima de 94 °F e a umidade relativa do ar é de aproximadamente 80%. Estime também o índice quando a temperatura é de 95 °F e a umidade relativa, 78%.

22. O índice sensação térmica W é a temperatura que se sente quando a temperatura real for T e a rapidez do vento, v ; portanto podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

		Velocidade do vento (km/h)						
		v	20	30	40	50	60	70
Temperatura real (°C)	T							
	-10	-18	-20	-21	-22	-23	-23	
	-15	-24	-26	-27	-29	-30	-30	
	-20	-30	-33	-34	-35	-36	-37	
	-25	-37	-39	-41	-42	-43	-44	

Use essa tabela para determinar a aproximação linear da função sensação térmica quando T estiver a -15°C e v estiver próximo de 50 km/h. Estime também quando a temperatura estiver a -17°C e a rapidez do vento for de 55 km/h.

23–28 □ Determine o diferencial da função.

23. $z = x^3 \ln(y^2)$ 24. $v = y \cos xy$
 25. $u = e^t \sin \theta$ 26. $u = r/(s + 2t)$
 27. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 28. $w = xye^{xy}$

29. Se $z = 5x^2 + y^2$ e (x, y) varia de $(1, 2)$ a $(1,05; 2,1)$, compare os valores de Δz e dz .
 30. Se $z = x^2 - xy + 3y^2$ e (x, y) varia de $(3, -1)$ a $(2,96, -0,95)$, compare os valores de Δz e dz .
 31. O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respectivamente, com um erro de medida de, no máximo, 0,1 cm. Utilize os diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.
 32. As dimensões de uma caixa fechada retangular foram medidas como 80 cm, 60 cm e 50 cm, respectivamente, com erro máximo de 0,2 cm em cada dimensão. Utilize os diferenciais para estimar o máximo erro no cálculo da área da superfície da caixa.
 33. Utilize os diferenciais para estimar a quantidade de estanho em uma lata cilíndrica fechada com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura se a espessura da folha de estanho for de 0,04 cm.
 34. Use o diferencial para estimar a quantidade de metal em uma lata cilíndrica fechada de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro se o metal das tampas de cima e de baixo possui 0,1 cm de espessura e o das laterais tem espessura de 0,05 cm.
 35. Uma faixa de 3 polegadas de largura é pintada ao redor de um retângulo de dimensões 100 pés por 200 pés. Utilize os diferenciais para aproximar a área em pés quadrados pintada na faixa.
 36. A pressão, o volume e a temperatura de um mol de um gás ideal estão relacionados pela equação $PV = 8,31T$, onde P é medida em quilopascals, V em litros e T em kelvins. Utilize os diferenciais para determinar a variação aproximada da pressão

se o volume aumenta de 12 L para 12,3 L e a temperatura diminui de 310 K para 305 K.

37. Se R é a resistência equivalente de três resistências conectadas em paralelo, com valores R_1, R_2 e R_3 , então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as resistências medem em ohms $R_1 = 25 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$ e $R_3 = 50 \Omega$, com precisão de 0,5% em cada uma, estime o erro máximo no cálculo da resistência equivalente de R .

38. Quatro números positivos, cada um menor que 50, são arredondados até a primeira casa decimal e depois multiplicados. Utilize os diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo do produto que pode resultar do arredondamento.

39–40 □ Mostre que a função é diferenciável achando valores ϵ_1 e ϵ_2 que satisfaçam a Definição 7.

39. $f(x, y) = x^2 + y^2$ 40. $f(x, y) = xy - 5y^2$

41. Prove que, se f é uma função de duas variáveis diferenciável em (a, b) , então f é contínua em (a, b) . *Dica:* Mostre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

42. (a) A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

corresponde ao gráfico da figura 4.

Mostre que $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$. [*Dica:* Utilize o resultado do Exercício 41.]

(b) Explique por que f_x e f_y não são contínuas em $(0, 0)$.

14.5 Regra da Cadeia

Lembre-mos de que a Regra da Cadeia para uma função de uma única variável nos dava uma regra para diferenciar uma função composta: se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, onde f e g são funções diferenciáveis, então y é indiretamente uma função diferenciável de t e

1

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Para as funções de mais do que uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de diferenciação de uma função composta. A primeira versão (Teorema 2) diz respeito ao caso onde $z = f(x, y)$ e cada uma das variáveis x e y é, por sua vez, função de uma variável t . Isso significa que z é indiretamente uma função de t , $z = f(g(t), h(t))$, e a Regra da Cadeia dá uma fórmula para diferenciar z em função de t . Estamos admitindo que f seja diferenciável (Definição 14.4.7). Lembremo-nos de que este é o caso quando f_x e f_y são contínuas (Teorema 14.4.8).

2 Regra da Cadeia (Caso 1) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y , onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t . Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Prova Uma variação de Δt em t produz uma variação de Δx em x e Δy em y . Isso, por sua vez, produz uma variação de Δz em z , e da Definição 14.4.7 temos

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ e $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. [Se as funções ε_1 e ε_2 não forem definidas em $(0, 0)$, poderemos defini-las como 0 lá.] Dividindo ambos os lados da equação por Δt , temos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Se fizermos $\Delta t \rightarrow 0$, então $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \rightarrow 0$ porque g é diferenciável e portanto contínua. Da mesma forma, $\Delta y \rightarrow 0$. Por outro lado, isso implica que $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ e $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

Como freqüentemente escrevemos $\partial z / \partial x$ no lugar de $\partial f / \partial x$, podemos reescrever a Regra da Cadeia na forma

□ Note a semelhança com a definição do diferencial:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

EXEMPLO 1 □ Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \sin 2t$ e $y = \cos t$, determine dz/dt quando $t = 0$.

SOLUÇÃO A Regra da Cadeia fornece

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (2xy + 3y^4)(2 \cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t) \end{aligned}$$

Não é necessário substituir as expressões de x e de y em função de t . Simplesmente

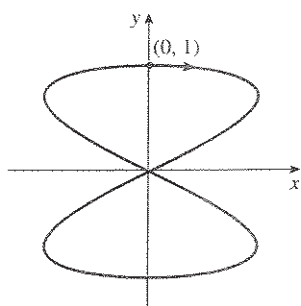


FIGURA 1
A curva $x = \sin 2t$, $y = \cos t$

observe que, quando $t = 0$, temos $x = \sin 0 = 0$ e $y = \cos 0 = 1$. Logo,

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = (0 + 3)(2 \cos 0) + (0 + 0)(-\sin 0) = 6$$

A derivada no Exemplo 1 pode ser interpretada como a taxa de variação de z com relação a t quando o ponto (x, y) se move ao longo da curva C com equações paramétricas $x = \sin 2t$, $y = \cos t$. (Veja a Figura 1.) Em particular, quando $t = 0$, o ponto (x, y) é $(0, 1)$, e $dz/dt = 6$ é sua taxa de crescimento quando nos movemos ao longo da curva C passando por $(0, 1)$. Se, por exemplo, $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ representa a temperatura no ponto (x, y) , então a função composta $z = T(\sin 2t, \cos t)$ representa a temperatura dos pontos da curva C e sua derivada dz/dt corresponde à taxa de variação de temperatura ao longo da curva C .

EXEMPLO 2 □ A pressão P (em quilopascals), o volume V (em litros) e a temperatura T (em kelvins) de um mol de um gás ideal estão relacionados por meio da fórmula $PV = 8,31T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é de 300 K e está aumentando com a taxa de 0,1 K/s e o volume é de 100 L e está aumentando com a taxa de 0,2 L/s.

SOLUÇÃO Se t representa o tempo decorrido, medido em segundos, então em um dado instante temos $T = 300$, $dT/dt = 0,1$, $V = 100$, $dV/dt = 0,2$. Como

$$P = 8,31 \frac{T}{V}$$

pela Regra da Cadeia

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V} \frac{dV}{dt} = \frac{8,31}{V} \frac{dT}{dt} - \frac{8,31T}{V^2} \frac{dV}{dt} \\ &= \frac{8,31}{100} (0,1) - \frac{8,31(300)}{100^2} (0,2) = -0,04155 \end{aligned}$$

A pressão está decrescendo com a taxa de 0,042 kPa/s. □

Vamos considerar agora a situação onde $z = f(x, y)$, mas x e y são funções de outras duas variáveis s e t : $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Então z é uma função indireta de s e t e desejamos determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$. Lembremo-nos de que para calcular $\partial z/\partial t$ mantemos s fixo e calculamos a derivada ordinária de z em relação a t . Portanto, aplicando o Teorema 2, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Argumento análogo serve para $\partial z/\partial s$ e provamos a seguinte versão da Regra da Cadeia.

3 Regra da Cadeia (Caso 2) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y , onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e de t . Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

EXEMPLO 3 □ Se $z = e^x \operatorname{sen} y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$, determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

SOLUÇÃO Aplicando o Caso 2 da Regra da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st) \\ &= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + 2ste^{st^2} \cos(s^2t) \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2) \\ &= 2ste^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + s^2 e^{st^2} \cos(s^2t) \end{aligned}$$

O Caso 2 da Regra da Cadeia contém três tipos de variáveis: s e t , que são variáveis **independentes**; x e y , chamadas variáveis **intermediárias**; e z , que é a variável **dependente**. Note que o Teorema 3 tem um termo para cada variável intermediária e que cada um desses termos se assemelha à Regra da Cadeia de uma dimensão da Equação 1.

Para lembrar da Regra da Cadeia é útil desenhar o **grafo da árvore** da Figura 2. Desenhamos os ramos da árvore saindo da variável dependente z para as variáveis intermediárias x e y a fim de indicar que z é uma função de x e y . Então desenhamos os ramos saindo de x e y para as variáveis independentes s e t . Em cada ramo indicamos a derivada parcial correspondente. Para achar $\partial z/\partial s$ determinamos o produto das derivadas parciais ao longo de cada caminho de z a s e somamos esses produtos:

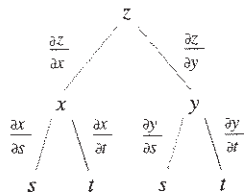


FIGURA 2

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Da mesma forma, para determinar $\partial z/\partial t$ usamos os caminhos de z a t .

Consideremos agora uma situação mais geral na qual a variável dependente u é uma função de n variáveis intermediárias x_1, \dots, x_n , cada uma das quais, por seu turno, é função de m variáveis independentes t_1, \dots, t_m . Note que existem n termos, um para cada variável intermediária. A prova é semelhante à do Caso 1.

4 Regra da Cadeia (Versão Geral) Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , onde cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis t_1, t_2, \dots, t_m . Então u é uma função de t_1, t_2, \dots, t_m e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

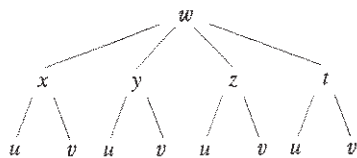


FIGURA 3

EXEMPLO 4 □ Escreva a Regra da Cadeia para o caso onde $w = f(x, y, z, t)$ e $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$.

SOLUÇÃO Aplicamos o Teorema 4 com $n = 4$ e $m = 2$. A Figura 3 mostra o grafo correspondente. Apesar de não termos escrito as derivadas nos ramos, entendemos que

em um ramo que liga as folhas y a u a derivada parcial omitida é $\partial y/\partial u$. Com a ajuda do grafo da árvore, podemos escrever as expressões pedidas:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v}$$

EXEMPLO 5 □ Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

SOLUÇÃO Com o auxílio do grafo da árvore da Figura 4, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

Quando $r = 2$, $s = 1$ e $t = 0$, temos $x = 2$, $y = 2$ e $z = 0$. Portanto

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

EXEMPLO 6 □ Se $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

SOLUÇÃO Seja $x = s^2 - t^2$ e $y = t^2 - s^2$. Então $g(s, t) = f(x, y)$ e a Regra da Cadeia nos fornece

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} (2s) + \frac{\partial f}{\partial y} (-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} (-2t) + \frac{\partial f}{\partial y} (2t)$$

Portanto

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st \frac{\partial f}{\partial x} - 2st \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \left(-2st \frac{\partial f}{\partial x} + 2st \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

EXEMPLO 7 □ Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, determine (a) $\partial z/\partial r$ e (b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

SOLUÇÃO

(a) A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} (2r) + \frac{\partial z}{\partial y} (2s)$$

(b) Aplicando a Regra do Produto na expressão da parte (a), obtemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(2r \frac{\partial z}{\partial x} + 2s \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$= 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + 2s \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

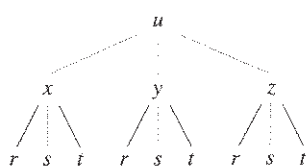


FIGURA 4

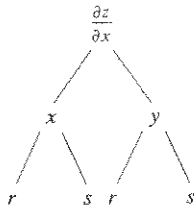


FIGURA 5

Mas, usando a Regra da Cadeia novamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} (2s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} (2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (2s) \end{aligned}$$

Colocando essas expressões na Equação 5 e usando a igualdade das derivadas parciais mistas de segunda ordem, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2r \left(2r \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) + 2s \left(2r \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2s \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \\ &= 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4s^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Derivação Implícita

A Regra da Cadeia pode ser usada para uma descrição do processo de diferenciação implícita introduzida nas Seções 3.6 (Volume I) e 14.3. Suponhamos que a equação da forma $F(x, y) = 0$ defina y implicitamente como uma função diferenciável de x , ou seja, $y = f(x)$, onde $F(x, f(x)) = 0$ para todo x no domínio de f . Se F é diferenciável, podemos aplicar o Caso 1 da Regra de Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação $F(x, y) = 0$ com relação a x . Como x e y são ambas funções de x , obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

No entanto, $dx/dx = 1$; então, se $\partial F/\partial y \neq 0$, resolvemos para dy/dx e obtemos

6

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = - \frac{F_x}{F_y}$$

Para derivar essa equação assumimos que $F(x, y) = 0$ define y implicitamente em função de x . O **Teorema da Função Implícita**, provado em cálculo avançado, fornece condições segundo as quais essa hipótese é válida. Podemos estabelecer que se F é definida em uma bola aberta contendo (a, b) , onde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$ e F_x e F_y são funções contínuas nessa bola, então a equação $F(x, y) = 0$ define y como uma função de x perto do ponto (a, b) , e a derivada dessa função é dada pela Equação 6.

EXEMPLO 8 □ Determine y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

SOLUÇÃO A equação dada pode ser escrita como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

e, dessa forma, a Equação 6 nos dá

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

□ A solução do Exemplo 8 deve ser comparada com a do Exemplo 2 da Seção 3.6 do Volume I.

Suponha agora que z seja dado implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$. Isso é o mesmo que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) no domínio de f . Se F e f forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia para diferenciar a equação $F(x, y, z) = 0$ como se segue:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Mas $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$ e $\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$

portanto, essa equação se escreve

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Se $\partial F/\partial z \neq 0$, resolvemos para $\partial z/\partial x$ e obtemos a primeira fórmula das Equações 7. A fórmula para $\partial z/\partial y$ é obtida de modo semelhante.

7

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Novamente, uma versão do **Teorema da Função Implícita** nos dá as condições sob as quais nossa hipótese é válida. Se F é definida dentro de uma esfera contendo (a, b, c) , onde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$, e F_x, F_y e F_z são contínuas dentro da esfera, então a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como uma função de x e y perto do ponto (a, b) , e as derivadas parciais dessa função são dadas por (7).

EXEMPLO 9 □ Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

SOLUÇÃO Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Então, das Equações 7, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

□ A solução do Exemplo 9 deve ser comparada com a do Exemplo 4 na Seção 14.3.

14.5 Exercícios

1-6 □ Use a Regra da Cadeia para determinar dz/dt ou dw/dt .

1. $z = x^2y + xy^2$, $x = 2 + t^4$, $y = 1 - t^3$
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = e^{2t}$, $y = e^{-2t}$
3. $z = \text{sen } x \cos y$, $x = \pi t$, $y = \sqrt{t}$
4. $z = x \ln(x + 2y)$, $x = \text{sen } t$, $y = \cos t$
5. $w = xe^{y/z}$, $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$
6. $w = xy + yz^2$, $x = e^t$, $y = e^t \text{sen } t$, $z = e^t \cos t$

7-12 □ Utilize a Regra da Cadeia para determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2 + xy + y^2$, $x = s + t$, $y = st$
 8. $z = x/y$, $x = se^t$, $y = 1 + se^{-t}$
 9. $z = \text{arctg}(2x + y)$, $x = s^2t$, $y = s \ln t$
 10. $z = e^{xy} \text{tg } y$, $x = s + 2t$, $y = s/t$
 11. $z = e^r \cos \theta$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$
 12. $z = \text{sen } \alpha \text{ tg } \beta$, $\alpha = 3s + t$, $\beta = s - t$
13. Se $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável $x = g(t)$, $y = h(t)$, $g(3) = 2$, $g'(3) = 5$, $h(3) = 7$, $h'(3) = -4$, $f_x(2, 7) = 6$, e $f_y(2, 7) = -8$, determine dz/dt quando $t = 3$.

14. Seja $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, onde F , u , e v são diferenciáveis, $u(1, 0) = 2$, $u_s(1, 0) = -2$, $u_t(1, 0) = 6$, $v(1, 0) = 3$, $v_s(1, 0) = 5$, $v_t(1, 0) = 4$, $F_u(2, 3) = -1$ e $F_v(2, 3) = 10$. Determine $W_s(1, 0)$ e $W_t(1, 0)$.

15. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y , e $g(u, v) = f(e^u + \text{sen } v, e^u + \cos v)$. Use a tabela de valores para calcular $g_u(0, 0)$ e $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y , e $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Use a tabela de valores do Exercício 15 para calcular $g_r(1, 2)$ e $g_s(1, 2)$.

17-20 □ Utilize o grafo da árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Assuma que todas as funções sejam diferenciáveis.

17. $u = f(x, y)$, onde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$
18. $w = f(x, y, z)$, onde $x = x(t, u)$, $y = y(t, u)$, $z = z(t, u)$
19. $v = f(p, q, r)$, onde $p = p(x, y, z)$, $q = q(x, y, z)$, $r = r(x, y, z)$
20. $u = f(s, t)$, onde $s = s(w, x, y, z)$, $t = t(w, x, y, z)$

21-26 □ Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

21. $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + w^3$, $y = u + ve^w$,

$$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w} \text{ quando } u = 2, v = 1, w = 0$$

$$22. u = \sqrt{r^2 + s^2}, r = y + x \cos t, s = x + y \text{sen } t; \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t} \text{ quando } x = 1, y = 2, t = 0$$

$$23. R = \ln(u^2 + v^2 + w^2), u = x + 2y, v = 2x - y, w = 2xy; \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y} \text{ quando } x = y = 1$$

$$24. M = xe^{y-r^2}, x = 2uv, y = u - v, z = u + v; \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \text{ quando } u = 3, v = -1$$

$$25. u = x^2 + yz, x = pr \cos \theta, y = pr \text{sen } \theta, z = p + r; \frac{\partial u}{\partial p}, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta} \text{ quando } p = 2, r = 3, \theta = 0$$

$$26. Y = w \text{tg}^{-1}(uv), u = r + s, v = s + t, w = t + r; \frac{\partial Y}{\partial r}, \frac{\partial Y}{\partial s}, \frac{\partial Y}{\partial t} \text{ quando } r = 1, s = 0, t = 1$$

27-30 □ Utilize a Equação 6 para determinar dy/dx .

$$27. \sqrt{xy} = 1 + x^2y \quad 28. y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$$

$$29. \cos(x - y) = xe^y \quad 30. \text{sen } x + \cos y = \text{sen } x \cos y$$

31-34 □ Utilize as Equações 7 para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

$$31. x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \quad 32. xyz = \cos(x + y + z)$$

$$33. x - z = \text{arctg}(yz) \quad 34. yz = \ln(x + z)$$

35. A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja de modo que sua posição depois de t segundos seja dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidas em centímetros. A função temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

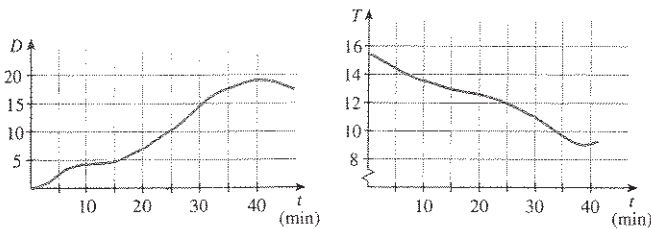
36. A produção de trigo em um determinado ano W depende da temperatura média T e da quantidade anual de chuva R . Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de $0,15^\circ\text{C}/\text{ano}$, e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de $0,1 \text{ cm}/\text{ano}$. Eles também estimam que, no corrente nível de produção, $\partial W/\partial T = -2$ e $\partial W/\partial R = 8$.
(a) Qual é o significado do sinal dessas derivadas parciais?
(b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo dW/dt .

37. A rapidez da propagação do som através do oceano com salinidade de 35 partes por milhar foi modelada pela equação

$$C = 1449,2 + 4,6T - 0,055T^2 + 0,00029T^3 + 0,016D$$

onde C é a rapidez do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius) e D é a profundidade abaixo

do nível do mar (em metros). Um mergulhador começa um mergulho tranquilo nas águas oceânicas, e a profundidade do mergulho e a temperatura da água ao redor são anotadas (veja o gráfico). Estime a taxa de variação (com relação ao tempo) da rapidez do som através do oceano experimentada pelo mergulhador 20 minutos depois do mergulho. Quais são as unidades?



38. O raio de um cone circular reto aumenta a uma taxa de 1,8 pol/s, ao passo que sua altura está decrescendo à taxa de 2,5 pol/s. A que taxa o volume do cone está mudando quando o raio vale 120 pol e a altura 140 pol?
39. O comprimento ℓ , a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. A certo instante as dimensões da caixa são $\ell = 1$ m e $w = h = 2$ m, e ℓ e w estão aumentando a uma taxa de 2 m/s, ao passo que h está diminuindo à taxa de 3 m/s. Nesse instante, determine as taxas nas quais as seguintes quantidades estão variando.
- (a) O volume (b) A área da superfície
(c) O comprimento da diagonal
40. A voltagem V em um circuito elétrico simples está decrescendo devagar à medida que a bateria se descarrega. A resistência R está aumentando devagar com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm, $V = IR$, para achar como a corrente I está variando no momento em que $R = 400 \Omega$, $I = 0,08$ A, $dV/dt = -0,01$ V/s e $dR/dt = 0,03 \Omega/s$.
41. A pressão de um mol de um gás ideal é aumentada à taxa de 0,05 kPa/s, e a temperatura é elevada à taxa de 0,15 K/s. Utilize a equação do Exemplo 2 para achar a taxa de variação do volume quando a pressão é 20 kPa e a temperatura é 320 K.
42. Um carro A está viajando para norte na rodovia 16, e um carro B está viajando para oeste na rodovia 83. Os dois carros se aproximam da interseção dessas rodovias. Em um certo momento, o carro A está a 0,3 km da interseção viajando a 90 km/h, ao passo que o carro B está a 0,4 km da interseção viajando a 80 km/h. Qual a taxa de variação da distância entre os carros nesse instante?
- 43–46 □ Assuma que todas as funções dadas são diferenciáveis.

43. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, (a) determine $\partial z/\partial r$ e $\partial z/\partial \theta$ e (b) mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

44. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s \cos t$ e $y = e^s \sin t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right]$$

45. Se $z = f(x - y)$, mostre que $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

46. Se $z = f(x, y)$, onde $x = s + t$ e $y = s - t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t}$$

- 47–53 □ Assuma que todas as funções dadas tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

47. Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[Dica: Seja $u = x + at$, $v = x - at$.]

48. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s \cos t$ e $y = e^s \sin t$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]$$

49. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r \partial s$. (Compare com o Exemplo 7.)

50. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, determine (a) $\partial z/\partial r$, (b) $\partial z/\partial \theta$ e (c) $\partial^2 z/\partial r \partial \theta$.

51. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}$$

52. Suponha $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$. (a) Mostre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \\ &+ \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{aligned}$$

- (b) Determine uma fórmula semelhante para $\partial^2 z/\partial s \partial t$.

53. Uma função f é dita **homogênea de grau n** se satisfaz a equação $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo valor de t , onde n é um inteiro positivo e f tem as segundas derivadas parciais contínuas.

(a) Verifique que $f(x, y) = x^2 y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.

(b) Mostre que, se f é homogênea de grau n , então

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y)$$

[Dica: Utilize a Regra da Cadeia para derivar $f(tx, ty)$ com relação a t .]

54. Se f é homogênea de grau n , mostre que

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f(x, y)$$

55. Se f é homogênea de grau n , mostre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1} f_x(x, y)$$

56. Suponha que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina implicitamente cada uma das três variáveis x , y e z como função das outras duas:

$z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Se F for diferenciável e F_x , F_y e F_z forem todas não-nulas, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

14.6 Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

O mapa meteorológico dos estados da Califórnia e Nevada, apresentado na Figura 1, mostra os contornos da função temperatura $T(x, y)$ às 15 horas de um dia de outubro. As curvas de nível ou isotérmicas ligam localidades que apresentam a mesma temperatura. A derivada parcial T_x em um ponto, como o Reno, dá a taxa de variação da temperatura em relação à distância se viajarmos de Reno para leste; T_y é a taxa de variação da temperatura se viajarmos para o norte. Mas o que acontece se desejarmos conhecer a taxa de variação da temperatura quando viajamos para sudeste (indo para Las Vegas) ou em outra direção qualquer? Nesta seção introduzimos um tipo de derivada, chamada *derivada direcional*, que nos permite determinar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.

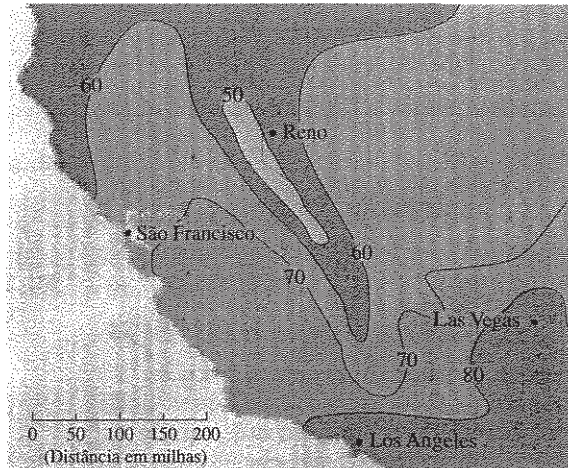


FIGURA 1

Derivadas Direcionais

Lembremo-nos de que, se $z = f(x, y)$, as derivadas parciais f_x e f_y são definidas como

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e representam as taxas de variação de z na direção positiva dos eixos x e y , ou seja, nas direções e sentidos dos versores \mathbf{i} e \mathbf{j} .

Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de z no ponto (x_0, y_0) na direção e sentido de um vetor unitário arbitrário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. (Veja a Figura 2.) Para fazê-lo devemos considerar a superfície S com equação $z = f(x, y)$ (gráfico de f) e tomar $z_0 = f(x_0, y_0)$. O ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ pertence a S . O plano vertical que passa por P na direção de \mathbf{u} intercepta

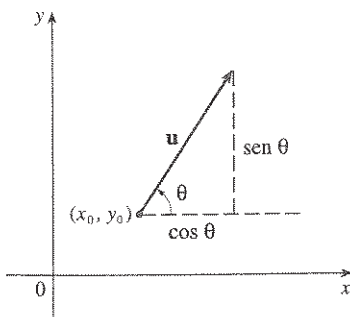


FIGURA 2

Um vetor unitário

$$\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$$

S em uma curva C (veja a Figura 3). A inclinação da reta tangente T a C em P é a taxa de variação de z na direção e sentido de \mathbf{u} .

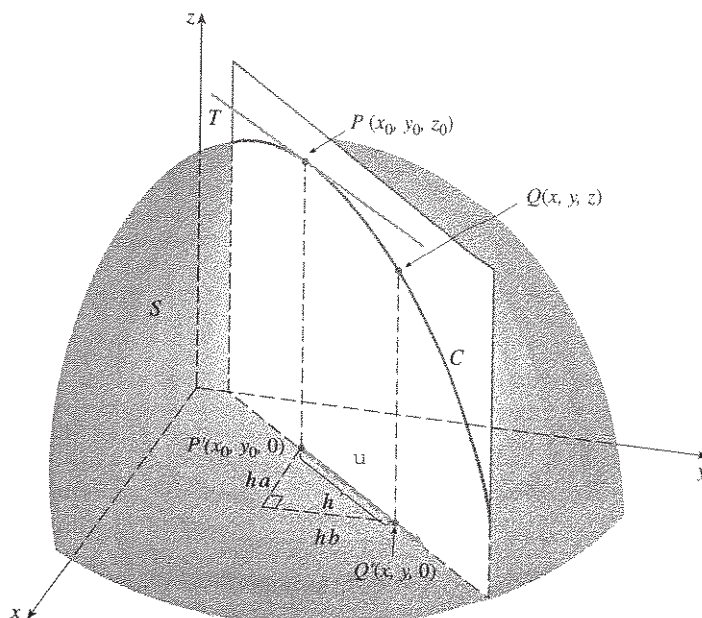


FIGURA 3

Se $Q(x, y, z)$ é outro ponto sobre C e P', Q' são as projeções de P, Q sobre o plano xy , então o vetor $\overrightarrow{P'Q'}$ é paralelo a \mathbf{u} , e portanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

para algum valor do escalar h . Dessa forma, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, logo $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, e

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se tomarmos o limite quando $h \rightarrow 0$, obteremos a taxa de variação de z (em relação à distância) na direção e sentido de \mathbf{u} , que é chamada derivada direcional de f na direção e sentido de \mathbf{u} .

2 Definição A derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção e sentido do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Comparando a Definição 2 com (1), vemos que, se $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, então $D_{\mathbf{i}}f = f_x$ e se $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, então $D_{\mathbf{j}}f = f_y$. Em outras palavras, as derivadas parciais de f com relação a x e y são casos particulares da derivada direcional.

EXEMPLO 1 □ Utilize o mapa meteorológico da Figura 1 para estimar o valor da derivada direcional da função temperatura em Reno na direção sudeste.

SOLUÇÃO O vetor na direção sudeste é dado por $\mathbf{u} = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$, mas não necessitaremos dessa expressão. Em vez disso, inicialmente traçamos uma reta que passa por Reno na direção sudeste. (Veja a Figura 4.)

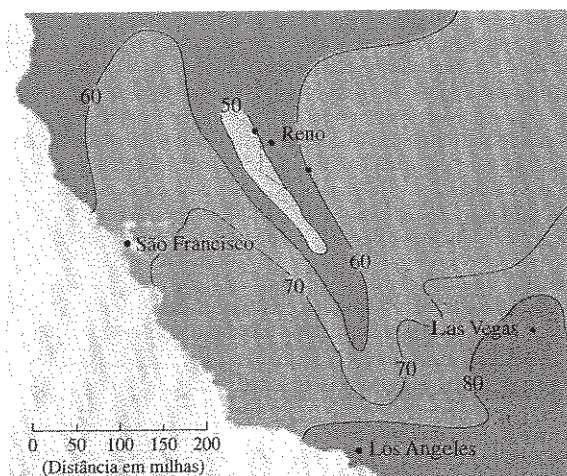


FIGURA 4

Aproximamos a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}T$ pela taxa média de variação de temperatura entre os pontos onde a reta traçada intercepta isotérmicas $T = 50$ e $T = 60$. A temperatura no ponto a sudeste de Reno é $T = 60$ °F, e a temperatura no ponto a noroeste de Reno é $T = 50$ °F. A distância aproximada desses pontos é de 75 milhas. Logo a taxa de variação da temperatura na direção sudeste é

$$D_{\mathbf{u}}T \approx \frac{60 - 50}{75} = \frac{10}{75} \approx 0,13 \text{ °F/mi}$$

Quando computamos a derivada direcional de uma função definida por uma fórmula, geralmente usamos o seguinte teorema.

3 Teorema Se f é uma função diferenciável em x e y , então f tem derivada direcional na direção e sentido de qualquer vetor $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ e

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Prova Se definirmos uma função g de uma única variável h por

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

então, pela definição de derivada direcional, temos

$$\begin{aligned} \text{4 } g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos escrever $g(h) = f(x, y)$, onde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, e pela Regra da Cadeia (Teorema 14.5.2), vem

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dh} = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Se tomarmos $h = 0$, então $x = x_0$, $y = y_0$, e

$$\boxed{5} \quad g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

Comparando as Equações 4 e 5, vemos que

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b \quad \square$$

Se o vetor \mathbf{u} faz um ângulo θ com o eixo x positivo (como na Figura 2), então podemos escrever $\mathbf{u} = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$ e a fórmula do Teorema 3 fica

$$\boxed{6} \quad D_u f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

EXEMPLO 2 □ Determine a derivada direcional $D_u f(x, y)$ se

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

e \mathbf{u} é o vetor dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$. Qual será $D_u f(1, 2)$?

SOLUÇÃO A Fórmula 6 nos dá

$$\begin{aligned} D_u f(x, y) &= f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \sin \frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y) \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} [3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y] \end{aligned}$$

Portanto

$$D_u f(1, 2) = \frac{1}{2} [3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + (8 - 3\sqrt{3})(2)] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2} \quad \square$$

Vetor Gradiente

Note no Teorema 3 que a derivada direcional pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$\begin{aligned} \boxed{7} \quad D_u f(x, y) &= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

O primeiro vetor no produto escalar ocorre não somente no cômputo da derivada direcional, mas também em muitas outras situações. Assim daremos a ele um nome especial (o *gradiente* de f) e uma notação especial (**grad** f ou ∇f , que lemos “del f ”).

□ A derivada direcional $D_u f(1, 2)$ no Exemplo 2 representa a taxa de variação de z na direção de \mathbf{u} . Isto é a inclinação da reta tangente à curva obtida pela interseção da superfície $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ e o plano vertical que passa por $(1, 2, 0)$ na direção de \mathbf{u} mostrado na Figura 5.

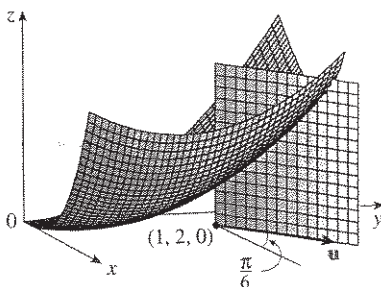


FIGURA 5

8 Definição Se f é uma função de duas variáveis x e y , o **gradiente** de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

EXEMPLO 3 □ Se $f(x, y) = \sin x + e^{xy}$, então

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

e
$$\nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$

Com a notação de vetor gradiente, podemos reescrever a expressão (7) para a derivada direcional como

9
$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

que expressa a derivada direcional na direção e sentido de \mathbf{u} como a projeção escalar do vetor gradiente sobre \mathbf{u} .

□ O vetor gradiente $\nabla f(2, -1)$ do Exemplo 4 é mostrado na Figura 6 com ponto inicial $(2, -1)$. Também é mostrado o vetor \mathbf{v} , que dá a direção e sentido da derivada direcional. Ambos os vetores estão sobrepostos ao mapa de contornos do gráfico de f .

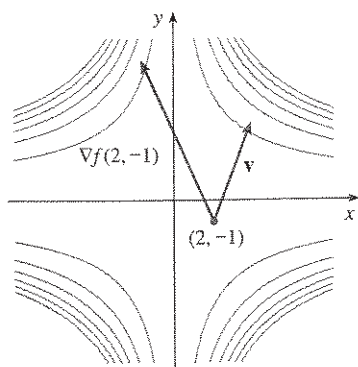


FIGURA 6

EXEMPLO 4 □ Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2, -1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

SOLUÇÃO Primeiramente, vamos calcular o gradiente de f no ponto $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Note que \mathbf{v} não é um vetor unitário, mas, como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, o vetor unitário na direção e sentido de \mathbf{v} é

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}$$

Portanto, pela Equação 9, temos

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(2, -1) &= \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j} \right) \\ &= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

Funções de Três Variáveis

Para as funções de três variáveis podemos definir derivadas direcionais de modo semelhante. Novamente $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ pode ser interpretado como a taxa de variação da função na direção e sentido de um versor \mathbf{u} .

[10] Definição A derivada direcional de uma função f em (x_0, y_0, z_0) na direção e sentido do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

se o limite existir.

Se usarmos a notação vetorial, poderemos escrever tanto a definição (2) quanto a (10) da derivada direcional na forma compacta

[11]

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

onde $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ se $n = 2$ e $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ se $n = 3$. Isso era esperado, porque a equação vetorial da reta que passa por \mathbf{x}_0 na direção do vetor \mathbf{u} é dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$ (Equação 12.5.1), e portanto $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$ representa o valor de f em um ponto dessa reta.

Se $f(x, y, z)$ for diferenciável e $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, então o mesmo método usado na prova do Teorema 3 pode ser usado para mostrar que

[12]

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$$

Para uma função f de três variáveis, o **vetor gradiente**, denotado por ∇f ou **grad** f , é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

ou, simplificando,

[13]

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Então, como para as funções de duas variáveis, a Fórmula 12 para a derivada direcional pode ser reescrita como

[14]

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

EXEMPLO 5 □ Se $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$, (a) determine o gradiente de f e (b) estabeleça a derivada direcional de f no ponto $(1, 3, 0)$ na direção e sentido de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUÇÃO

(a) O gradiente de f é

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle \\ &= \langle \operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz \rangle \end{aligned}$$

(b) No ponto $(1, 3, 0)$ temos $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3 \rangle$. O vetor unitário na direção e sentido de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

Portanto, da Equação 14, vem

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1, 3, 0) &= \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k} \right) \\ &= 3 \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Maximizando a Derivada Direcional

Suponha uma função f de duas ou três variáveis e considere todas as possíveis derivadas direcionais de f em um ponto dado. Isso nos dará a taxa de variação da função em todas as direções possíveis. Podemos então perguntar: em qual dessas direções f varia mais rápido e qual a máxima taxa de variação? A resposta a essas perguntas é dada pelo seguinte teorema.

15 Teorema Suponha que f seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ é $|\nabla f(\mathbf{x})|$ e ocorre quando \mathbf{u} tem a mesma direção e sentido que o vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

Prova Da Equação 9 ou 14, temos

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| |\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo entre ∇f e \mathbf{u} . O valor máximo de $\cos \theta$ é 1, e isso ocorre quando $\theta = 0$. Portanto o valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f$ é $|\nabla f|$ e ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando \mathbf{u} tem a mesma direção e sentido que ∇f .

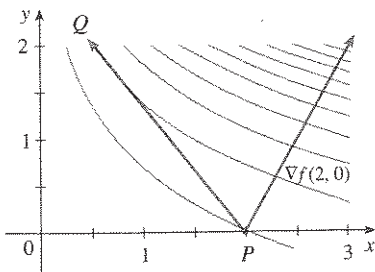


FIGURA 7

□ No ponto $(2, 0)$ a função do Exemplo 6 aumenta mais rapidamente na direção e sentido do gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. Na Figura 7 note que esse vetor parece ser perpendicular à curva de nível que passa por $(2, 0)$. A Figura 8 mostra o gráfico de f e o vetor gradiente.

EXEMPLO 6 □

- (a) Se $f(x, y) = xe^y$, determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.
 (b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

SOLUÇÃO

(a) Primeiro calcularemos o vetor gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y, xe^y \rangle$$

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$$

O versor da direção $\overrightarrow{PQ} = \langle -1.5; 2 \rangle$ é $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$, logo a taxa de variação de f na direção que vai de P a Q é

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(2, 0) &= \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle \\ &= 1\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{4}{5}\right) = 1 \end{aligned}$$

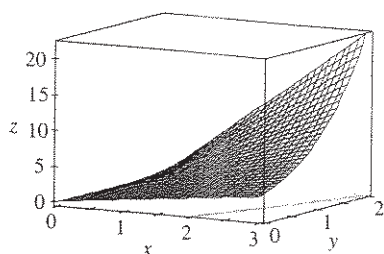


FIGURA 8

(b) De acordo com o Teorema 15, f aumenta mais depressa na direção e sentido do gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. A máxima taxa de variação é

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2 \rangle| = \sqrt{5}$$

EXEMPLO 7 □ Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço seja dada por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, onde T é medida em graus Celsius e x, y, z em metros. Em que direção no ponto $(1, 1, -2)$ a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?

SOLUÇÃO O gradiente de T é

$$\begin{aligned} \nabla T &= \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} \mathbf{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} \mathbf{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} \mathbf{k} \\ &= \frac{160}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} (-x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}) \end{aligned}$$

No ponto $(1, 1, -2)$, o vetor gradiente é

$$\nabla T(1, 1, -2) = \frac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

Pelo Teorema 15 a temperatura aumenta mais rapidamente na direção e sentido do gradiente $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ ou, de modo equivalente, na direção e sentido de $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ou ainda de seu versor $(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/\sqrt{41}$. A taxa máxima de aumento é o módulo do vetor gradiente

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \frac{5}{8}|-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \frac{5\sqrt{41}}{8}$$

Portanto a taxa máxima de aumento da temperatura é $5\sqrt{41}/8 \approx 4^\circ\text{C}/\text{m}$.

Plano Tangente às Superfícies de Nível

Suponha que S seja uma superfície com equação $F(x, y, z) = k$, ou seja, uma superfície de nível da função F de três variáveis, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto sobre S . Seja C uma curva qualquer contida na superfície S que passe pelo ponto P . Lembre-se de que, da Seção 13.1, a curva C é descrita por uma função vetorial contínua $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$. Seja t_0 o valor do parâmetro correspondente ao ponto P , ou seja, $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$. Como C pertence a S , qualquer ponto $(x(t), y(t), z(t))$ precisa satisfazer a equação de S , ou seja,

$$\boxed{16} \quad F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Se x, y e z são diferenciáveis como função de t e F também é diferenciável, podemos usar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da Equação 16, como se segue:

$$\boxed{17} \quad \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

Mas, como $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z \rangle$ e $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$, a Equação 17 pode ser escrita em termos do produto escalar como

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

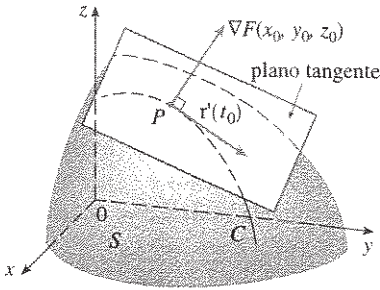


FIGURA 9

Em particular, quando $t = t_0$, temos $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, e assim

$$\boxed{18} \quad \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

A Equação 18 nos diz que o vetor gradiente em P , $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, é perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ a qualquer curva C em S que passe por P (veja a Figura 9). Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, é natural definir o **plano tangente à superfície de nível** $F(x, y, z) = k$ em $P(x_0, y_0, z_0)$ como o plano que passa por P e tem vetor normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Utilizando a equação geral do plano (Equação 12.5.7) podemos escrever a equação do plano tangente como

$$\boxed{19} \quad F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

A **reta normal** a S em P é a reta que passa por P e é perpendicular ao plano tangente. A direção da reta normal é, portanto, dada pelo vetor gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ e, assim, pela Equação 12.5.3, suas equações na forma simétrica são

$$\boxed{20} \quad \frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

No caso especial em que a equação de uma superfície S é da forma $z = f(x, y)$ (ou seja, S é o gráfico da função f de duas variáveis), podemos reescrever a equação como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

e entender S como uma superfície de nível (com $k = 0$) de F . Então

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$

$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

logo a Equação 19 se torna

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

que é equivalente à Equação 14.4.2. Então, nossa nova, mais geral, definição de plano tangente é consistente com a definição que foi dada no caso especial da Seção 14.4.

EXEMPLO 8 □ Determine as equações do plano tangente e reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsóide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

SOLUÇÃO O elipsóide é a superfície de nível (com $k = 3$) da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

□ A Figura 10 mostra o elipsóide, plano tangente e reta normal do Exemplo 8.

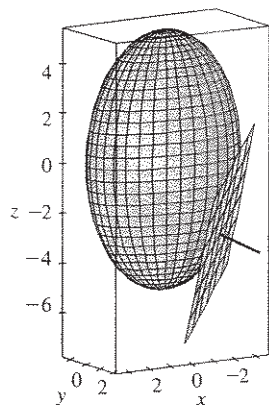


FIGURA 10

Portanto, temos

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\frac{2}{3}$$

Então, da Equação 19, temos a equação do plano tangente no ponto $(-2, 1, -3)$, como

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \frac{2}{3}(z + 3) = 0$$

que pode ser simplificada para $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

Pela Equação 20, as equações simétricas da reta normal são

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{2}{3}}$$

■ Importância do Vetor Gradiente

Vamos resumir agora os lugares onde o vetor gradiente tem presença importante. Inicialmente consideraremos uma função f de três variáveis e um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ em seu domínio. Por um lado, sabemos do Teorema 15 que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ indica a direção e sentido de maior crescimento da função f . Por outro, sabemos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal às superfícies de nível S de f em P (veja a Figura 9). Essas duas propriedades são compatíveis intuitivamente porque, quando nos movemos de P em uma superfície de nível S , o valor da função f não se altera. Parece razoável que, se nos movemos em uma direção perpendicular, obtemos o maior aumento.

Da mesma maneira podemos considerar uma função de duas variáveis f e um ponto $P(x_0, y_0)$ em seu domínio. Novamente o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ dá a direção e sentido de maior crescimento de f . Também, por considerações semelhantes à nossa discussão sobre o plano tangente, podemos mostrar que $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à curva de nível $f(x, y) = k$ que passa por P . Mais uma vez, isso é plausível intuitivamente, visto que os valores de f se mantêm constantes quando nos movemos ao longo da curva de nível. (Veja a Figura 11.)

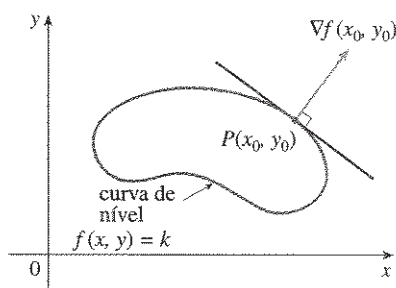


FIGURA 11

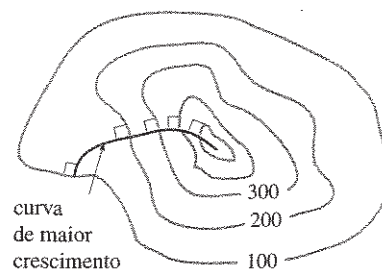


FIGURA 12

Se considerarmos um mapa topográfico de um morro e se $f(x, y)$ representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas (x, y) , então a curva de maior crescimento pode ser desenhada como na Figura 12, fazendo-a perpendicular a todas as curvas de contorno. Esse fenômeno pode ser notado na Figura 12 na Seção 14.1, onde o Riacho Lonesome segue a curva de maior decréscimento.

Um sistema algébrico computacional tem comandos que plotam alguns vetores gradientes. Cada vetor gradiente $\nabla f(a, b)$ é plotado partindo-se de um ponto (a, b) . A Figura 13 mostra como fica um desses desenhos (chamados *campos de vetores gradientes*) para a função $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobreposto a um mapa de contornos de f . Como esperado, os vetores gradientes apontam na direção e sentido de "subida de morro" e são perpendiculares às curvas de nível.

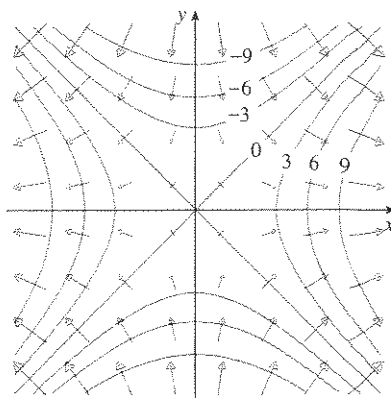
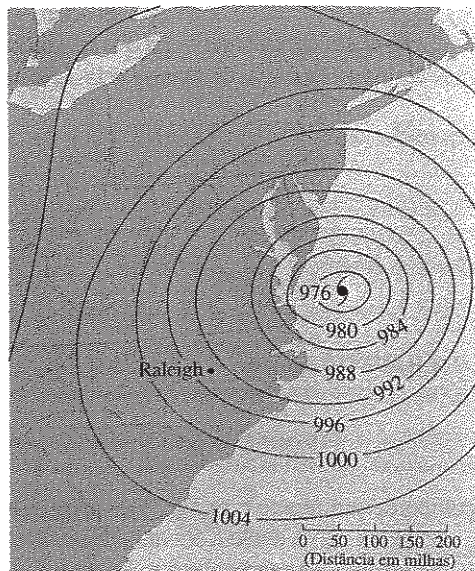


FIGURA 13

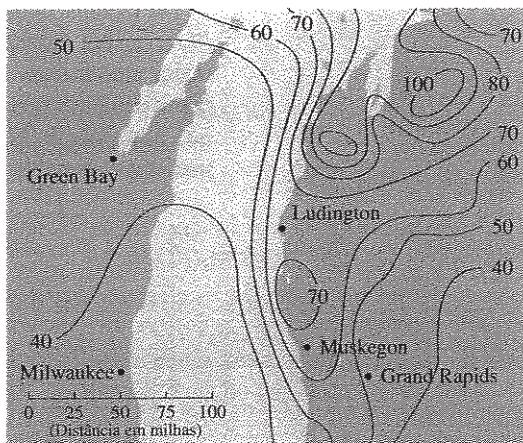
14.6 Exercícios

1. É dado o mapa de contornos mostrando a pressão barométrica (em milímetros) às 7:00 horas da manhã do dia 12 de setembro de 1960, quando o Furacão Donna estava ativo. Estime o valor da função pressão em Raleigh, na Carolina do Norte, em direção ao olho do furacão. Quais são as unidades da derivada direcional?



2. O mapa de contorno mostra a precipitação média de neve (em polegadas) perto do Lago Michigan. Estime o valor da

derivada direcional da função da precipitação de neve em Muskegon, Michigan, na direção de Ludington. Quais são as unidades?



3. A tabela de valores do índice sensação térmica $W = f(T, v)$ é dada no Exercício 3 da Seção 14.3. Use-a para estimar o valor de $D_u f(-20, 30)$, onde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

4-6 □ Determine a derivada direcional de f no ponto dado e a direção e sentido indicada pelo ângulo θ .

4. $f(x, y) = x^2 y^3 - y^4$, $(2, 1)$, $\theta = \pi/4$
5. $f(x, y) = \sqrt{5x - 4y}$, $(4, 1)$, $\theta = -\pi/6$
6. $f(x, y) = x \operatorname{sen}(xy)$, $(2, 0)$, $\theta = \pi/3$

7-10 □

- (a) Determine o gradiente de f .
 (b) Calcule o gradiente no ponto P .
 (c) Determine a taxa de variação de f em P na direção e sentido do vetor \mathbf{u} .

7. $f(x, y) = 5xy^2 - 4x^3y$, $P(1, 2)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle$

8. $f(x, y) = y \ln x$, $P(1, -3)$, $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$

9. $f(x, y, z) = xe^{2yz}$, $P(3, 0, 2)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$, $P(1, 3, 1)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle$

11-17 □ Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção e sentido do vetor \mathbf{v} .

11. $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $(3, 4)$, $\mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$

12. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$

13. $g(s, t) = s^2e^t \operatorname{sen} t$, $(2, 0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

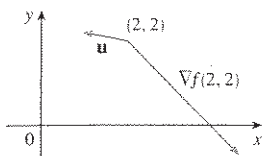
14. $g(r, \theta) = e^{-r} \sin \theta$, $(0, \pi/3)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(1, 2, -2)$,
 $\mathbf{v} = \langle -6, 6, -3 \rangle$

16. $f(x, y, z) = x/(y + z)$, $(4, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$

17. $g(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^{3/2}$, $(1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

18. Use a figura para estimar
- $D_{\mathbf{u}}f(2, 2)$
- .



19. Determine a derivada direcional de
- $f(x, y) = \sqrt{xy}$
- em
- $P(2, 8)$
- na direção de
- $Q(5, 4)$
- .

20. Estipule a derivada direcional de
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- em
- $P(2, 1, 3)$
- em direção à origem.

21-26 □ Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção e sentido em que isso ocorre.

21. $f(x, y) = y^2/x$, $(2, 4)$

22. $f(p, q) = qe^{-p} + pe^{-q}$, $(0, 0)$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$, $(1, 1, 1)$

25. $f(x, y, z) = \ln(xy^2z^3)$, $(1, -2, -3)$

26. $f(x, y, z) = \operatorname{tg}(x + 2y + 3z)$, $(-5, 1, 1)$

27. (a) Mostre que uma função diferenciável
- f
- decresce mais depressa em
- \mathbf{x}
- na direção e sentido oposto à do vetor gradiente, ou seja, na direção
- $-\nabla f(\mathbf{x})$
- .

- (b) Utilize a parte (a) para determinar a direção e sentido onde
- $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$
- decresce mais rápido no ponto
- $(2, -3)$
- .

28. Determine as direções e sentidos em que a derivada direcional de
- $f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen} xy$
- no ponto
- $(1, 0)$
- tem valor 1.

29. Determine todos os pontos nos quais a direção e sentido de maior variação da função
- $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$
- é
- $\mathbf{i} + \mathbf{j}$
- .

30. Nas proximidades de uma bóia, a profundidade de um lago em um ponto com coordenadas
- (x, y)
- é
- $z = 200 + 0,02x^2 - 0,001y^3$
- , onde
- x, y
- , e
- z
- são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto
- $(80, 60)$
- em direção à bóia, que está localizada no ponto
- $(0, 0)$
- . A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique.

31. A temperatura
- T
- em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como sendo a origem. A temperatura no ponto
- $(1, 2, 2)$
- é de
- 120°
- .

- (a) Determine a taxa de variação de
- T
- em
- $(1, 2, 2)$
- em direção ao ponto
- $(2, 1, 3)$
- .

- (b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada pelo vetor que aponta para a origem.

32. A temperatura em um ponto
- (x, y, z)
- é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2 - 3y^2 - 9z^2}$$

onde T é medido em $^\circ\text{C}$ e x, y, z em metros.

- (a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto
- $P(2, -1, 2)$
- em direção ao ponto
- $(3, -3, 3)$
- .

- (b) Qual é a direção e sentido de maior crescimento da temperatura em
- P
- ?

- (c) Encontre a taxa máxima de crescimento em
- P
- .

33. Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico
- V
- seja dado por
- $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$
- .

- (a) Determine a taxa de variação do potencial em
- $P(3, 4, 5)$
- na direção do vetor
- $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
- .

- (b) Em que direção e sentido
- V
- varia mais rapidamente em
- P
- ?

- (c) Qual a taxa máxima de variação em
- P
- ?

34. Suponha que você esteja escalando um morro cujo formato é dado pela equação
- $z = 1000 - 0,01x^2 - 0,02y^2$
- onde
- x, y
- , e
- z
- são medidos em metros, e você esteja em pé no ponto de coordenadas
- $(50, 80, 847)$
- . O eixo positivo dos
- x
- aponta para o Leste e o eixo positivo dos
- y
- aponta para o Norte.

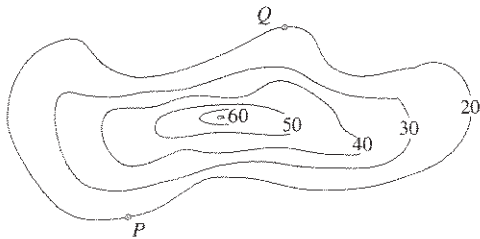
- (a) Se você andar exatamente para o Sul, você começará a subir ou a descer? Com que taxa?

- (b) Se você caminhar em direção ao Noroeste, você começará a subir ou a descer? Com que taxa?

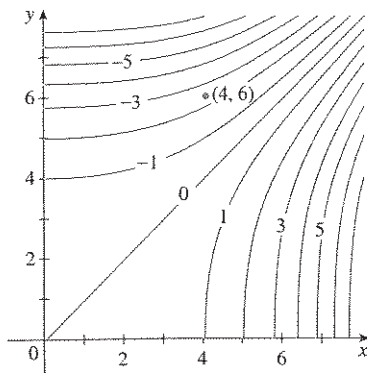
- (c) Em que direção e sentido a inclinação é maior? Qual é a taxa de elevação nessa direção? Qual é o ângulo que o início desse caminho faz em relação à horizontal?

35. Seja
- f
- uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos
- $A(1, 3)$
- ,
- $B(3, 3)$
- ,
- $C(1, 7)$
- e
- $D(6, 15)$
- . A derivada direcional em
- A
- na direção e sentido do vetor
- \overrightarrow{AB}
- é 3, e a derivada direcional em
- A
- na direção e sentido
- \overrightarrow{AC}
- é 26. Determine a derivada direcional de
- f
- em
- A
- na direção e sentido do vetor
- \overrightarrow{AD}
- .

36. Para o mapa de contorno dado, desenhe as curvas de maior crescimento em P e em Q .



37. Mostre que a operação de calcular o gradiente de uma função tem a propriedade fornecida. Suponha que u e v sejam funções de x e y , diferenciáveis, e a e b sejam constantes.
- (a) $\nabla(au + bv) = a \nabla u + b \nabla v$ (b) $\nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u$
- (c) $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}$ (d) $\nabla u^n = nu^{n-1} \nabla u$
38. Esboce o desenho do vetor gradiente $\nabla f(4, 6)$ para a função f cujas curvas de nível são mostradas. Explique como você escolheu a direção e sentido e o comprimento desse vetor.



39-44 □ Determine equações de (a) plano tangente e (b) reta normal a uma superfície dada no ponto especificado.

39. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, $(4, -1, 1)$
40. $x = y^2 + z^2 - 2$, $(-1, 1, 0)$
41. $x^2 - 2y^2 + z^2 + yz = 2$, $(2, 1, -1)$
42. $x - z = 4 \arctg(yz)$, $(1 + \pi, 1, 1)$
43. $z + 1 = xe^y \cos z$, $(1, 0, 0)$
44. $yz = \ln(x + z)$, $(0, 0, 1)$

45-46 □ Utilize o computador para traçar o gráfico da superfície, plano tangente e reta normal na mesma tela. Escolha o tamanho da janela de inspeção com cuidado para evitar planos verticais estranhos. Escolha o ponto de vista de modo que você possa ver bem os três objetos.

45. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$ 46. $xyz = 6$, $(1, 2, 3)$

47. Se $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, determine o vetor gradiente $\nabla f(2, 1)$ e use-o para determinar a reta tangente à curva de nível da função $f(x, y) = 8$ no ponto $(2, 1)$. Esboce as curvas de nível, reta tangente e vetor gradiente.
48. Se $g(x, y) = x - y^2$, determine o vetor gradiente $\nabla g(3, -1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível $g(x, y) = 2$ no ponto $(3, -1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.
49. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

50. Determine a equação do plano tangente ao hiperbolóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ em (x_0, y_0, z_0) e expresse-a de forma semelhante à do Exercício 49.
51. Mostre que a equação do plano tangente ao parabolóide elíptico $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

52. Determine os pontos sobre o elipsóide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $3x - y + 3z = 1$.
53. Determine os pontos no hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.
54. Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$. (Isso significa que eles têm uma tangente comum nesse ponto.)
55. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.
56. Mostre que a reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ passa pelo centro da esfera.
57. Mostre que a soma das interseções com os eixos x, y e z de qualquer plano tangente à superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ é uma constante.
58. Mostre que o produto das interseções com os eixos x, y e z de qualquer plano tangente à superfície $xyz = c^3$ é uma constante.
59. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o elipsóide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.
60. (a) O plano $y + z = 3$ intercepta o cilindro $x^2 + y^2 = 5$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto $(1, 2, 1)$.
- (b) Desenhe o cilindro, o plano e a reta tangente na mesma tela.
61. (a) Duas superfícies são ditas **ortogonais** em um ponto de interseção se suas normais são perpendiculares nesse

ponto. Mostre que superfícies com equação $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ são ortogonais em um ponto P onde $\nabla F \neq \mathbf{0}$ e $\nabla G \neq \mathbf{0}$ se e somente se, em P , $F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ são ortogonais em todo ponto de interseção. Você pode ver isso sem fazer os cálculos?

62. (a) Mostre que a função $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ é contínua e suas derivadas parciais f_x e f_y existem na origem mas as derivadas direcionais em todas as outras direções não existem.

(b) Trace o gráfico de f perto da origem e comente como ele confirma a parte (a).

63. Suponha que as derivadas direcionais de $f(x, y)$ sejam conhecidas em um determinado ponto em duas direções não paralelas dadas por seus versores \mathbf{u} e \mathbf{v} . É possível determinar ∇f nesse ponto? Se sim, como fazê-lo?

64. Mostre que, se $z = f(x, y)$ for diferenciável em $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, então

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

[Dica: Use a Definição 14.4.7 diretamente.]

14.7 Valores Máximo e Mínimo

Como vimos no Capítulo 4 do Volume I, um dos principais usos da derivada ordinária é na determinação dos valores máximo e mínimo. Nesta seção veremos como usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis. Em particular, no Exemplo 6 veremos como maximizar o volume de uma caixa sem tampa se tivermos uma quantidade fixa de cartolina para trabalhar.

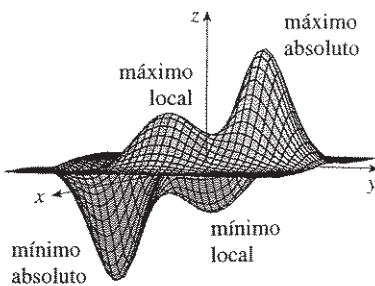


FIGURA 1

1 **Definição** Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se $f(x, y) \leq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b) . [Isso significa que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo ponto (x, y) em alguma bola aberta com centro em (a, b) .] O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo local**. Se $f(x, y) \geq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b) , então $f(a, b)$ é um **valor mínimo local**.

Se as inequações da Definição 1 valerem para todos os pontos (x, y) do domínio de f , então f tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em (a, b) .

O gráfico da função com muitos máximos e mínimos locais é mostrado na Figura 1. Você pode pensar nos máximos locais como picos de montanhas e nos mínimos locais como o fundo dos vales.

2 **Teorema** Se uma função f tem um máximo ou mínimo locais em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$.

Prova Seja $g(x) = f(x, b)$. Se f tem um máximo (ou mínimo) local em (a, b) , então g tem um máximo (ou mínimo) local em a , de modo que $g'(a) = 0$ pelo Teorema de Fermat (veja o Teorema 4.1.4 no Volume I). Mas $g'(a) = f_x(a, b)$ (veja a Equação 14.3.1), e assim $f_x(a, b) = 0$. Da mesma forma, pela aplicação do Teorema de Fermat à função $G(y) = f(a, y)$, obtemos $f_y(a, b) = 0$. □

Se impusermos $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ na equação do plano tangente (Equação 14.4.2), obteremos $z = z_0$. Assim, a interpretação geométrica do Teorema 2 é que, se o gráfico de f tem um plano tangente em um ponto de máximo ou mínimo locais, esse plano precisa ser horizontal.

Um ponto (a, b) é dito ser um **ponto crítico** (ou *ponto estacionário*) de f se $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou se uma das derivadas parciais não existir. O Teorema 2 diz que, se f tem um máximo ou mínimo locais em (a, b) , então (a, b) é um ponto crítico de f . Entretanto, como no cálculo de uma única variável, nem todos os pontos críticos correspondem a um máximo ou mínimo. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local ou um mínimo local, ou ainda nenhum dos dois.

□ Note que a conclusão do Teorema 2 pode ser colocada em termos do gradiente como $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

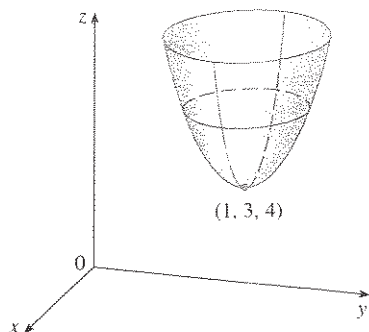


FIGURA 2
 $z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

EXEMPLO 1 □ Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Então

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \quad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Essas derivadas parciais são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$, portanto o único ponto crítico é $(1, 3)$. Completando os quadrados, achamos

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Como $(x - 1)^2 \geq 0$ e $(y - 3)^2 \geq 0$, temos $f(x, y) \geq 4$ para todos os valores de x e y . Logo, $f(1, 3) = 4$ é um mínimo local, e de fato é um mínimo absoluto de f . Isso pode ser confirmado geometricamente do gráfico de f , que é um parabolóide elíptico com vértice $(1, 3, 4)$, mostrado na Figura 2.

EXEMPLO 2 □ Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

SOLUÇÃO Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$. Note que, para os pontos sobre o eixo x , temos $y = 0$, de modo que $f(x, y) = -x^2 < 0$ (se $x \neq 0$). Entretanto, para os pontos sobre o eixo y , temos $x = 0$, e então $f(x, y) = y^2 > 0$ (se $y \neq 0$). Logo, todo disco com centro $(0, 0)$ contém pontos onde a função f tem valores positivos, assim como pontos onde f tem valores negativos. Por conseguinte, $f(0, 0) = 0$ não pode ser um valor extremo de f , e f não tem valor extremo.

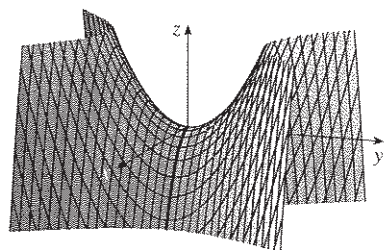


FIGURA 3
 $z = y^2 - x^2$

O Exemplo 2 ilustra o fato de que uma função pode não ter nem máximo nem mínimo em um ponto crítico. A Figura 3 mostra como isso é possível. O gráfico de f é o parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, que tem plano horizontal tangente ($z = 0$) na origem. Você pode ver que $f(0, 0) = 0$ é um máximo na direção do eixo x , mas um mínimo na direção do eixo y . Perto da origem o gráfico tem o formato de uma sela, e por isso $(0, 0)$ é chamado *ponto de sela* de f .

Precisamos ser capazes de determinar se uma função tem um valor extremo em um ponto crítico. O teste que se segue, que será provado no final desta seção, é análogo ao Teste da Segunda Derivada para as funções de uma única variável.

3 Teste da Segunda Derivada Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b) , e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ [ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f]. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- (a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.
- (b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.
- (c) Se $D < 0$, então $f(a, b)$ não é mínimo local nem máximo local.

NOTA 1 □ No caso (c) o ponto (a, b) é chamado **ponto de sela** de f , e o gráfico de f atravessa seu plano tangente em (a, b) .

NOTA 2 □ Se $D = 0$, o teste não fornece informação: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a, b) , ou (a, b) pode ser um ponto de sela de f .

NOTA 3 □ Para lembrar a fórmula de D é útil escrevê-la como um determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

EXEMPLO 3 □ Determine os valores de máximo e mínimo locais e os pontos de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

SOLUÇÃO Vamos inicialmente localizar os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \quad f_y = 4y^3 - 4x$$

Igualando essas derivadas parciais a zero, obtemos as equações

$$x^3 - y = 0 \quad \text{e} \quad y^3 - x = 0$$

Para resolvê-las, substituímos $y = x^3$ da primeira equação na segunda. Isso dá

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

e existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$. Os três pontos críticos são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Agora vamos calcular as segundas derivadas parciais e $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \quad f_{xy} = -4 \quad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Como $D(0, 0) = -16 < 0$, segue do caso (c) do Teste da Segunda Derivada que a origem é um ponto de sela; ou seja, f não tem nem máximo local nem mínimo local em $(0, 0)$. Como $D(1, 1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, vemos do caso (a) do teste que $f(1, 1) = -1$ é um mínimo local. Da mesma forma, temos $D(-1, -1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, e então $f(-1, -1) = -1$ é também um mínimo local.

O gráfico de f é mostrado na Figura 4.

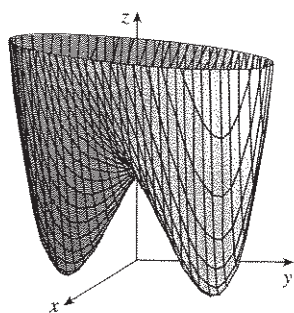


FIGURA 4

$$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

□ Um mapa de contorno da função f do Exemplo 3 é mostrado na Figura 5. As curvas de nível perto de $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ têm forma oval e indicam que, quando nos movemos para longe de $(1, 1)$ ou $(-1, -1)$ em qualquer direção, os valores de f crescem. As curvas de nível perto de $(0, 0)$, por outro lado, parecem hipérbolas. Elas revelam que, quando nos movemos para longe da origem (onde o valor de f é 1), os valores de f decrescem em algumas direções, mas crescem em outras. Portanto o mapa de contornos sugere a presença dos mínimos e do ponto de sela que encontramos no Exemplo 3.

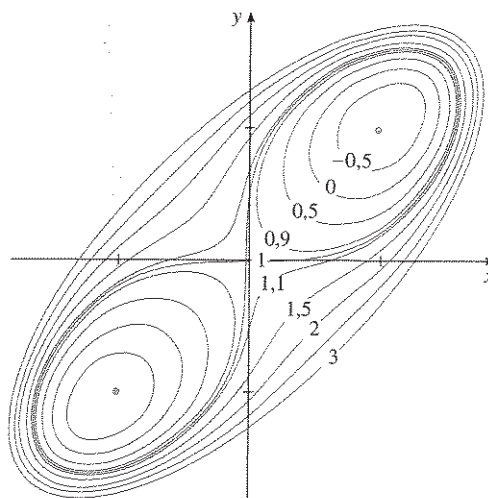


FIGURA 5

EXEMPLO 4 □ Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Determine também o ponto mais alto do gráfico de f .

SOLUÇÃO As primeiras derivadas parciais são

$$f_x = 20xy - 10x - 4x^3 \quad f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

Para achar os pontos críticos precisamos resolver as equações

$$\boxed{4} \quad 2x(10y - 5 - 2x^2) = 0$$

$$\boxed{5} \quad 5x^2 - 4y - 4y^3 = 0$$

Da Equação 4, vemos que

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 10y - 5 - 2x^2 = 0$$

No primeiro caso ($x = 0$), a Equação 5 fica $-4y(1 + y^2) = 0$, assim $y = 0$ e temos um ponto crítico $(0, 0)$.

No segundo caso ($10y - 5 - 2x^2 = 0$), temos

$$\boxed{6} \quad x^2 = 5y - 2,5$$

e, substituindo na Equação 5, temos $25y - 12,5 - 4y - 4y^3 = 0$. Logo, temos de resolver a equação cúbica

$$\boxed{7} \quad 4y^3 - 21y + 12,5 = 0$$

Utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico da função

$$g(y) = 4y^3 - 21y + 12,5$$

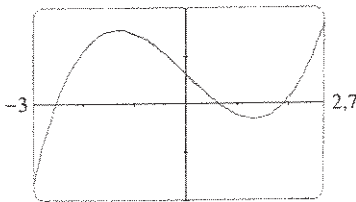


FIGURA 6

como na Figura 6, vemos que a Equação 7 tem três raízes reais. Dando um *zoom* podemos achar as raízes com quatro decimais:

$$y \approx -2,5452$$

$$y \approx 0,6468$$

$$y \approx 1,8984$$

(Como alternativa, podemos usar o método de Newton ou um programa para localizar as raízes para determiná-las.) Da Equação 6, os valores de x correspondentes são dados por

$$x = \pm\sqrt{5y - 2,5}$$

Se $y \approx -2,5452$, então x não tem valor real correspondente. Se $y \approx 0,6468$, logo, $x \approx \pm 0,8567$. Se $y \approx 1,8984$, então $x \approx \pm 2,6442$. Assim temos o total de cinco pontos críticos, que são analisados na tabela que se segue. Todos os valores estão arredondados para duas casas decimais.

Ponto crítico	Valor de f	f_{xx}	D	Conclusões
$(0, 0)$	0,00	-10,00	80,00	máximo local
$(\pm 2,64, 1,90)$	8,50	-55,93	2.488,71	máximo local
$(\pm 0,86, 0,65)$	-1,48	-5,87	-187,64	ponto de sela

As Figuras 7 e 8 mostram o gráfico de f sob dois pontos de vista diferentes, e vemos que a superfície abre para baixo. [Isso pode ser visto da expressão de $f(x, y)$: os termos dominantes são $-x^2 - 2y^4$ quando $|x|$ e $|y|$ são grandes.] Comparando os valores de f nos máximos locais, vemos que o máximo absoluto de f é $f(\pm 2,64, 1,90) \approx 8,50$. Em outras palavras, os pontos mais altos do gráfico de f são $(\pm 2,64, 1,90, 8,50)$.

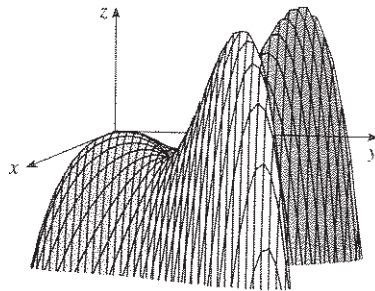


FIGURA 7

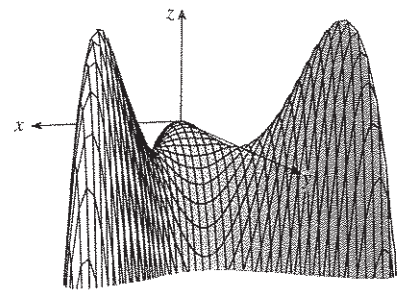


FIGURA 8

□ Os cinco pontos críticos da função f do Exemplo 4 são mostrados no mapa de contorno de f na Figura 9.

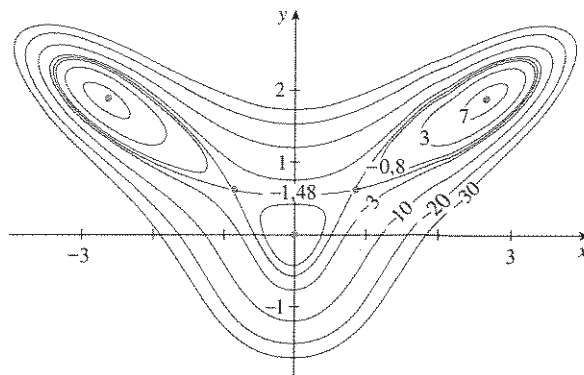


FIGURA 9

EXEMPLO 5 □ Determine a distância mais curta entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$.

SOLUÇÃO A distância entre um ponto qualquer (x, y, z) e o ponto $(1, 0, -2)$ é

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

mas, se (x, y, z) pertence ao plano $x + 2y + z = 4$, então $z = 4 - x - 2y$, e assim temos $d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2}$. Podemos minimizar d minimizando a expressão mais simples

$$d^2 = f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

Resolvendo as equações

$$f_x = 2(x-1) - 2(6-x-2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6-x-2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

achamos que o único ponto crítico é $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$. Como $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 4$ e $f_{yy} = 10$, temos $D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0$ e $f_{xx} > 0$. Portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, f tem um mínimo local em $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$. Intuitivamente podemos ver que esse mínimo local é,

na verdade, um mínimo absoluto, porque precisa haver um ponto no plano dado que esteja mais próximo de $(1, 0, -2)$. Se $x = \frac{11}{6}$ e $y = \frac{5}{3}$, então

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

□ O Exemplo 5 poderia ser resolvido utilizando-se vetores. Compare com os métodos da Seção 12.5.

A distância mais curta de $(1, 0, -2)$ ao plano $x + 2y + z = 4$ é $5\sqrt{6}/6$.

EXEMPLO 6 □ Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m^2 de papelão. Determine o volume máximo de tal caixa.

SOLUÇÃO Seja o comprimento, a largura e a altura da caixa (em metros) x , y e z , como mostrado na Figura 10. O volume dessa caixa é

$$V = xyz$$

Podemos expressar V como função só de x e y usando o fato de que a área dos quatro lados e do fundo da caixa é

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Resolvendo essa equação para z , obtemos $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$, e V fica

$$V = xy \frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Se calcularmos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

Se V é um máximo, então $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$, mas $x = 0$ ou $y = 0$ fornecem $V = 0$, dessa forma, precisamos resolver as equações

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \quad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Isso leva a $x^2 = y^2$ e portanto $x = y$. (Note que x e y precisam ser positivos no problema.) Se substituirmos $x = y$ em uma das equações, obteremos $12 - 3x^2 = 0$, que dá $x = 2$, $y = 2$ e $z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$.

Podemos usar o Teste da Segunda Derivada para mostrar que o ponto obtido é um máximo local de V , ou podemos argumentar que a natureza física do problema exige a existência de um máximo absoluto e que, portanto, esse máximo ocorre quando $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$. Assim, $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, e o volume máximo da caixa é 4 m^3 . □

Valores Máximo e Mínimo Absolutos

Para uma função f de uma variável, o Teorema do Valor Extremo diz que, se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f tem um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto. De acordo com o Método dos Intervalos Fechados da Seção 4.1 do Volume I, achamos esses valores calculando f não somente nos pontos críticos, mas também nos extremos do intervalo a e b .

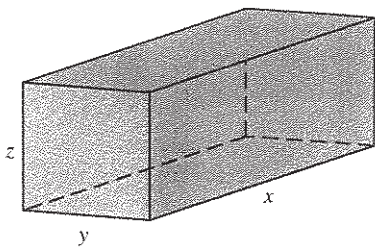
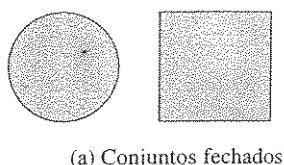
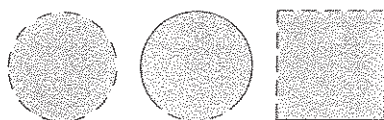


FIGURA 10



(a) Conjuntos fechados



(b) Conjuntos não fechados

FIGURA 11

Para as funções de duas variáveis a situação é semelhante. Como para os intervalos fechados os extremos do intervalo estão contidos no intervalo, um **conjunto fechado** de \mathbb{R}^2 contém todos os seus pontos da fronteira. [Um ponto da fronteira de D é um ponto (a, b) tal que qualquer bola aberta centro em (a, b) contém pontos de D e pontos não pertencentes a D .] Por exemplo, o disco

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

constituído de todos os pontos sobre e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, é um conjunto fechado porque contém todos os seus pontos da fronteira (que são os pontos sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$). Mas mesmo que um único ponto da fronteira seja omitido, o conjunto deixa de ser fechado (veja a Figura 11).

Um **conjunto limitado** em \mathbb{R}^2 é aquele que está contido em algum disco. Em outras palavras, ele é finito em extensão. Então, em termos de conjuntos fechados e limitados, podemos estabelecer o correspondente ao Teorema do Valor Extremo para as duas dimensões.

8 Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis Se f for contínua em um conjunto fechado e limitado D de \mathbb{R}^2 , então f atinge um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D .

Para achar os pontos extremos cuja existência é garantida pelo Teorema 8, notamos que, pelo Teorema 2, se f tem um valor extremo em (x_1, y_1) , então (x_1, y_1) ou é um ponto crítico de f ou um ponto da fronteira de D . Portanto temos a seguinte extensão do Método dos Intervalos Fechados.

9 Para determinar um máximo ou mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D :

1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f no interior de D .
2. Estabeleça os valores extremos de f na fronteira de D .
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

EXEMPLO 7 □ Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

SOLUÇÃO Como f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D , e, portanto, o Teorema 8 nos diz que existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto. De acordo com o passo 1 de (9), inicialmente devemos calcular os pontos críticos. Eles ocorrem quando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \quad f_y = -2x + 2 = 0$$

e, assim, o único ponto crítico existente é $(1, 1)$, no qual temos $f(1, 1) = 1$.

No passo 2 olhamos para os valores de f na fronteira de D , que é constituído por quatro segmentos de reta L_1, L_2, L_3 e L_4 mostrados na Figura 12. Em L_1 , temos $y = 0$ e

$$f(x, 0) = x^2 \quad 0 \leq x \leq 3$$

Isso corresponde a uma função crescente de x , que tem valor mínimo $f(0, 0) = 0$ e máximo $f(3, 0) = 9$. Sobre L_2 , temos $x = 3$ e

$$f(3, y) = 9 - 4y \quad 0 \leq y \leq 2$$

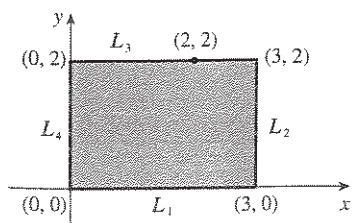


FIGURA 12

Essa é uma função decrescente de y , portanto seu máximo é $f(3, 0) = 9$ e seu mínimo é $f(3, 2) = 1$. Sobre L_3 , temos $y = 2$ e

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \quad 0 \leq x \leq 3$$

Pelos métodos do Capítulo 4 do Volume I, ou simplesmente observando que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, vemos que o mínimo valor dessa função é $f(2, 2) = 0$, e seu valor máximo é $f(0, 2) = 4$. Finalmente, sobre L_4 , temos $x = 0$ e

$$f(0, y) = 2y \quad 0 \leq y \leq 2$$

com valor máximo $f(0, 2) = 4$ e valor mínimo $f(0, 0) = 0$. Portanto, na fronteira, o valor mínimo de f é 0 e o máximo, 9.

No passo 3 comparamos esses valores com o valor $f(1, 1) = 1$ no ponto crítico e concluímos que o valor máximo absoluto de f em D é $f(3, 0) = 9$, e o valor mínimo absoluto é $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$. A Figura 13 mostra o gráfico de f .

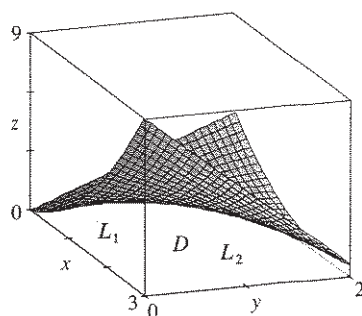


FIGURA 13
 $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$

Fechamos esta seção com a prova da primeira parte do Teste da Segunda Derivada. As partes (b) e (c) têm provas semelhantes.

Prova da Parte (a) do Teorema 3 Vamos calcular a segunda derivada direcional de f na direção de $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$. A derivada de primeira ordem é dada pelo Teorema 14.6.3:

$$D_{\mathbf{u}}f = f_x h + f_y k$$

Aplicando esse teorema uma segunda vez, temos

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}^2 f &= D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}}f) = \frac{\partial}{\partial x}(D_{\mathbf{u}}f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_{\mathbf{u}}f)k \\ &= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k \\ &= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \end{aligned} \quad \text{(pelo Teorema de Clairaut)}$$

Se completarmos os quadrados na expressão, obteremos

$$\boxed{10} \quad D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx} \left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} k \right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}} (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)$$

Temos que $f_{xx}(a, b) > 0$ e $D(a, b) > 0$. Mas f_{xx} e $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ são funções contínuas, logo existe uma bola aberta B com centro (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ e $D(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B . Portanto, olhando a Equação 10, vemos que $D_u^2 f(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B . Isso implica que, se C é uma curva obtida pela interseção do gráfico de f com o plano vertical que passa por $P(a, b, f(a, b))$ na direção de \mathbf{u} , então C tem concavidade para cima no intervalo de comprimento 2δ . Isso é verdadeiro na direção de todo vetor \mathbf{u} ; portanto, se restringirmos (x, y) a B , o gráfico de f permanecerá acima do plano horizontal tangente a f em P . Logo, $f(x, y) \geq f(a, b)$ sempre que (x, y) estiver em B . Isso mostra que $f(a, b)$ é um mínimo local. □

14.7 Exercícios

1. Suponha que $(1, 1)$ seja um ponto crítico de f com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre f ?

(a) $f_{xx}(1, 1) = 4$, $f_{xy}(1, 1) = 1$, $f_{yy}(1, 1) = 2$

(b) $f_{xx}(1, 1) = 4$, $f_{xy}(1, 1) = 3$, $f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Suponha que $(0, 2)$ seja um ponto crítico de g com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre g ?

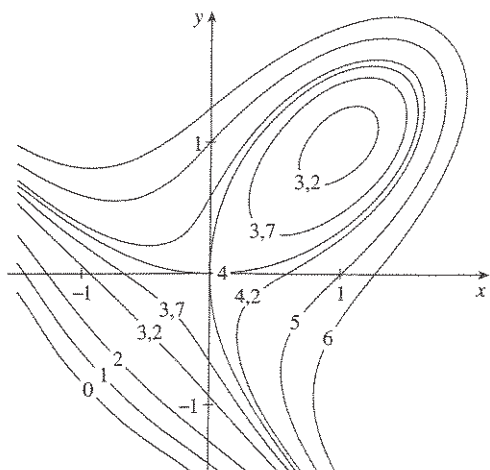
(a) $g_{xx}(0, 2) = -1$, $g_{xy}(0, 2) = 6$, $g_{yy}(0, 2) = 1$

(b) $g_{xx}(0, 2) = -1$, $g_{xy}(0, 2) = 2$, $g_{yy}(0, 2) = -8$

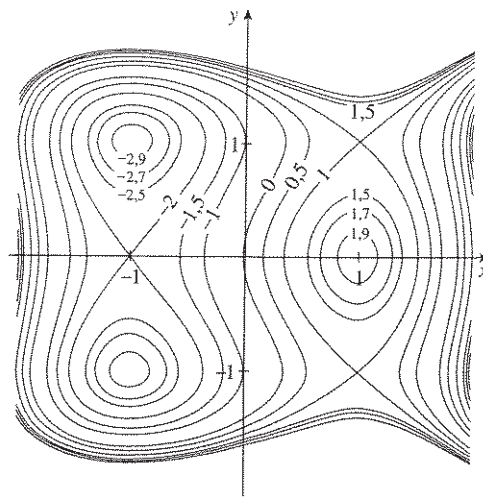
(c) $g_{xx}(0, 2) = 4$, $g_{xy}(0, 2) = 6$, $g_{yy}(0, 2) = 9$

- 3–4 □ Utilize as curvas de nível da figura para prever a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo locais em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida empregue o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas predições.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



- 5–18 □ Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa para traçar gráficos tridimensionais no computador, utilize-o com a janela de inspeção e o ponto de vista que mostre os aspectos importantes da função.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

8. $f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2}$

9. $f(x, y) = (1 + xy)(x + y)$

10. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

11. $f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$

12. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

14. $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}$

15. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

16. $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

17. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

18. $f(x, y) = x^2 y e^{-x^2 - y^2}$

19–22 □ Utilize o gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Em seguida use o cálculo para achar esses valores precisamente.

19. $f(x, y) = 3x^2 y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

20. $f(x, y) = xye^{-x^2 - y^2}$

21. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$,
 $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$

22. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$,
 $0 \leq x \leq \pi/4, 0 \leq y \leq \pi/4$

23–26 □ Utilize um dispositivo gráfico como no Exemplo 4 (ou Método de Newton ou um determinante de raízes) para estabelecer os pontos críticos de f com arredondamento na terceira casa decimal. Em seguida classifique o ponto crítico e determine o valor mais alto e o mais baixo do gráfico.

23. $f(x, y) = x^4 - 5x^2 + y^2 + 3x + 2$

24. $f(x, y) = 5 - 10xy - 4x^2 + 3y - y^4$

25. $f(x, y) = 2x + 4x^2 - y^2 + 2xy^2 - x^4 - y^4$

26. $f(x, y) = e^x + y^4 - x^3 + 4 \cos y$

27–34 □ Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D .

27. $f(x, y) = 1 + 4x - 5y$, D é a região triangular fechada com vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, e $(0, 3)$

28. $f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$, D é a região triangular fechada com vértices $(1, 0)$, $(5, 0)$, e $(1, 4)$

29. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4$,
 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

30. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$,
 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5\}$

31. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$,
 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$

32. $f(x, y) = xy^2$, $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$

33. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

34. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D é o quadrilátero cujos vértices são $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$, e $(-2, -2)$.

35. Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2 y - x - 1)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida utilize um computador para desenhar o gráfico com uma escolha cuidadosa de tamanho de janela de inspeção e de ponto de vista para ver como isso é possível.

36. Se uma função de uma variável é contínua em um intervalo e tem um único ponto crítico, então um máximo local tem de ser um máximo absoluto. Mas isso não é verdadeiro para as funções de duas variáveis. Mostre que a função

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

tem exatamente um ponto crítico, onde f tem um máximo, local, porém este não é um máximo absoluto. Em seguida utilize um computador com uma escolha conveniente de janela de inspeção e ponto de vista para ver como isso é possível.

37. Determine a distância mais curta entre o ponto $(2, 1, -1)$ e o plano $x + y - z = 1$.

38. Determine o ponto do plano $x - y + z = 4$ que está mais próximo do ponto $(1, 2, 3)$.

39. Determine os pontos da superfície $z^2 = xy + 1$ que estão mais próximos da origem.

40. Determine os pontos da superfície $x^2 y^2 z = 1$ que estão mais próximos da origem.

41. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

42. Determine três números positivos x, y e z cuja soma é 100 tal que $x^a y^b z^c$ seja máximo.

43. Determine o volume da maior caixa retangular com arestas paralelas aos eixos e que pode ser inscrita no elipsóide

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$$

44. Resolva o problema do Exercício 43 para um elipsóide genérico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

45. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $x + 2y + 3z = 6$.

46. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se sua superfície total é dada como 64 cm^2 .

47. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c .

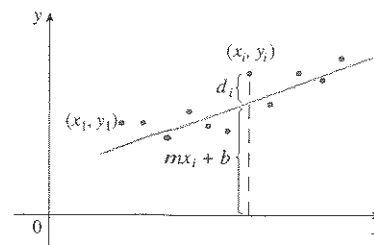
48. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

49. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 32.000 cm^3 . Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.
50. Um prédio retangular está sendo projetado para minimizar a perda de calor. As paredes leste e oeste perdem calor a uma taxa de 10 units/m^2 por dia, as paredes norte e sul, a uma taxa de 8 units/m^2 por dia, o piso, a uma taxa de 1 unit/m^2 por dia e o terraço, a uma taxa de 5 units/m^2 por dia. Cada parede deve ter, pelo menos, 30 m de comprimento, a altura, no mínimo, 4 m , e o volume exatamente 4.000 m^3 .
- Determine e esboce o domínio da perda de calor como uma função dos comprimentos dos seus lados.
 - Ache as dimensões que minimizam a perda de calor. (Análise tanto os pontos críticos como os pontos sobre a fronteira do domínio.)
 - Você poderia projetar um prédio com precisamente a mesma perda de calor se as restrições sobre os comprimentos dos lados fossem removidas?
51. Se o comprimento da diagonal de uma caixa retangular deve ser L , qual é o maior volume possível?
52. Três alelos (versões alternativas de um gene) A, B e O determinam os quatro tipos de sangue: A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. A Lei de Hardy-Weinberg estabelece que a proporção de indivíduos em uma população que carregam dois alelos diferentes é

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

onde p , q e r são proporções de A, B e O na população. Use o fato de que $p + q + r = 1$ para mostrar que P é no máximo $\frac{2}{3}$.

53. Suponha que um cientista tenha razões para acreditar que duas quantidades x e y sejam relacionadas linearmente, ou seja, $y = mx + b$, pelo menos aproximadamente, para algum valor de m e b . O cientista realiza um experimento e coleta os dados na forma de pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) , e então plota-os. Os pontos não estão todos alinhados, de modo que o cientista quer determinar as constantes m e b para que a reta $y = mx + b$ "se aproxime" dos pontos tanto quanto possível (veja a figura).



Seja $d_i = y_i - (mx_i + b)$ o desvio vertical do ponto (x_i, y_i) da reta. O método dos mínimos quadrados determina m e b de modo a minimizar $\sum_{i=1}^n d_i^2$, a soma dos quadrados dos desvios. Mostre que, de acordo com esse método, a reta que melhor aproxima é obtida quando

$$m \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \quad m \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Assim, a reta é determinada resolvendo esse sistema linear de duas equações nas incógnitas m e b . (Veja a Seção 1.2 do Volume I para mais aplicações do método dos mínimos quadrados.)

54. Determine uma equação do plano que passe pelo ponto $(1, 2, 3)$ que corte o menor volume do primeiro octante.

Projeto Aplicado

Projeto de uma Caçamba

Para esse projeto, inicialmente defina a forma na qual você deseja dimensionar uma caçamba de entulho com tampa. Tentaremos então determinar as dimensões de um recipiente de forma similar que minimize o custo de construção.

- Primeiro estabeleça uma caçamba de entulho. Estude e descreva cuidadosamente todos os detalhes de sua construção e determine seu volume. Inclua um esboço do recipiente.
- Mantendo a mesma forma geral e o método de construção, determine as dimensões que tal recipiente deveria ter para minimizar o custo de construção. Utilize as seguintes hipóteses para sua análise:
 - Os lados, a frente e a retaguarda devem ser feitos de aço laminado de $0,1046$ polegada de espessura, que custa $\$ 0,70$ por pé quadrado (incluindo custos de corte e dobra).
 - A base (fundo) é feita de um aço laminado de $0,1345$ polegada de espessura, que custa $\$ 0,90$ por pé quadrado.
 - As tampas custam aproximadamente $\$ 50,00$ cada, não importando a dimensão.
 - A soldagem custa aproximadamente $\$ 0,18$ por pé, considerando tanto o material quanto a mão-de-obra.

Dê sua justificativa para qualquer hipótese adicional ou simplificação feita dos detalhes de construção.

- Descreva como qualquer das hipóteses ou simplificações feitas pode afetar o resultado.
- Se você fosse contratado como consultor nessa pesquisa, quais seriam suas conclusões? Você recomendaria a alteração da forma da caçamba? Se sim, descreva a economia resultante.

Projeto Descoberta

Aproximação Quadrática e Pontos Críticos

A aproximação por polinômio de Taylor de uma função de uma variável discutida no Capítulo 11 pode ser estendida para as funções de duas ou mais variáveis. Estudaremos aqui a aproximação quadrática para as funções de duas variáveis e usaremos esse estudo para melhor entender o Teste da Segunda Derivada para classificar pontos críticos.

Na Seção 14.4 discutimos a linearização de uma função f de duas variáveis em um ponto (a, b) :

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Lembre-se de que o gráfico de L é o plano tangente da superfície $z = f(x, y)$ em $(a, b, f(a, b))$, e a aproximação linear correspondente é $f(x, y) \approx L(x, y)$. A linearização L é também chamada **polinômio de Taylor de primeiro grau** de f em (a, b) .

1. Se f tiver derivadas parciais de segunda ordem contínuas em (a, b) , então o **polinômio de Taylor de segundo grau** de f em (a, b) é

$$Q(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2}f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2}f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

e a aproximação $f(x, y) \approx Q(x, y)$ é denominada de **aproximação quadrática** de f em (a, b) . Verifique que Q tem as mesmas derivadas parciais de primeira e segunda ordens que f em (a, b) .

2. (a) Determine os polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus L e Q para $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ em $(0, 0)$.
 (b) Trace o gráfico de f , L e Q . Comente quão boas são essas aproximações.
3. (a) Estabeleça os polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus L e Q para $f(x, y) = xe^y$ em $(1, 0)$.
 (b) Compare os valores de L , Q e f em $(0,9, 0,1)$.
 (c) Trace o gráfico de f , L e Q . Comente quão boas são essas aproximações.
4. Nesse problema analisaremos o comportamento do polinômio $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ (sem utilizar o Teste da Segunda Derivada) identificando o gráfico como um parabolóide.
 (a) Completando os quadrados, mostre que, se $a \neq 0$, então

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}y \right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) y^2 \right]$$

- (b) Seja $D = 4ac - b^2$. Prove que, se $D > 0$ e $a > 0$, então f tem um mínimo local em $(0, 0)$.
 (c) Demonstre que, se $D > 0$ e $a < 0$, então f tem um máximo local em $(0, 0)$.
 (d) Mostre que, se $D < 0$, então $(0, 0)$ é um ponto de sela.
5. (a) Suponha que, f seja uma função qualquer com derivadas parciais de segunda ordem contínuas tal que $f(0, 0) = 0$ e que $(0, 0)$ seja um ponto crítico de f . Escreva uma expressão para o polinômio de Taylor de segundo grau Q , de f em $(0, 0)$.
 (b) O que você conclui sobre Q usando os resultados do Problema 4?
 (c) Em vista da aproximação quadrática $f(x, y) \approx Q(x, y)$, o que a parte (b) sugere sobre f ?

14.8 Multiplicadores de Lagrange

No Exemplo 6 da Seção 14.7 maximizamos a função volume $V = xyz$ sujeita à restrição $2xz + 2yz + xy = 12$, que expressa a condição da área da superfície ser de 12 m^2 . Nesta seção apresentaremos o método de Lagrange para maximizar uma função genérica $f(x, y, z)$ sujeita a uma restrição (ou condição) da forma $g(x, y, z) = k$.

É fácil explicar a base geométrica do método de Lagrange para as funções de duas variáveis. Então vamos começar tentando determinar os valores extremos de $f(x, y)$ sujeita à restrição da forma $g(x, y) = k$. Em outras palavras, queremos achar os valores extremos de $f(x, y)$ quando o ponto (x, y) pertencer à curva de nível $g(x, y) = k$. A Figura 1 mostra essa curva juntamente com várias outras curvas de nível da função f . Essas curvas de nível têm equação $f(x, y) = c$, onde $c = 7, 8, 9, 10, 11$. Maximizar $f(x, y)$ sujeita a $g(x, y) = k$ é achar qual o maior valor de c tal que a curva de nível $f(x, y) = c$ intercepte $g(x, y) = k$. Parece, da Figura 1, que isso acontece quando essas curvas se tocam, ou seja, quando essas curvas têm uma reta tangente em comum. (Caso contrário, poderíamos aumentar o valor de c .) Isso significa que as retas normais ao ponto (x_0, y_0) onde as duas curvas se tocam devem ser as mesmas. Logo os vetores gradientes são paralelos: ou seja, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algum escalar λ .

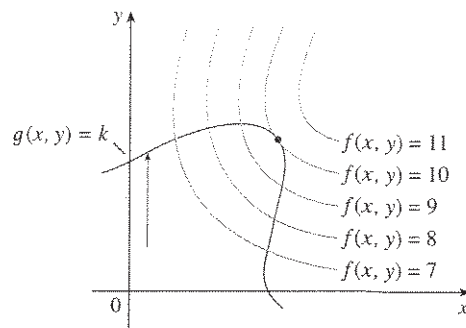


FIGURA 1

Esse argumento também se aplica ao problema de achar os valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$. Assim, o ponto (x, y, z) está restrito a pertencer à superfície S com equação $g(x, y, z) = k$. Em vez das curvas de nível da Figura 1, devemos considerar as superfícies de nível $f(x, y, z) = c$ e argumentar que, se o valor máximo de f é $f(x_0, y_0, z_0) = c$, então a superfície de nível $f(x, y, z) = c$ é tangente à superfície de nível $g(x, y, z) = k$, e então os correspondentes gradientes são paralelos.

Esse argumento intuitivo pode ser colocado de forma precisa como se segue. Suponha que uma função f tenha um valor extremo no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre a superfície S e seja C a curva com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ que pertença a S e passe pelo ponto P . Se t_0 é o valor do parâmetro correspondente ao ponto P , então $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$. A função composta $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ fornece os valores de f sobre a curva C . Como f tem um valor extremo em (x_0, y_0, z_0) , segue que h tem um valor extremo em t_0 , e, portanto, $h'(t_0) = 0$. Porém, se f for diferenciável, usando a Regra da Cadeia podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \end{aligned}$$

Isso mostra que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ para toda curva C assim obtida. Mas já vimos na Seção 14.6 que o vetor gradiente de g , $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$, também é ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$ (veja a Equação 14.6.18). Isso significa

□ Multiplicadores de Lagrange têm esse nome em homenagem ao matemático franco-italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Veja no Volume I, à página 292, uma pequena biografia de Lagrange.

que os vetores $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ precisam ser paralelos. Portanto, se $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, existe um número λ tal que

1

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

O número λ na Equação 1 é chamado **multiplicador de Lagrange**. O procedimento baseado na Equação 1 é o seguinte:

Método dos Multiplicadores de Lagrange Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeita a $g(x, y, z) = k$ [supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ sobre a superfície $g(x, y, z) = k$]:

(a) Determine todos os valores de x, y, z e λ tal que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

e

$$g(x, y, z) = k$$

(b) Calcule f em todos os pontos (x, y, z) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f , e o menor será o valor mínimo de f .

□ Ao derivar o Método de Lagrange, supusemos que $\nabla g \neq \mathbf{0}$. Em cada um de nossos exemplos você pode verificar que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em todos os pontos onde $g(x, y, z) = k$.

Se escrevermos a equação vetorial $\nabla f = \lambda \nabla g$ em termos de seus componentes, a equação do passo (a) ficará

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad f_z = \lambda g_z \quad g(x, y, z) = k$$

Isto é, um sistema de quatro equações a quatro incógnitas x, y, z e λ . Mas não é necessário calcular de modo explícito valores para λ .

Para as funções de duas variáveis, o método de Lagrange é semelhante àquele que acabamos de descrever. Para achar os valores extremos de $f(x, y)$ sujeita à restrição $g(x, y) = k$, olhamos para todos os valores de x, y e λ tais que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \text{e} \quad g(x, y) = k$$

Isso leva à solução de um sistema de três equações a três incógnitas:

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad g(x, y) = k$$

Nosso primeiro exemplo de método de Lagrange é reconsiderar o problema dado no Exemplo 6 da Seção 14.7.

EXEMPLO 1 □ Uma caixa retangular sem tampa é feita de 12 m^2 de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 6 da Seção 14.7, sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, da caixa em metros. Queremos maximizar

$$V = xyz$$

sujeita à restrição

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, olhamos para os valores de x , y , z , e λ tal que $\nabla V = \lambda \nabla g$ e $g(x, y, z) = 12$. Isso gera as equações

$$V_x = \lambda g_x \quad V_y = \lambda g_y \quad V_z = \lambda g_z \quad 2xz + 2yz + xy = 12$$

ou seja:

$$\boxed{2} \quad yz = \lambda(2z + y)$$

$$\boxed{3} \quad xz = \lambda(2z + x)$$

$$\boxed{4} \quad xy = \lambda(2x + 2y)$$

$$\boxed{5} \quad 2xz + 2yz + xy = 12$$

Não há regras gerais de como resolver esse sistema de equações. Algumas vezes precisamos de certa engenhosidade. No presente caso você pode notar que, se multiplicarmos (2) por x , (3) por y e (4) por z , os lados esquerdos dessas equações ficam idênticos. Fazendo isso, temos

$$\boxed{6} \quad xyz = \lambda(2xz + xy)$$

$$\boxed{7} \quad xyz = \lambda(2yz + xy)$$

$$\boxed{8} \quad xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

Observamos que $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0$ implicaria $yz = xz = xy = 0$ de (2), (3) e (4), e isso contradiz (5). Logo, de (6) e (7), temos

$$2xz + xy = 2yz + xy$$

que dá $xz = yz$. Mas $z \neq 0$ (uma vez que $z = 0$ daria $V = 0$), portanto $x = y$. De (7) e (8), obtemos

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

que dá $2xz = xy$ e, assim, (como $x \neq 0$) $y = 2z$. Se colocarmos $x = y = 2z$ em (5), obteremos

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

Como x , y e z são todos positivos, temos que $z = 1$, $x = 2$ e $y = 2$ como antes. □

EXEMPLO 2 □ Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO Foi-nos pedido para determinar os valores extremos de f sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Usando os multiplicadores de Lagrange, resolvemos as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g(x, y) = 1$, que podem ser escritas como

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad g(x, y) = 1$$

ou como

$$\boxed{9} \quad 2x = 2x\lambda$$

$$\boxed{10} \quad 4y = 2y\lambda$$

$$\boxed{11} \quad x^2 + y^2 = 1$$

□ Outro método de resolver o sistema de equações (2-5) é resolver cada uma das equações 2, 3 e 4 para depois equacionar as expressões resultantes.

□ Em termos geométricos, o Exemplo 2 pede os pontos mais altos e os pontos mais baixos da curva C da Figura 2 que pertence ao parabolóide $z = x^2 + 2y^2$ e cuja projeção seja o círculo de restrição $x^2 + y^2 = 1$.

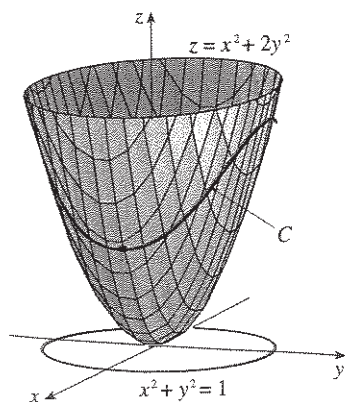


FIGURA 2

□ A geometria por trás do uso de multiplicadores de Lagrange no Exemplo 2 é mostrada na Figura 3. Os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ correspondem às curvas de nível que encostam na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

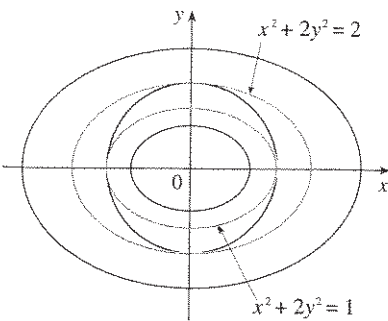


FIGURA 3

De (9), temos $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Se $x = 0$, então (11) leva a $y = \pm 1$. Se $\lambda = 1$, então $y = 0$ de (10), e assim (11) fornece $x = \pm 1$. Dessa forma, os valores extremos possíveis de f são os pontos $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Calculando f nesses quatro pontos, achamos

$$f(0, 1) = 2 \quad f(0, -1) = 2 \quad f(1, 0) = 1 \quad f(-1, 0) = 1$$

Portanto, o valor máximo de f no círculo $x^2 + y^2 = 1$ é $f(0, \pm 1) = 2$, e o valor mínimo é $f(\pm 1, 0) = 1$. Verificando na Figura 2, vemos que esses valores são razoáveis. □

EXEMPLO 3 □ Estabeleça os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

SOLUÇÃO De acordo com o procedimento em (14.7.9), comparamos os valores de f nos pontos críticos com os pontos na fronteira. Como $f_x = 2x$ e $f_y = 4y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$. Comparamos o valor de f nesse ponto com os valores extremos de f na fronteira obtidos no Exemplo 2:

$$f(0, 0) = 0 \quad f(\pm 1, 0) = 1 \quad f(0, \pm 1) = 2$$

Assim, o valor máximo de f no disco $x^2 + y^2 \leq 1$ é $f(0, \pm 1) = 2$, e o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$. □

EXEMPLO 4 □ Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto $(3, 1, -1)$.

SOLUÇÃO A distância de um ponto (x, y, z) ao ponto $(3, 1, -1)$ é

$$d = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2}$$

mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos e minimizarmos o quadrado dessa distância:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2$$

A restrição é que o ponto (x, y, z) pertença à esfera, ou seja,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 4$, o que nos leva a:

$$\boxed{12} \quad 2(x - 3) = 2x\lambda$$

$$\boxed{13} \quad 2(y - 1) = 2y\lambda$$

$$\boxed{14} \quad 2(z + 1) = 2z\lambda$$

$$\boxed{15} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

O modo mais simples de resolver essas equações é determinar x, y e z em termos de λ de (12), (13) e (14), e substituir esses valores em (15). De (12), temos

$$x - 3 = x\lambda \quad \text{ou} \quad x(1 - \lambda) = 3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{1 - \lambda}$$

□ A geometria por trás do uso de multiplicadores de Lagrange no Exemplo 2 é mostrada na Figura 3. Os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ correspondem às curvas de nível que encostam na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

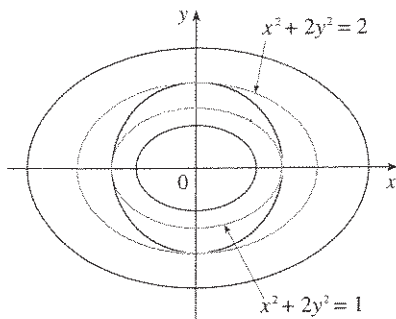


FIGURA 3

De (9), temos $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Se $x = 0$, então (11) leva a $y = \pm 1$. Se $\lambda = 1$, então $y = 0$ de (10), e assim (11) fornece $x = \pm 1$. Dessa forma, os valores extremos possíveis de f são os pontos $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Calculando f nesses quatro pontos, achamos

$$f(0, 1) = 2 \quad f(0, -1) = 2 \quad f(1, 0) = 1 \quad f(-1, 0) = 1$$

Portanto, o valor máximo de f no círculo $x^2 + y^2 = 1$ é $f(0, \pm 1) = 2$, e o valor mínimo é $f(\pm 1, 0) = 1$. Verificando na Figura 2, vemos que esses valores são razoáveis. □

EXEMPLO 3 □ Estabeleça os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

SOLUÇÃO De acordo com o procedimento em (14.7.9), comparamos os valores de f nos pontos críticos com os pontos na fronteira. Como $f_x = 2x$ e $f_y = 4y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$. Comparamos o valor de f nesse ponto com os valores extremos de f na fronteira obtidos no Exemplo 2:

$$f(0, 0) = 0 \quad f(\pm 1, 0) = 1 \quad f(0, \pm 1) = 2$$

Assim, o valor máximo de f no disco $x^2 + y^2 \leq 1$ é $f(0, \pm 1) = 2$, e o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$. □

EXEMPLO 4 □ Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto $(3, 1, -1)$.

SOLUÇÃO A distância de um ponto (x, y, z) ao ponto $(3, 1, -1)$ é

$$d = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2}$$

mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos e minimizarmos o quadrado dessa distância:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2$$

A restrição é que o ponto (x, y, z) pertença à esfera, ou seja,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 4$, o que nos leva a:

$$\boxed{12} \quad 2(x - 3) = 2x\lambda$$

$$\boxed{13} \quad 2(y - 1) = 2y\lambda$$

$$\boxed{14} \quad 2(z + 1) = 2z\lambda$$

$$\boxed{15} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

O modo mais simples de resolver essas equações é determinar x , y e z em termos de λ de (12), (13) e (14), e substituir esses valores em (15). De (12), temos

$$x - 3 = x\lambda \quad \text{ou} \quad x(1 - \lambda) = 3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{1 - \lambda}$$

□ A Figura 4 mostra a esfera e o ponto mais próximo P do Exemplo 4. Você pode pensar em um modo de calcular as coordenadas de P sem usar o cálculo?

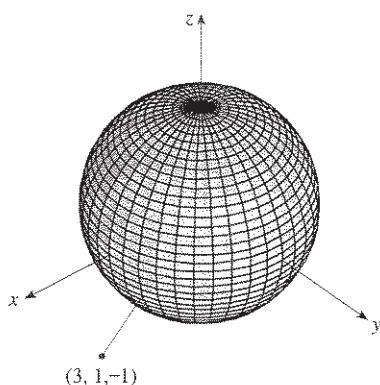


FIGURA 4

[Note que $1 - \lambda \neq 0$ porque, de (12), $\lambda = 1$ é impossível.] De forma semelhante, (13) e (14) fornecem

$$y = \frac{1}{1 - \lambda} \quad z = -\frac{1}{1 - \lambda}$$

Portanto, de (15) temos

$$\frac{3^2}{(1 - \lambda)^2} + \frac{1^2}{(1 - \lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1 - \lambda)^2} = 4$$

que nos dá $(1 - \lambda)^2 = \frac{11}{4}$, $1 - \lambda = \pm\sqrt{11}/2$. Logo

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Esses valores de λ então fornecem os pontos correspondentes (x, y, z) :

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}} \right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}} \right)$$

É fácil ver que f tem valor menor no primeiro desses pontos; dessa forma, o ponto mais próximo é $(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11})$ e o mais distante é $(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11})$. □

■ Duas Restrições

Suponha agora que queiramos determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeita a duas restrições (condições laterais) da forma $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$. Geometricamente, isso significa que estamos procurando pelos valores extremos de f quando (x, y, z) está restrita a pertencer à curva C , obtida pela interseção das superfícies de nível $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$. (Veja a Figura 5.) Suponha que f tenha um tal valor extremo no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$. Sabemos, do começo desta seção, que ∇f é ortogonal a C lá. Mas nós também sabemos que ∇g é ortogonal a $g(x, y, z) = k$ e que ∇h é ortogonal a $h(x, y, z) = c$, portanto ∇g e ∇h são ambos ortogonais a C . Isso significa que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ pertence ao plano determinado por $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. (Estamos supondo que esses vetores gradientes não são paralelos nem nulos.) Logo, existem números λ e μ (chamados multiplicadores de Lagrange), tais que

$$\boxed{16} \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

Nesse caso o método de Lagrange nos leva a procurar os valores extremos resolvendo as cinco equações nas cinco incógnitas x, y, z, λ e μ . Essas equações podem ser obtidas escrevendo-se a Equação (16) em termos dos componentes e usando as equações das restrições:

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$

$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$

$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = c$$

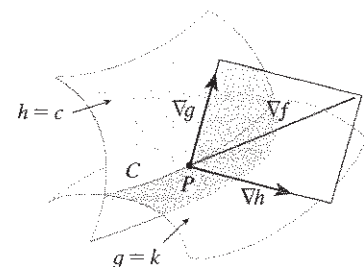


FIGURA 5

□ O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intercepta o plano $x - y + z = 1$ em uma elipse (Figura 6). O Exemplo 5 pergunta pelo valor máximo de f quando (x, y, z) pertence a essa elipse.

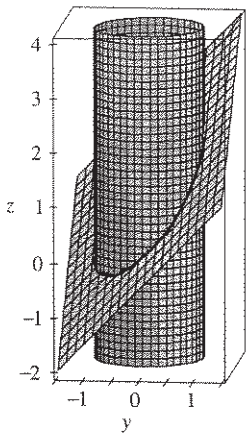


FIGURA 6

EXEMPLO 5 □ Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da interseção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO Maximizamos a função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. A condição de Lagrange é $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, de modo que devemos resolver as equações

$$\begin{aligned} \text{17} \quad & 1 = \lambda + 2x\mu \\ \text{18} \quad & 2 = -\lambda + 2y\mu \\ \text{19} \quad & 3 = \lambda \\ \text{20} \quad & x - y + z = 1 \\ \text{21} \quad & x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = 3$ [de (19)] em (17), obtemos $2x\mu = -2$, e então $x = -1/\mu$. Analogamente, (18) dá $y = 5/(2\mu)$. Substituindo em (21), temos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

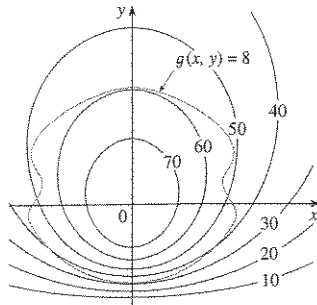
e também $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Assim $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$ e, de (20), $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Os valores correspondentes de f são

$$\mp \frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm \frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Portanto o valor máximo de f na curva dada é $3 + \sqrt{29}$. □

14.8 Exercícios

1 Na figura estão mapas de contorno de f e a curva de equação $g(x, y) = 8$. Estime os valores máximo e mínimo de f sujeita à restrição $g(x, y) = 8$. Explique suas razões.



2 (a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Na mesma tela, trace diversas curvas da forma $x^2 + y = c$ até que você encontre uma que encoste no círculo. Qual o significado dos valores de c para essas duas curvas?

(b) Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$. Compare sua resposta com a da parte (a).

3-17 □ Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

- 3** $f(x, y) = x^2 - y^2$; $x^2 + y^2 = 1$
- 4** $f(x, y) = 4x + 6y$; $x^2 + y^2 = 13$
- 5** $f(x, y) = x^2y$; $x^2 + 2y^2 = 6$
- 6** $f(x, y) = x^2 + y^2$; $x^4 + y^4 = 1$
- 7** $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 35$
- 8** $f(x, y, z) = 8x - 4z$; $x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$
- 9** $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
- 10** $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- 11** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$
- 12** $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t; \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

14. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n;$
 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$

15. $f(x, y, z) = x + 2y; \quad x + y + z = 1, \quad y^2 + z^2 = 4$

16. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z;$
 $x + y - z = 0, \quad x^2 + 2z^2 = 1$

17. $f(x, y, z) = yz + xy; \quad xy = 1, \quad y^2 + z^2 = 1$

18–19 □ Determine os valores extremos de f na região descrita pela desigualdade.

18. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \quad x^2 + y^2 \leq 16$

19. $f(x, y) = e^{-xy}, \quad x^2 + 4y^2 \leq 1$

20. (a) Se seu sistema algébrico computacional traça o gráfico de curvas definidas implicitamente, use-o para estimar os valores mínimo e máximo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeita a $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ por métodos gráficos.

(b) Resolva o problema da parte (a) com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Use um CAS para resolver as equações numericamente. Compare sua resposta com a da parte (a).

21. A produção total P de certo produto depende da quantidade L de trabalho empregado e da quantidade K de capital investido. Nas Seções 14.1 e 14.3 discutimos como Cobb-Douglas modelaram $P = bL^\alpha K^{1-\alpha}$ seguindo certas hipóteses econômicas, onde b e α são constantes positivas e $\alpha < 1$. Se o custo por unidade de trabalho for m e o custo por unidade de capital for n , e uma companhia pode gastar somente uma quantidade p de dinheiro como despesa total, maximizar a produção P estará sujeita à restrição $mL + nK = p$. Mostre que a produção máxima ocorre quando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \quad \text{e} \quad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

22. Referindo-se ao Exercício 21, suponha agora que a produção esteja fixada em $bL^\alpha K^{1-\alpha} = Q$, onde Q é uma constante. Que valores de L e K minimizam a função custo $C(L, K) = mL + nK$?

23. Utilize os multiplicadores de Lagrange para provar que o retângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p , é um quadrado.

24. Use multiplicadores de Lagrange para provar que o triângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p , é equilátero. [Dica: Utilize a fórmula de Heron para a área: $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$, onde $s = p/2$ e x, y, z são os comprimentos dos lados.]

25–37 □ Utilize os multiplicadores de Lagrange para dar uma solução alternativa aos exercícios da Seção 14.7 indicados.

- 25. Exercício 37
- 26. Exercício 38
- 27. Exercício 39
- 28. Exercício 40
- 29. Exercício 41
- 30. Exercício 42

- 31. Exercício 43
- 32. Exercício 44
- 33. Exercício 45
- 34. Exercício 46
- 35. Exercício 47
- 36. Exercício 48
- 37. Exercício 51

38. Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem 1.500 cm^2 e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm .

39. O plano $x + y + 2z = 2$ intercepta o parabolóide $z = x^2 + y^2$ em uma elipse. Determine os pontos dessa elipse que estão o mais próximo e o mais longe possível da origem.

40. O plano $4x - 3y + 8z = 5$ intercepta o cone $z^2 = x^2 + y^2$ em uma elipse.

(a) faça os gráficos do cone, do plano e da elipse.

(b) Use os multiplicadores de Lagrange para achar os pontos mais alto e mais baixo da elipse.

41–42 □ Ache os valores de máximo e mínimo da f sujeita às restrições dadas. Utilize um sistema computacional algébrico para resolver o sistema de equações proveniente do uso dos multiplicadores de Lagrange. (Se seu CAS acha somente uma solução, você pode necessitar do uso de comandos adicionais.)

41. $f(x, y, z) = ye^{x-z}; \quad 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36, \quad xy + yz = 1$

42. $f(x, y, z) = x + y + z; \quad x^2 - y^2 = z, \quad x^2 + z^2 = 4$

43. (a) Determine o valor máximo de $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ dado que x_1, x_2, \dots, x_n são números positivos e $x_1 + x_2 + \dots + x_n = c$, onde c é uma constante.

(b) Deduza da parte (a) que, se x_1, x_2, \dots, x_n são números positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Essa desigualdade diz que a média geométrica de n números não pode ser maior que a média aritmética deles. Sob que circunstâncias as duas médias são iguais?

44. (a) Maximize $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ sujeita às restrições $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ e $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$.

(b) Tome

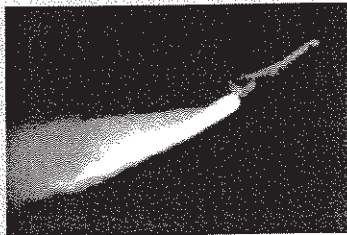
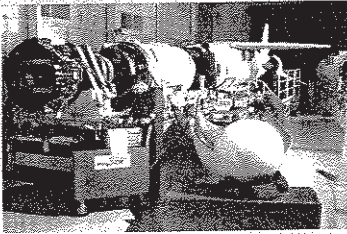
$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \quad \text{e} \quad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

e mostre que

$$\sum a_i b_i \leq \sqrt{\sum a_j^2} \sqrt{\sum b_j^2}$$

para números $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. Essa desigualdade é conhecida como a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Projeto Aplicado



Ciência dos Foguetes

Muitos foguetes, tais como o *Pegasus XL*, usado atualmente para o lançamento de satélites, e o *Saturno V*, que colocou o primeiro homem na Lua, são projetados para usar três estágios em sua subida para o espaço. O primeiro e maior estágio impulsiona o foguete até que seu combustível seja consumido, quando esse estágio é ejetado para diminuir a massa do foguete. O segundo e terceiro estágios, que são menores, funcionam da mesma forma, posicionando a carga do foguete em órbita em torno da Terra. (Com esse projeto são necessários pelo menos dois estágios para que o foguete atinja a velocidade necessária, e o uso de três estágios provou ser um bom compromisso entre custo e desempenho.) Nosso objetivo aqui é determinar as massas individuais dos três estágios a serem projetados de forma a minimizar a massa total do foguete e ao mesmo tempo atingir a velocidade desejada.

Para um foguete com um único estágio consumindo combustível a uma taxa constante, a variação de velocidade resultante da aceleração do foguete foi modelada por

$$\Delta V = -c \ln \left(1 - \frac{(1-S)M_f}{P + M_f} \right)$$

onde M_f é a massa do propulsor do foguete, incluindo o combustível inicial, P é a massa da carga, S é o fator estrutural determinado pelo projeto do foguete (especificamente, é a razão entre a massa do foguete sem combustível e sem carga e a massa do foguete com carga e combustível) e c é a (constante) rapidez de exaustão relativa do foguete.

Considere agora um foguete de três estágios e carga de massa A . Vamos considerar as forças externas desprezíveis e supor que c e S permaneçam constantes em cada estágio. Se M_i é a massa do i -ésimo estágio, podemos inicialmente considerar que o propulsor do foguete tenha massa M_1 e sua carga tenha massa $M_2 + M_3 + A$; o segundo e terceiro estágios podem ser tratados da mesma forma.

1. Mostre que a velocidade atingida depois que os três estágios são ejetados é dada por

$$v_f = c \left[\ln \left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{SM_1 + M_2 + M_3 + A} \right) + \ln \left(\frac{M_2 + M_3 + A}{SM_2 + M_3 + A} \right) + \ln \left(\frac{M_3 + A}{SM_3 + A} \right) \right]$$

2. Desejamos minimizar a massa total $M = M_1 + M_2 + M_3$ do propulsor do foguete sujeito à restrição que a velocidade desejada v_f do Problema 1 seja atingida. O método dos multiplicadores de Lagrange é apropriado, mas é difícil implementá-lo usando as expressões de que dispomos até aqui. Para simplificar, definimos variáveis N_i de modo que a restrição possa ser expressa como $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. Como é difícil exprimir M em termos dos N_i , desejamos usar uma função mais simples que ao ser minimizada leve também à minimização de M . Mostre que

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{M_2 + M_3 + A} = \frac{(1-S)N_1}{1-SN_1}$$

$$\frac{M_2 + M_3 + A}{M_3 + A} = \frac{(1-S)N_2}{1-SN_2}$$

$$\frac{M_3 + A}{A} = \frac{(1-S)N_3}{1-SN_3}$$

E conclua que

$$\frac{M + A}{A} = \frac{(1-S)^3 N_1 N_2 N_3}{(1-SN_1)(1-SN_2)(1-SN_3)}$$

3. Verifique que $\ln((M + A)/A)$ tem os mesmos pontos de mínimo que M ; utilize os multiplicadores de Lagrange e o resultado do Problema 2 para determinar as expressões para os valores de N_i onde o mínimo ocorre sujeito à restrição $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. [Dica: Utilize as propriedades dos logaritmos para ajudar a simplificar as expressões.]

4. Determine uma expressão para o valor mínimo de M como função de v_f .
5. Se desejarmos colocar um foguete de três estágios em uma órbita 100 milhas acima da superfície terrestre, a velocidade final necessária é de aproximadamente 17.500 mi/h. Suponha que cada estágio seja construído com um fator estrutural $S = 0,2$ e que a rapidez de exaustão seja $c = 6.000$ mi/h.
 - (a) Determine a massa total mínima M do propulsor do foguete como função de A .
 - (b) Estabeleça a massa de cada estágio como função de A . (Eles não precisam ter tamanhos iguais!)
6. O mesmo foguete requereria uma velocidade final de 24.700 mi/h aproximadamente para escapar da gravidade terrestre. Determine a massa de cada estágio que minimizaria a massa total do propulsor do foguete e lhe permitiria carregar uma sonda de 500 lb para o espaço.

Projeto Aplicado

Otimização de uma Turbina Hidráulica

A Great Northern Paper Company, de Millinocket, no estado de Maine, opera uma usina hidrelétrica no rio Penobscot. A água é bombeada de uma represa para a usina geradora de potência. A taxa na qual a água flui nas tubulações varia, dependendo de condições externas.

A usina geradora de potência tem três turbinas hidrelétricas diferentes; para cada uma delas, é conhecida a quantidade de potência elétrica que ela gera em função do fluxo de água que chega à turbina (função de potência da turbina). A água que chega pode ser distribuída em quantidades diferentes entre as turbinas, e nosso objetivo é determinar como programar essa distribuição de água para obter a produção total máxima, dada a taxa de vazão que entra na usina geradora.

Usando dados experimentais e a *equação de Bernoulli*, chegou-se ao modelo quadrático mostrado para a saída de potência de cada turbina, com as seguintes vazões de operação permitidas:

$$KW_1 = (-18,89 + 0,1277Q_1 - 4,08 \cdot 10^{-5}Q_1^2)(170 - 1,6 \cdot 10^{-6}Q_1^2)$$

$$KW_2 = (-24,51 + 0,1358Q_2 - 4,69 \cdot 10^{-5}Q_2^2)(170 - 1,6 \cdot 10^{-6}Q_2^2)$$

$$KW_3 = (-27,02 + 0,1380Q_3 - 3,84 \cdot 10^{-5}Q_3^2)(170 - 1,6 \cdot 10^{-6}Q_3^2)$$

$$250 \leq Q_1 \leq 1110, \quad 250 \leq Q_2 \leq 1110, \quad 250 \leq Q_3 \leq 1225$$

onde

Q_i = fluxo através da turbina i em pés cúbicos por segundo

KW_i = potência gerada pela turbina i em quilowatts

Q_T = fluxo total através da usina geradora em pés cúbicos por segundo

1. Se todas as três turbinas estiverem sendo usadas, queremos determinar o fluxo Q_i em cada turbina que resultará na produção total máxima de energia. Nossas limitações são que o fluxo total precisa ser igual ao fluxo que chega à usina e que para cada turbina o fluxo esteja na faixa permitida. Conseqüentemente, utilize os multiplicadores de Lagrange para achar os valores de cada fluxo individual (como função de Q_T) que maximize a produção total de energia $KW_1 + KW_2 + KW_3$ sujeita às restrições $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_T$ e restrições de domínio de cada Q_i .
2. Para que valores de Q_T seu resultado é válido?
3. Para uma vazão de entrada de 2.500 pc³/s, determine a distribuição para as turbinas e verifique (tentando algumas distribuições semelhantes) que seu resultado corresponde realmente a um máximo.
4. Até agora supusemos que as três turbinas estavam em operação. É possível que mais potência possa ser obtida usando somente uma turbina em algumas situações? Faça um gráfico das funções potência e utilize-o para decidir se uma vazão de entrada de 1.000 pc³/s deveria ser

distribuída para as três turbinas ou concentrada em uma só. (Se você concluir que só uma turbina deverá ser utilizada, responda: qual é ela?) E se a vazão for de somente 600 pés³/s?

5. Talvez para alguns níveis de vazão seja vantajoso usar duas turbinas. Se a vazão de chegada for de 1.500 pés³/s, quais duas turbinas devem ser utilizadas? Use os multiplicadores de Lagrange para determinar como a vazão deveria ser distribuída entre as duas turbinas para maximizar a energia produzida. Para essa vazão, o uso de duas turbinas é mais eficiente que o emprego das três?
6. Se a vazão de entrada for de 3.400 pés³/s, o que você recomendaria para a empresa?

14

Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) O que é uma função de duas variáveis?
(b) Descreva três métodos para visualizar uma função de duas variáveis.
2. O que é uma função de três variáveis? Como você pode visualizar tal função?
3. O que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

significa? Como mostrar que esse limite não existe?

4. (a) O que significa dizer que f é contínua em (a, b) ?
(b) Se f é contínua em \mathbb{R}^2 , o que você pode dizer de seu gráfico?
5. (a) Escreva as expressões para as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ como limites.
(b) Como você interpreta $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ geometricamente? Como as interpreta como taxas de variação?
(c) Se $f(x, y)$ é dada por uma fórmula, como calcular f_x e f_y ?
6. O que o Teorema de Clairaut diz?
7. Como achar o plano tangente a cada um dos seguintes tipos de superfície?
(a) Um gráfico de uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$
(b) Uma superfície de nível de uma função de três variáveis, $F(x, y, z) = k$
8. Defina a linearização de f em (a, b) . Qual é sua correspondente aproximação linear? Qual é a interpretação geométrica da aproximação linear?
9. (a) O que significa dizer que f é diferenciável em (a, b) ?
(b) Como usualmente verificamos se f é diferenciável?
10. Se $z = f(x, y)$, o que são os diferenciais dx , dy e dz ?
11. Diga qual é a Regra da Cadeia para o caso em que $z = f(x, y)$ e x e y são funções de uma única variável. E se x e y são funções de duas variáveis?

12. Se z é definido implicitamente como uma função de x e y por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$, como determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$?

13. (a) Escreva uma expressão como limite para a derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção e sentido do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. Como interpretá-lo como taxa de variação? Como interpretá-lo geometricamente?
(b) Se f é diferenciável, escreva uma expressão para $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ em termos de f_x e f_y .

14. (a) Defina o vetor gradiente ∇f de uma função f de duas ou três variáveis.
(b) Exprima $D_{\mathbf{u}}f$ em termos de ∇f .
(c) Explique o significado geométrico do gradiente.

15. O que as seguintes sentenças significam?
(a) f tem um máximo local em (a, b) .
(b) f tem um máximo absoluto em (a, b) .
(c) f tem um mínimo local em (a, b) .
(d) f tem um mínimo absoluto em (a, b) .
(e) f tem um ponto de sela em (a, b) .

16. (a) Se f tem um máximo local em (a, b) , o que você pode dizer de suas derivadas parciais em (a, b) ?
(b) O que é um ponto crítico de f ?

17. Qual é o Teste da Segunda Derivada?

18. (a) O que é um conjunto fechado em \mathbb{R}^2 ? O que é um conjunto limitado?
(b) Dê o enunciado do Teorema dos Valores Extremos para as funções de duas variáveis.
(c) Como achar os valores que o Teorema dos Valores Extremos garante existirem?

19. Explique como o método dos multiplicadores de Lagrange funciona para determinar os valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$. E se tivermos uma segunda restrição $h(x, y, z) = c$?

TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se as sentenças são falsas ou verdadeiras. Se verdadeiras, explique por quê; se falsas, explique por que ou dê um contra-exemplo.

1. $f_y(a, b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$
2. Existe uma função f com derivadas parciais de segunda ordem contínuas tais que $f_x(x, y) = x + y^2$ e $f_y(x, y) = x - y^2$.
3. $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
4. $D_k f(x, y, z) = f_k(x, y, z)$
5. Se $f(x, y) \rightarrow L$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo de toda reta que passa por (a, b) , então $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$.
6. Se $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ existem, então f é diferenciável em (a, b) .

7. Se f tem um mínimo local em (a, b) e f é diferenciável em (a, b) , então $\nabla f(a, b) = 0$.
8. Se f é uma função, então $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 5)} f(x, y) = f(2, 5)$.
9. Se $f(x, y) = \ln y$, então $\nabla f(x, y) = 1/y$.
10. Se $(2, 1)$ é um ponto crítico de f e $f_{xx}(2, 1)f_{yy}(2, 1) < [f_{xy}(2, 1)]^2$ então f é um ponto de sela de f em $(2, 1)$.
11. Se $f(x, y) = \sin x + \sin y$, então $-\sqrt{2} \leq D_u f(x, y) \leq \sqrt{2}$.
12. Se $f(x, y)$ tem dois máximos locais, então f tem um mínimo local.

EXERCÍCIOS

1-2 □ Determine e esboce o domínio da função.

1. $f(x, y) = \sin^{-1}x + \operatorname{tg}^4y$
2. $f(x, y, z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$

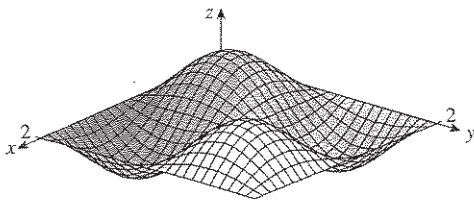
3-4 □ Esboce o gráfico da função.

3. $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
4. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$

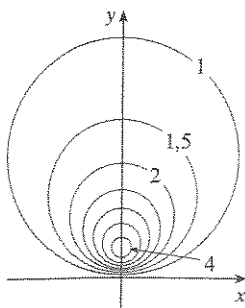
5-6 □ Esboce várias curvas de nível da função.

5. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$
6. $f(x, y) = x^2 + 4y$

7. Faça um esboço de um mapa de contorno da função cujo gráfico está mostrado.



8. Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f .



9-10 □ Avalie o limite ou mostre que ele não existe.

9. $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$
10. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

11. Uma placa de metal está situada no plano xy e ocupa o retângulo $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 8$, onde x e y são medidos em metros. A temperatura no ponto (x, y) do plano é $T(x, y)$, onde T é medido em graus Celsius. Temperaturas em pontos igualmente espaçados foram medidas e registradas na tabela.

$x \backslash y$	0	2	4	6	8
0	30	38	45	51	55
2	52	56	60	62	61
4	78	74	72	68	66
6	98	87	80	75	71
8	96	90	86	80	75
10	92	92	91	87	78

- (a) Estime o valor das derivadas parciais $T_x(6, 4)$ e $T_y(6, 4)$. Quais são as unidades?
- (b) Estime o valor de $D_u T(6, 4)$, onde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$. Interprete o resultado.
- (c) Estime o valor de $T_{xy}(6, 4)$.

12. Determine uma aproximação linear para a função temperatura $T(x, y)$ do Exercício 11 perto do ponto $(6, 4)$. Em seguida use-a para estimar a temperatura no ponto $(5; 3,8)$.

13-17 □ Determine as derivadas parciais de primeira ordem.

13. $f(x, y) = \sqrt{2x + y^2}$
14. $u = e^{-r} \sin 2\theta$

15. $g(u, v) = u \operatorname{tg}^{-1}v$ 16. $w = \frac{x}{y-z}$
 17. $T(p, q, r) = p \ln(q + e^r)$

18. A rapidez da propagação da onda sonora no oceano é uma função da temperatura, da salinidade e da pressão. Foi modelada como

$$C = 1449,2 + 4,6T - 0,055T^2 + 0,00029T^3 + (1,34 - 0,01T)(S - 35) + 0,016D$$

onde C é a rapidez do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius), S é a salinidade (concentração de sal em partes por milhar, o que significa o número de gramas do sólido dissolvido por 1000 g de água) e D é a profundidade abaixo da superfície do oceano (em metros). Calcule $\partial C/\partial T$, $\partial C/\partial S$, $\partial C/\partial D$ quando $T = 10^\circ\text{C}$, $S = 35$ partes por milhar e $D = 100$ m. Explique o significado físico dessas derivadas parciais.

19-22 □ Determine as derivadas parciais de segunda ordem de f .

19. $f(x, y) = 4x^3 - xy^2$ 20. $z = xe^{-2y}$
 21. $f(x, y, z) = x^t y^t z^m$ 22. $v = r \cos(s + 2t)$

23. Se $u = x^y$, mostre que $\frac{x}{y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$.

24. Se $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, mostre que $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{2}{\rho}$

25-29 □ Encontre uma equação do (a) plano tangente e (b) da reta normal para superfície dada no ponto especificado.

25. $z = 3x^2 - y^2 + 2x$, $(1, -2, 1)$
 26. $z = e^x \cos y$, $(0, 0, 1)$
 27. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3$, $(2, -1, 1)$
 28. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$
 29. $\operatorname{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$, $(2, -1, 0)$

30. Use um computador para traçar o gráfico da superfície $z = x^3 + 2xy$ e de seu plano tangente e reta normal por $(1, 2, 5)$ na mesma tela. Escolha o domínio e ponto de vista para obter uma boa visão dos três objetos.

31. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $2x + y - 3z = 2$.
 32. Determine dz se $z = x^2 \operatorname{tg}^{-1}y$.
 33. Estabeleça a aproximação linear da função $f(x, y, z) = x^3 \sqrt{y^2 + z^2}$ no ponto $(2, 3, 4)$ e use-a para estimar o número $(1,98)^3 \sqrt{(3,01)^2 + (3,97)^2}$.
 34. Os dois lados do triângulo retângulo medem 5 m e 12 m com um erro possível nas medidas de, no máximo, 0,2 cm em cada.

Utilize diferenciais para estimar o máximo erro no cálculo de (a) área do triângulo e (b) comprimento da hipotenusa.

35. Se $w = \sqrt{x + y^2/z}$, onde $x = e^{2t}$, $y = t^3 + 4t$, e $z = t^2 - 4$, utilize a Regra da Cadeia para determinar dw/dt .
 36. Se $z = \cos xy + y \cos x$, onde $x = u^2 + v$ e $y = u - v^2$, utilize a Regra da Cadeia para determinar $\partial z/\partial u$ e $\partial z/\partial v$.
 37. Suponha que $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $g(1, 2) = 3$, $g_s(1, 2) = -1$, $g_t(1, 2) = 4$, $h(1, 2) = 6$, $h_s(1, 2) = -5$, $h_t(1, 2) = 10$, $f_s(3, 6) = 7$ e $f_t(3, 6) = 8$. Determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$ quando $s = 1$ e $t = 2$.
 38. Utilize o grafo da árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso onde $w = f(t, u, v)$, $t = t(p, q, r, s)$, $u = u(p, q, r, s)$ e $v = v(p, q, r, s)$, todas diferenciáveis.
 39. Se $z = y + f(x^2 - y^2)$, onde f é diferenciável, mostre que

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

40. O comprimento x de um lado de um triângulo é aumentado à taxa de 3 pol/s, o comprimento de outro lado é diminuído à taxa de 2 pol/s, e o ângulo contido θ é aumentado à taxa de 0,05 rad/s. Qual a rapidez da variação da área do triângulo quando $x = 40$ pol, $y = 50$ pol e $\theta = \pi/6$?
 41. Se $z = f(u, v)$, onde $u = xy$, $v = y/x$ e f têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, mostre que

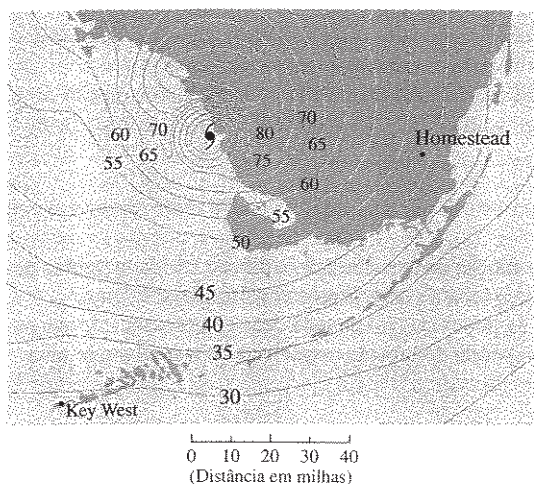
$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2v \frac{\partial z}{\partial v}$$

42. Se $yz^4 + x^2z^3 = e^{xyz}$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.
 43. Determine o gradiente da função $f(x, y, z) = z^2 e^{x\sqrt{y}}$.
 44. (a) Quando a derivada direcional de f é máxima?
 (b) Quando é mínima?
 (c) Quando é 0?
 (d) Quando é a metade de seu valor máximo?

45-46 □ Determine a derivada direcional de f no ponto dado na direção e sentido indicada.

45. $f(x, y) = 2\sqrt{x} - y^2$, $(1, 5)$, na direção do ponto $(4, 1)$
 46. $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1+z}$, $(1, 2, 3)$, na direção e sentido de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 47. Determine a taxa máxima de variação de $f(x, y) = x^2y + \sqrt{y}$ no ponto $(2, 1)$. Em que direção e sentido isso ocorre?
 48. Estabeleça a direção e sentido na qual $f(x, y, z) = ze^{xy}$ aumenta mais rápido no ponto $(0, 1, 2)$. Qual é a taxa máxima de aumento?

49. O mapa de contorno mostra a velocidade do vento em nós durante o furacão Andrew em 24 de agosto de 1992. Utilize-o para estimar o valor da derivada direcional da rapidez do vento em Homestead, Flórida, na direção do olho do furacão.



50. Determine as equações paramétricas da reta tangente ao ponto $(-2, 2, 4)$ para a curva da interseção da superfície $z = 2x^2 - y^2$ com o plano $z = 4$.

51–54 □ Determine os valores máximo e mínimo locais e ponto de sela da função. Se você tiver um programa de computador para desenhar em três dimensões, trace o gráfico da função usando um ponto de vista e domínio conveniente para mostrar os aspectos importantes da função.

51. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$
 52. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$
 53. $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$
 54. $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$

55–56 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D .

55. $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$; D é a região triangular fechada do plano xy com vértices $(0, 0)$, $(0, 6)$ e $(6, 0)$
 56. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$; D é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$

57. Utilize o gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximo e mínimo e ponto de sela de $f(x, y) = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$. Em seguida use o cálculo para determinar esses valores de modo preciso.

58. Use uma calculadora gráfica ou um computador (método de Newton ou programa de manipulação algébrica) para determinar os pontos críticos de $f(x, y) = 12 + 10y - 2x^2 - 8xy - y^4$ com precisão até a terceira casa decimal. Em seguida classifique os pontos críticos e determine o ponto mais alto do gráfico.

59–60 □ Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo de f sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

59. $f(x, y) = x^2y$; $x^2 + y^2 = 1$

60. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

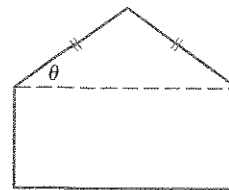
61. $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$;
 $x + y + z = 1$, $x - y + 2z = 2$

63. Determine os pontos da superfície $xy^2z^3 = 2$ que estão mais próximos da origem.

64. Um pacote com o formato de uma caixa retangular pode ser enviado pelo correio como encomenda postal se a soma de seu comprimento e cintura (perímetro da secção ortogonal ao comprimento) for de, no máximo, 108 pol. Determine as dimensões do pacote de maior volume que pode ser enviado como encomenda postal.

65. Um pentágono é formado colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo, como mostrado na figura. Se o pentágono tem perímetro P fixo, determine os comprimentos dos lados do pentágono que maximiza a área do mesmo.



66. Uma partícula de massa m se move sobre uma superfície $z = f(x, y)$. Sejam $x = x(t)$, $y = y(t)$ as coordenadas x e y da partícula no instante t .
 (a) Determine o vetor velocidade \mathbf{v} e a energia cinética $K = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$ da partícula.
 (b) Estabeleça o vetor aceleração \mathbf{a} .
 (c) Seja $z = x^2 + y^2$ e $x(t) = t \cos t$, $y(t) = t \sin t$. Determine o vetor velocidade, a energia cinética e o vetor aceleração.

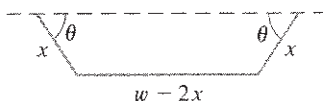
Problemas Quentes

- Um retângulo com comprimento L e largura W é cortado em quatro retângulos menores por duas retas paralelas aos lados. Determine os valores máximo e mínimo da soma dos quadrados das áreas dos retângulos menores.
- Biologistas marinhos determinaram que, quando um tubarão detecta a presença de sangue na água, ele nada na direção e sentido em que a concentração de sangue aumenta mais rapidamente. Com base em certos testes na água do mar, sabe-se que a concentração de sangue (em partes por milhão) em um ponto $P(x, y)$ na superfície é de aproximadamente

$$C(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)/10^4}$$

onde x e y são medidos em metros em coordenadas cartesianas com a fonte do sangue como origem.

- Identifique as curvas de nível da função de concentração e esboce vários membros dessa família junto com a trajetória que o tubarão deve percorrer para chegar à fonte.
 - Suponha que um tubarão esteja no ponto (x_0, y_0) quando detecta a presença de sangue na água. Determine a equação da trajetória do tubarão estabelecendo e resolvendo uma equação diferencial.
- Uma longa folha de metal galvanizado de espessura w polegadas deve ser dobrada em uma forma de maneira simétrica com três lados retos para fazer uma calha. A seção transversal é mostrada na figura.



- Determine as dimensões para permitir a máxima vazão, ou seja, estabeleça as dimensões que forneçam a maior área da seção transversal.
 - Você acharia melhor dobrar a folha de metal em uma calha com seção transversal semicircular do que em uma seção transversal de três lados?
- Para que valores do número r , a função

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{(x + y + z)^r}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

é contínua em \mathbb{R}^3 ?

- Suponha que f seja uma função diferenciável de uma variável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf(y/x)$ se interceptam em um ponto comum.
- (a) O método de Newton para aproximar a raiz de uma equação $f(x) = 0$ (veja a Seção 4.9 do Volume I) pode ser adaptado para aproximar a solução de um sistema de equações $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$. As superfícies $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$ se interceptam em uma curva que intercepta o plano xy em um ponto (r, s) , que é a solução do sistema. Se uma aproximação inicial (x_1, y_1) está próxima desse ponto, então os planos tangentes às superfícies em (x_1, y_1) se interceptam em uma linha reta que intercepta o plano xy em um ponto (x_2, y_2) , que deve estar mais próximo de (r, s) . (Compare com a Figura 2 na Seção 4.9 do Volume I.) Mostre que

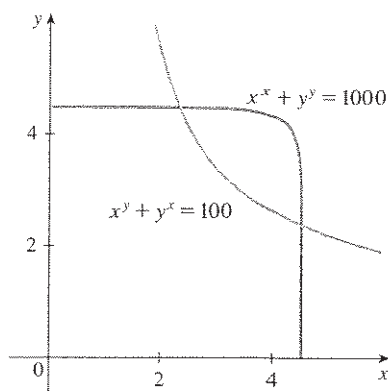
$$x_2 = x_1 - \frac{fg_y - f_yg}{f_xg_y - f_yg_x} \quad \text{e} \quad y_2 = y_1 - \frac{f_xg - fg_x}{f_xg_y - f_yg_x}$$

onde f, g e suas derivadas parciais são calculadas em (x_1, y_1) . Se continuarmos esse processo obteremos uma seqüência de aproximações sucessivas (x_n, y_n) .

- (b) Foi Thomas Simpson (1710-1761) quem formulou o método de Newton como o conhecemos hoje e quem o estendeu para as funções de duas variáveis como na parte (a) (veja a biografia de Simpson no Volume I). O exemplo que ele deu para ilustrar o método foi resolver o sistema de equações

$$x^x + y^y = 1000 \quad x^y + y^x = 100$$

Em outras palavras, ele descobriu os pontos de interseção das curvas da figura. Utilize o método da parte (a) para determinar as coordenadas dos pontos de interseção com precisão até a sexta casa decimal.



7. (a) Mostre que, quando a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

é escrita em coordenadas cilíndricas, ela fica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

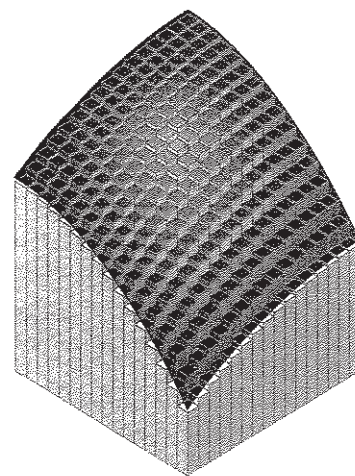
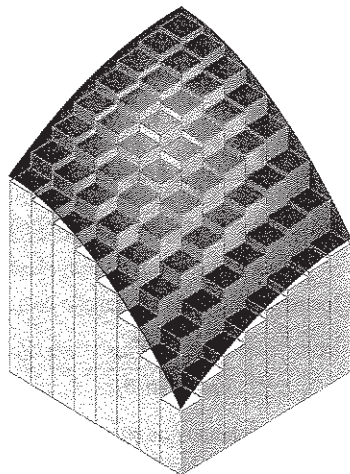
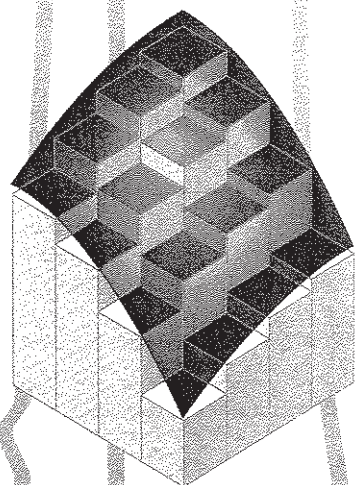
- (b) Mostre que, quando a equação de Laplace é escrita em coordenadas esféricas, ela fica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot \phi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

8. Entre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$, determine os que estão mais longe da origem.
9. Se a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ contém a circunferência $x^2 + y^2 = 2y$, quais são os valores de a e b que minimizam a área da elipse?

15

Integrais Múltiplas



Se aproximarmos um sólido por colunas retangulares e aumentarmos o número de colunas, o limite da soma dos volumes das colunas será o volume do sólido.

Neste capítulo estendemos a idéia de integrais definidas para integrais duplas e triplas de funções de duas ou três variáveis. Essas idéias serão usadas para calcular volumes, áreas de superfícies, massas, centro de gravidade de uma região mais geral do que as consideradas nos Capítulos 6 e 8 (Volume I). Usaremos também as integrais duplas para calcular probabilidades quando as variáveis envolvidas forem aleatórias.

15.1 Integrais Duplas sobre Retângulos

Na tentativa de resolver o problema de determinar áreas, chegamos à definição de integral definida. Vamos aplicar procedimento semelhante para calcular o volume de um sólido e, no processo, chegar à definição de integral dupla.

Revisão da Integral Definida

Antes de tudo, vamos relembrar os fatos básicos relativos à integral definida de funções de uma variável real. Se $f(x)$ é definida para $a \leq x \leq b$, subdividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento igual $\Delta x = (b - a)/n$ e escolhemos pontos arbitrários x_i^* em cada um desses subintervalos. Em seguida, formamos a soma de Riemann

$$\text{[1]} \quad \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

e tomamos o limite dessa soma quando $n \rightarrow \infty$ para obter a integral definida de a até b da função f .

$$\text{[2]} \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

No caso especial em que $f(x) \geq 0$, a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas dos retângulos aproximadores (da área) da Figura 1, e $\int_a^b f(x) dx$ representa a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b .

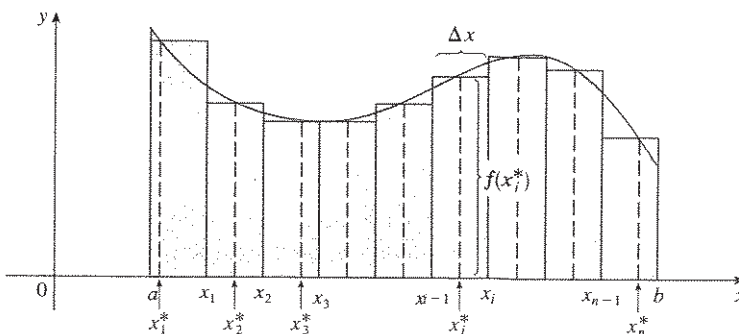


FIGURA 1

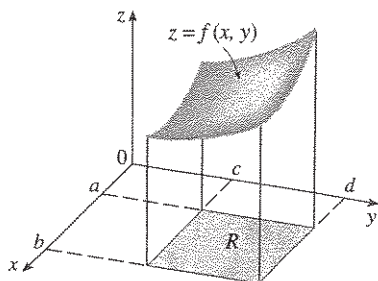


FIGURA 2

Volumes e Integrais Duplas

De modo semelhante, vamos considerar uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

e vamos inicialmente supor $f(x, y) \geq 0$. O gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x, y)$. Seja S o sólido que está contido na região acima de R e abaixo do gráfico de f , ou seja,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

(Veja a Figura 2.) Nosso objetivo é determinar o volume de S .

O primeiro passo consiste em dividir o retângulo R em sub-retângulos. Faremos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\Delta x = (b - a)/m$ e dividindo o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos iguais $[y_{j-1}, y_j]$ de comprimento $\Delta y = (d - c)/n$. Traçando retas paralelas aos eixos coordenados, passando pelos extremos dos subintervalos, como na Figura 3, formamos os sub-retângulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

cada um dos quais com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

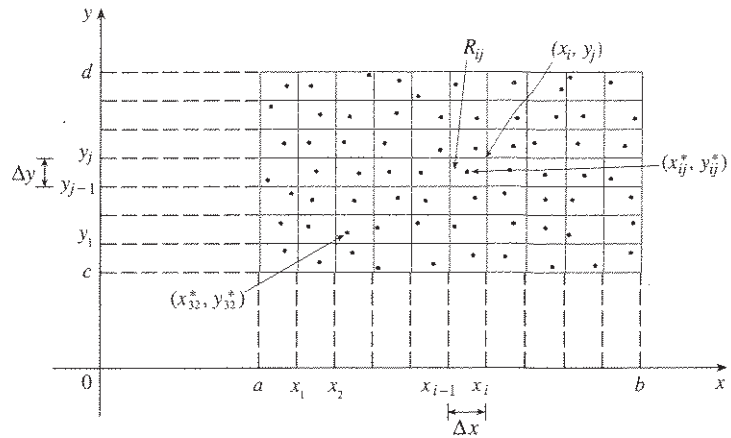


FIGURA 3
Dividindo R em sub-retângulos

Se escolhermos um ponto arbitrário, que chamaremos **ponto amostra**, (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em cada R_{ij} , poderemos aproximar a parte de S que está acima de cada R_{ij} por uma caixa retangular fina (ou “coluna”) com base R_{ij} e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como mostrado na Figura 4. (Compare com a Figura 1.) O volume dessa caixa é dado pela sua altura vezes a área do retângulo da base:

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Se seguirmos com esse procedimento para todos os retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S :

$$\boxed{3} \quad V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

(Veja a Figura 5.) Essa dupla soma significa que, para cada sub-retângulo, calculamos o valor de f no ponto amostra escolhido, multiplicamos esse valor pela área do sub-retângulo e então adicionamos os resultados.

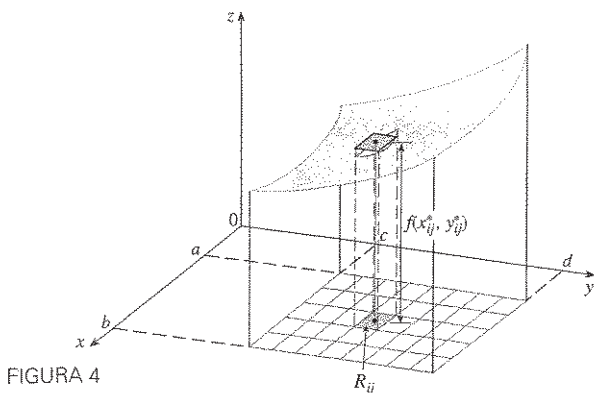


FIGURA 4

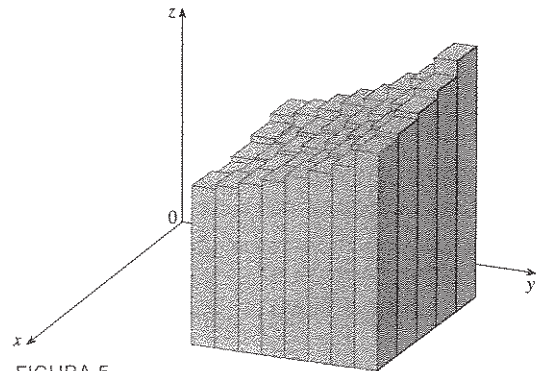


FIGURA 5

Nossa intuição diz que a aproximação dada em (3) melhora quando aumentamos os valores de m e n , e portanto devemos esperar que

$$\boxed{4} \quad V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Usamos a expressão da Equação 4 para definir o **volume** do sólido S que corresponde à região que está abaixo do gráfico de f e acima do retângulo R . (Pode ser mostrado que essa definição corresponde à nossa fórmula de volume da Seção 6.2 do Volume I.)

Limites do tipo que aparecem na Equação 4 ocorrem muito freqüentemente, não somente quando estamos determinando volumes, como também em uma variedade de outras situações – como será visto na Seção 15.5 –, mesmo f não sendo uma função positiva. Podemos dar a seguinte definição:

5 Definição A **integral dupla** de f sobre o retângulo R é

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

se esse limite existir.

O significado preciso do limite da Definição 5 é que para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que

$$\left| \iint_R f(x, y) \, dA - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \right| < \varepsilon$$

para todos inteiros m e n maiores que N e para qualquer escolha de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} .

Pode ser provado que o limite da Definição 5 existe sempre que f for uma função contínua. (Esse limite pode também existir para algumas funções descontínuas que sejam razoavelmente “bem comportadas”.)

O ponto amostra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) pode ser tomado como qualquer ponto no sub-retângulo R_{ij} , porém, se o escolhermos como o canto superior direito de R_{ij} [ou seja, (x_i, y_j) , veja a Figura 3], então a expressão da soma dupla ficará mais simples:

6

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A$$

Comparando as Definições 4 e 5, vemos que o volume pode ser escrito como uma integral dupla:

Se $f(x, y) \geq 0$, então o volume V do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ é

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

A soma na Definição 5

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

é chamada **soma dupla de Riemann** e é usada como uma aproximação do valor da integral dupla. [Note a semelhança dessa soma com a soma de Riemann em (1) para funções de uma única variável.] Se f for uma função *positiva*, então a soma dupla de Riemann

□ O significado do limite duplo na Equação 4 é que podemos tornar o somatório duplo tão próximo quanto desejarmos do número V [para qualquer escolha (x_{ij}^*, y_{ij}^*)] tomando m e n suficientemente grandes.

□ Observe a semelhança entre a Definição 5 e a definição de integral simples na Equação 2.

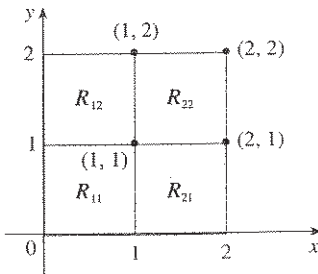


FIGURA 6

representa a soma dos volumes das colunas, como na Figura 5, e é uma aproximação do volume abaixo do gráfico de f .

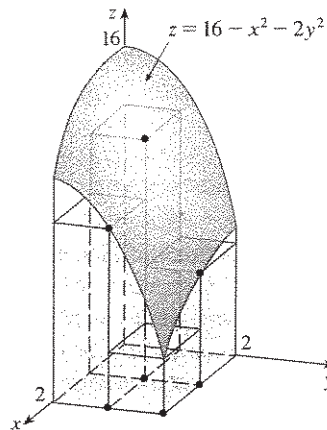
EXEMPLO 1 □ Estime o volume do sólido que está acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ e abaixo do parabolóide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R em quatro quadrados iguais e escolha o ponto amostra como o canto superior direito de cada quadrado R_{ij} . Faça um esboço do sólido e das caixas retangulares aproximadoras.

SOLUÇÃO Os quadrados estão ilustrados na Figura 6. O parabolóide elíptico é o gráfico de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ e a área de cada quadrado vale 1. Aproximando o volume pela soma de Riemann com $m = n = 2$, temos

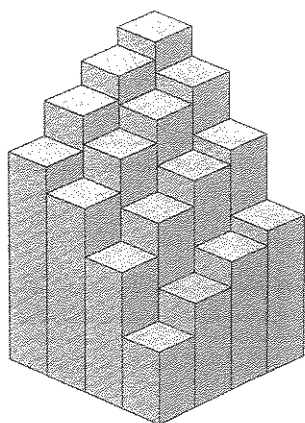
$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) \Delta A \\ &= f(1, 1) \Delta A + f(1, 2) \Delta A + f(2, 1) \Delta A + f(2, 2) \Delta A \\ &= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34 \end{aligned}$$

Esse é o volume das caixas aproximadoras mostradas na Figura 7.

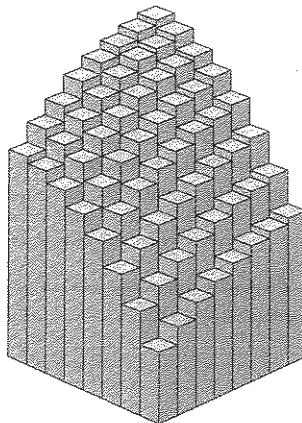
FIGURA 7



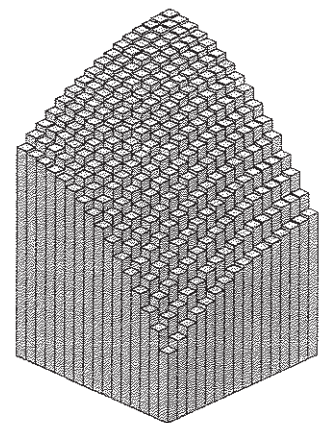
Obtemos melhor aproximação do volume no Exemplo 1, quando aumentamos o número de quadrados. A Figura 8 mostra como as colunas começam a parecer mais com o sólido



(a) $m = n = 4, V \approx 41,5$



(b) $m = n = 8, V \approx 44,875$



(c) $m = n = 16, V \approx 46,46875$

FIGURA 8 A aproximação pela soma de Riemann para o volume abaixo de $z = 16 - x^2 - 2y^2$ fica melhor à medida que m e n aumentam.

verdadeiro e as aproximações correspondentes vão se tornando mais precisas quando usamos 16, 64 e 256 quadrados. Na próxima seção mostraremos que o volume exato é 48.

EXEMPLO 2 □ Se $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, calcule a integral

$$\iint_R \sqrt{1-x^2} dA$$

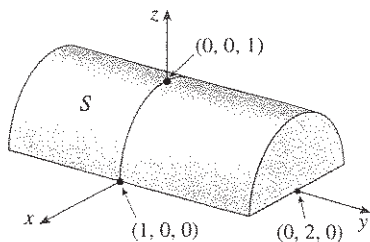


FIGURA 9

SOLUÇÃO Seria muito difícil calcular a integral diretamente da Definição 5, mas, como $\sqrt{1-x^2} \geq 0$, podemos computar a integral interpretando-a como volume. Se $z = \sqrt{1-x^2}$, então $x^2 + z^2 = 1$ e $z \geq 0$, logo a integral dupla dada representa o volume do sólido S que está abaixo do cilindro circular $x^2 + z^2 = 1$ e acima do retângulo R (veja a Figura 9). O volume de S é a área de um semicírculo com raio 1 vez o comprimento do cilindro. Portanto

$$\iint_R \sqrt{1-x^2} dA = \frac{1}{2} \pi (1)^2 \times 4 = 2\pi$$

Regra do Ponto Médio

Os métodos usados para aproximar as integrais de funções de uma variável real (a Regra do Ponto Médio, a Regra dos Trapézios, a Regra de Simpson) têm seus correspondentes para integrais duplas. Consideraremos aqui somente a Regra do Ponto Médio para integrais duplas. Isso significa que usaremos a soma dupla de Riemann para aproximar a integral dupla, onde o ponto amostra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} é tomado como o ponto central (\bar{x}_i, \bar{y}_j) de R_{ij} . Em outras palavras, \bar{x}_i é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ e \bar{y}_j é o ponto médio de $[y_{j-1}, y_j]$.

Regra do Ponto Médio para Integrais Duplas

$$\iint_R f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A$$

onde \bar{x}_i é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ e \bar{y}_j é o ponto médio de $[y_{j-1}, y_j]$.

EXEMPLO 3 □ Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor da integral $\iint_R (x - 3y^2) dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

SOLUÇÃO Usando a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$, calcularemos $f(x, y) = x - 3y^2$ no centro de quatro sub-retângulos mostrados na Figura 10. Então temos $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}$, $\bar{y}_1 = \frac{5}{4}$ e $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$. A área de cada sub-retângulo é $\Delta A = \frac{1}{2}$. Logo

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) dA &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A \\ &= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2) \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1) \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \Delta A \\ &= f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right) \Delta A \\ &= \left(-\frac{67}{16}\right) \frac{1}{2} + \left(-\frac{139}{16}\right) \frac{1}{2} + \left(-\frac{51}{16}\right) \frac{1}{2} + \left(-\frac{123}{16}\right) \frac{1}{2} \\ &= -\frac{95}{8} = -11,875 \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\iint_R (x - 3y^2) dA \approx -11,875$$

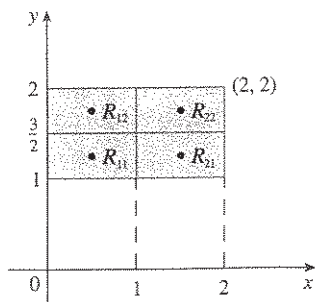


FIGURA 10

Número de sub-retângulos	Aproximações pela Regra do Ponto Médio
1	-11,5000
4	-11,8750
16	-11,9687
64	-11,9922
256	-11,9980
1024	-11,9995

NOTA □ Na próxima seção desenvolveremos um processo eficiente para calcular integrais duplas e veremos que o valor exato da integral dupla do Exemplo 3 é -12 . (Lembre-se de que a interpretação da integral dupla como volume só é válida quando a função f é uma função *positiva*. O integrando no Exemplo 3 não é uma função positiva, dessa forma, a integral dupla não é um volume. Nos Exemplos 2 e 3 na Seção 15.2, discutiremos como interpretar integrais de uma função que não é sempre positiva em termos de volumes.) Dividimos os sub-retângulos da Figura 10 em quatro menores, todos com o mesmo formato, e calculamos a aproximação pela Regra do Ponto Médio. Repetimos sucessivamente o procedimento, dividindo em quatro cada sub-retângulo e calculando a aproximação. Os resultados estão apresentados na tabela ao lado. Observe como esses valores estão se aproximando do valor real da integral, -12 .

Valor Médio

Na Seção 6.5 do Volume I, mostramos que o valor médio de uma função f de uma variável definida em um intervalo $[a, b]$ é

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

De modo semelhante, definimos o **valor médio** de uma função f de duas variáveis em um retângulo R contido em seu domínio como

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA$$

onde $A(R)$ é a área de R .

Se $f(x, y) \geq 0$, a equação

$$A(R) \times f_{\text{méd}} = \iint_R f(x, y) dA$$

diz que a caixa com base R e altura $f_{\text{méd}}$ tem o mesmo volume que o sólido delimitado pelo gráfico de f . [Se $z = f(x, y)$ descreve uma região montanhosa e você corta os topos dos morros na altura $f_{\text{méd}}$, então pode usá-los para encher os vales de forma a tornar plana a região. Veja a Figura 11.]

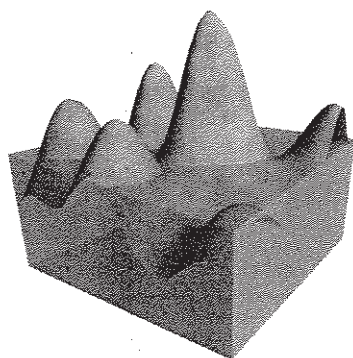


FIGURA 11

EXEMPLO 4 □ O mapa de contornos na Figura 12 mostra as quantidades da precipitação de neve, em polegadas, no Estado do Colorado, em 24 de dezembro de 1982. (O Estado tem formato retangular com medidas 388 milhas na direção leste-oeste e 276 milhas na direção norte-sul.) Utilize o mapa de contornos para estimar a precipitação média no Colorado em 24 de dezembro.

SOLUÇÃO Vamos colocar a origem no canto sudoeste do Estado. Então $0 \leq x \leq 388$, $0 \leq y \leq 276$, e $f(x, y)$ é a queda de neve, em polegadas, na localização x milhas para leste e y milhas para norte da origem. Se R é o retângulo representativo do Estado do Colorado, então a precipitação média do Colorado em 24 de dezembro foi

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA$$

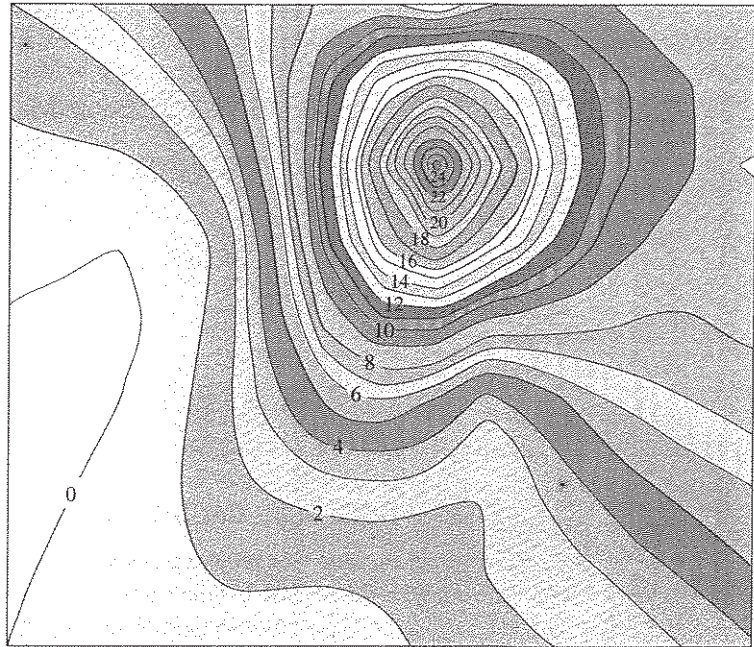


FIGURA 12

onde $A(R) = 388 \cdot 276$. Para estimar o valor dessa integral dupla, vamos usar a Regra do Ponto Médio com $m = n = 4$. Em outras palavras, dividimos R em 16 sub-retângulos de tamanhos iguais, como na Figura 13. A área de cada sub-retângulo é

$$\Delta A = \frac{1}{16}(388)(276) = 6693 \text{ mi}^2$$

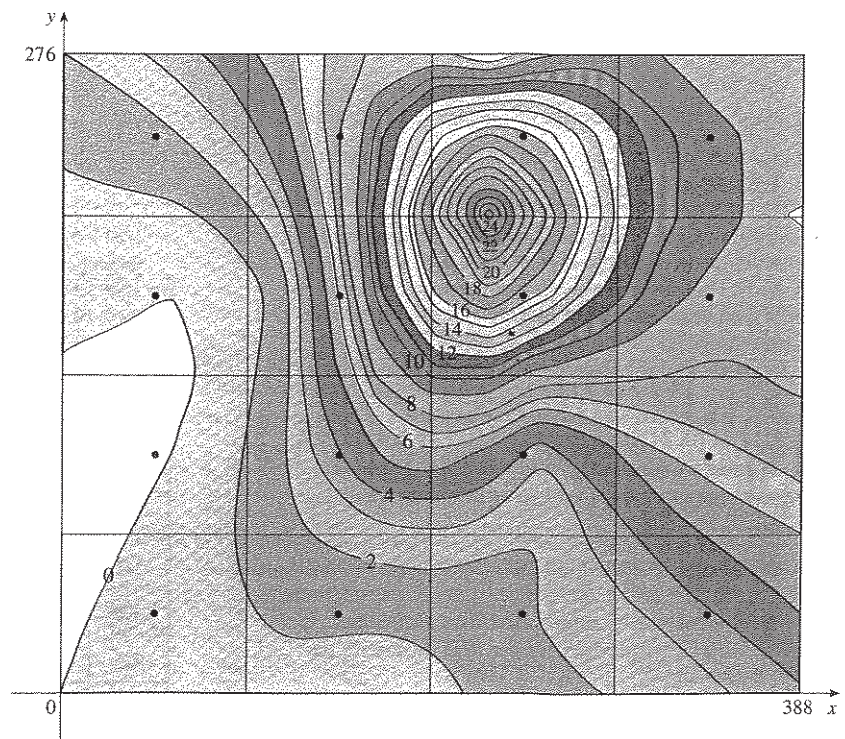


FIGURA 13

Usando o mapa de contornos para estimar o valor de f no ponto central de cada sub-retângulo, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dA &\approx \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A \\ &\approx \Delta A [0,4 + 1,2 + 1,8 + 3,9 + 0 + 3,9 + 4,0 + 6,5 \\ &\quad + 0,1 + 6,1 + 16,5 + 8,8 + 1,8 + 8,0 + 16,2 + 9,4] \\ &= (6693)(88,6) \end{aligned}$$

Portanto
$$f_{\text{méd}} \approx \frac{(6693)(88,6)}{(388)(276)} \approx 5,5$$

Em 24 de dezembro de 1982, o Estado do Colorado recebeu uma média de $5\frac{1}{2}$ polegadas de neve. □

Propriedades das Integrais Duplas

Listaremos aqui três propriedades das integrais duplas que podem ser provadas como na Seção 5.2 do Volume I. Admitiremos que todas as integrais existam. As Propriedades 7 e 8 são referidas como *linearidade* da integral.

$$\boxed{7} \quad \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] \, dA = \iint_R f(x, y) \, dA + \iint_R g(x, y) \, dA$$

□ Integrais duplas se comportam assim porque as somas duplas que as definem se comportam dessa forma.

$$\boxed{8} \quad \iint_R cf(x, y) \, dA = c \iint_R f(x, y) \, dA \quad \text{onde } c \text{ é uma constante.}$$

Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em R , então

$$\boxed{9} \quad \iint_R f(x, y) \, dA \geq \iint_R g(x, y) \, dA$$

15.1 Exercícios

- (a) Estime o volume do sólido contido abaixo da superfície $z = xy$ e acima do retângulo $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$. Utilize a soma de Riemann com $m = 3, n = 2$ e tome o ponto amostra como o canto superior direito de cada sub-retângulo.
(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do sólido da parte (a).
- Se $R = [-1, 3] \times [0, 2]$, use a soma de Riemann com $m = 4, n = 2$ para estimar o valor de $\iint_R (y^2 - 2x^2) \, dA$. Tome os pontos amostra como os cantos inferiores esquerdos dos sub-retângulos.
- (a) Use uma soma de Riemann com $m = n = 2$ para estimar o valor de $\iint_R \sin(x + y) \, dA$, onde $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Tome como pontos amostrais os cantos inferiores esquerdos.
(b) Use a Regra do Ponto Médio para dar uma estimativa da integral do item (a).
- (a) Estime o volume do sólido que está abaixo da superfície $z = x + 2y^2$ e acima do retângulo $R = [0, 2] \times [0, 4]$.

- Use a soma de Riemann com $m = n = 2$, e escolha os pontos amostrais como os cantos inferiores direitos.
(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do item (a).

5. É dada a tabela de valores de uma função $f(x, y)$ definida em $R = [1, 3] \times [0, 4]$.

$x \setminus y$	0	1	2	3	4
1,0	2	0	-3	-6	-5
1,5	3	1	-4	-8	-6
2,0	4	3	0	-5	-8
2,5	5	5	3	-1	-4
3,0	7	8	6	3	0

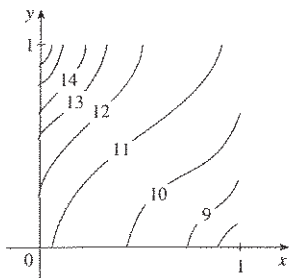
- (a) Estime $\iint_R f(x, y) dA$ utilizando a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$.
- (b) Estime a integral dupla com $m = n = 4$ escolhendo os pontos amostra o mais longe da origem.

6. Uma piscina de 20 por 30 pés é enchida com água. A profundidade da piscina é medida a cada intervalo de 5 pés, começando de um canto, e os valores foram anotados na tabela. Estime o volume de água da piscina.

	0	5	10	15	20	25	30
0	2	3	4	6	7	8	8
5	2	3	4	7	8	10	8
10	2	4	6	8	10	12	10
15	2	3	4	5	6	8	7
20	2	2	2	2	3	4	4

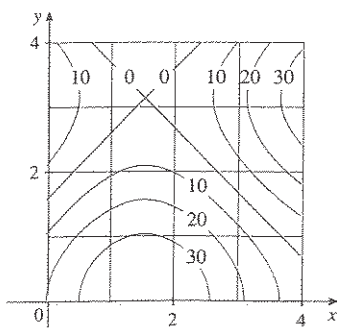
7. Seja V o volume de um sólido contido entre o gráfico de $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ e acima do retângulo dado por $2 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 6$. Usamos as retas $x = 3$ e $y = 4$ para dividir R em sub-retângulos. Sejam L e U as somas de Riemann computadas, utilizando como ponto amostra o canto inferior esquerdo e o canto superior direito, respectivamente. Sem calcular os números V, L e U , arranje-os na seqüência crescente de valores e explique suas razões.

8. A figura mostra curvas de nível da função f no quadrado $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Use-as para estimar $\iint_R f(x, y) dA$ com precisão nas unidades.

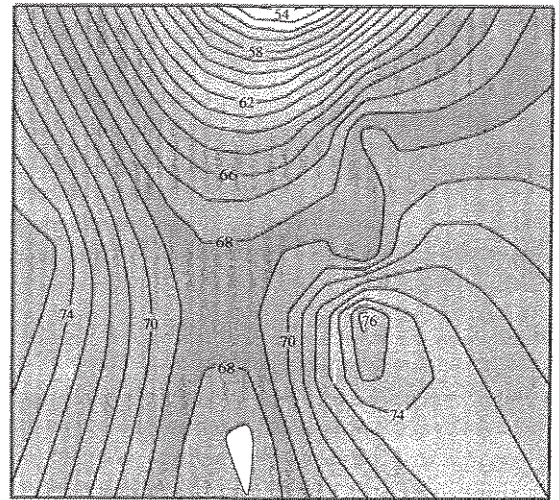


9. A figura mostra o mapa de contornos de f no quadrado $R = [0, 4] \times [0, 4]$.

- (a) Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor de $\iint_R f(x, y) dA$.
- (b) Estime o valor médio de f .



10. O mapa de contornos mostra a temperatura, em graus Fahrenheit, às 3 horas da tarde do dia 1º de maio de 1996, no Estado do Colorado. (O Estado mede 388 mi de leste a oeste e 276 mi de norte a sul.) Utilize a Regra do Ponto Médio com $m = n = 4$ para estimar a temperatura média do Colorado nessa hora.



11-13 □ Calcule a integral dupla, identificando-a antes como o volume de um sólido.

11. $\iint_R 3 dA, R = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 6\}$

12. $\iint_R (5 - x) dA, R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3\}$

13. $\iint_R (4 - 2y) dA, R = [0, 1] \times [0, 1]$

14. A integral $\iint_R \sqrt{9 - y^2} dA$, onde $R = [0, 4] \times [0, 2]$, representa o volume de um sólido. Esboce o desenho do sólido.

15. Utilize uma calculadora programável ou computador (ou o comando-soma de um CAS) para estimar

$$\iint_R e^{-x^2-y^2} dA$$

onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Utilize a Regra do Ponto Médio com os seguintes números de quadrados de tamanhos iguais: 1, 4, 16, 64, 256 e 1.024.

16. Repita o Exercício 15 para a integral $\iint_R \cos(x^4 + y^4) dA$.

17. Se f é uma função constante, $f(x, y) = k$ e

$$R = [a, b] \times [c, d], \text{ mostre que } \iint_R k dA = k(b - a)(d - c).$$

18. Se $R = [0, 1] \times [0, 1]$, mostre que $0 \leq \iint_R \text{sen}(x + y) dA \leq 1$.

15.2 Integrais Iteradas

Lembremos que geralmente é difícil calcular as integrais de funções de uma variável real diretamente da definição de integral, mas que o Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método mais fácil para calculá-las. O cálculo de integrais duplas pela definição é ainda mais complicado, porém, nesta seção, veremos como expressar uma integral dupla como uma integral iterada, cujo valor pode ser obtido calculando-se duas integrais de funções de uma variável real.

Suponha que f seja uma função de duas variáveis contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y) dy$ significando que x é mantido fixo e $f(x, y)$ é integrado em relação a y de $y = c$ para $y = d$. Esse procedimento é chamado *integração parcial em relação a y* . (Note a semelhança com a derivada parcial.) Como $\int_c^d f(x, y) dy$ é um número que depende do valor de x , ele define uma função de x :

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Se integramos a função A com relação à variável x de $x = a$ a $x = b$, obteremos

$$\boxed{1} \quad \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

A integral do lado direito da Equação 1 é chamada **integral iterada**. Em geral, os colchetes são suprimidos. Então

$$\boxed{2} \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

significando que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b .

Da mesma forma

$$\boxed{3} \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

significa que primeiro integramos com relação a x (fixando y) de $x = a$ a $x = b$ e em seguida integramos a função de y resultante com relação a y de $y = c$ a $y = d$. Note que em ambas as Equações 2 e 3 trabalhamos de dentro para fora.

EXEMPLO 1 □ Calcule o valor das integrais

$$(a) \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx$$

$$(b) \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$$

SOLUÇÃO

(a) Olhando x como constante, obtemos

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 y dy &= \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} \\ &= x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \frac{3}{2} x^2 \end{aligned}$$

Portanto a função A da discussão precedente é dada por $A(x) = \frac{3}{2} x^2$ neste exemplo.

Integramos agora essa função de x de 0 até 3:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx \\ &= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 \, dx = \frac{x^3}{2} \Big|_0^3 = \frac{27}{2}\end{aligned}$$

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy \\ &= \int_1^2 9y \, dy = 9 \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{27}{2}\end{aligned}$$

Note que no Exemplo 1 obtemos a mesma resposta se integramos primeiro em relação a y ou a x . Em geral acontece (ver o Teorema 4) de as duas integrais iteradas das Equações 2 e 3 serem sempre iguais, ou seja, a ordem da integração não é importante. (Isso é semelhante ao Teorema de Clairaut sobre as igualdades das derivadas parciais mistas.)

O seguinte teorema fornece um método prático para calcular uma integral dupla, expressando-a como uma integral iterada (em qualquer ordem).

□ O Teorema 4 tem o nome do matemático italiano Guido Fubini (1879-1943), que provou uma versão geral desse teorema em 1907. Mas a versão para as funções contínuas era conhecida pelo menos um século antes pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy.

4 Teorema de Fubini Se f for contínua no retângulo $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, então

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

Genericamente, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R , f possa ser descontínua em um número finito de curvas lisas, e a integral iterada exista.

A prova do Teorema de Fubini foge ao escopo deste livro, mas podemos ao menos fornecer uma justificativa razoável de sua validade quando $f(x, y) \geq 0$. Lembremos que, se f é positiva, podemos interpretar a integral dupla $\iint_R f(x, y) \, dA$ como o volume V do sólido que está acima de R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$. Contudo, temos outra fórmula usada para calcular volume no Capítulo 6 do Volume, que é

$$V = \int_a^b A(x) \, dx$$

onde $A(x)$ é a área da secção transversal de S no plano que passa por x perpendicularmente ao eixo x . Da Figura 1 podemos ver que $A(x)$ é a área debaixo da curva C cuja equação é $z = f(x, y)$, onde x é mantida constante e $c \leq y \leq d$. Portanto

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

e temos

$$\iint_R f(x, y) \, dA = V = \int_a^b A(x) \, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

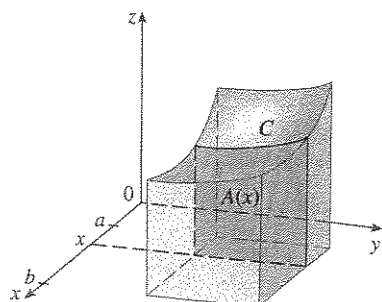


FIGURA 1

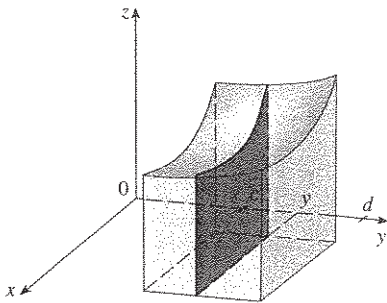


FIGURA 2

□ Note a resposta negativa no Exemplo 2; nada errado com isso. A função f no exemplo não é positiva, e a integral não representa um volume. Da Figura 3 vemos que, se f for sempre negativa em R , o valor da integral é o *negativo* do volume que está acima do gráfico de f e *abaixo* de R .

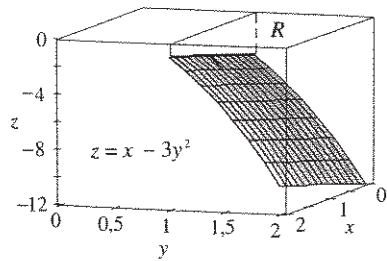


FIGURA 3

□ Para uma função f com valores positivos e negativos, $\iint_R f(x, y) dA$ é a diferença dos volumes: $V_1 - V_2$, onde V_1 é o volume acima de R e abaixo do gráfico de f e V_2 é o volume abaixo de R e acima do gráfico. O fato de a integral do Exemplo 3 ser 0 significa que os dois volumes V_1 e V_2 são iguais (veja a Figura 4).

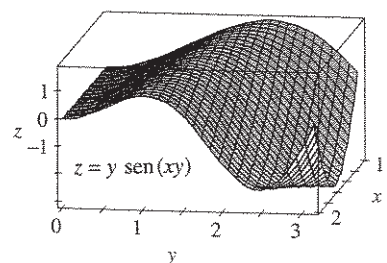


FIGURA 4

Uma argumentação semelhante, usando a secção transversal perpendicular ao eixo y como na Figura 2, mostra que

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

EXEMPLO 2 □ Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2) dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. (Compare com o Exemplo 3 da Seção 15.1.)

SOLUÇÃO 1 Pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) dA &= \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 [xy - y^3]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^2 (x - 7) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 7x \right]_0^2 = -12 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Novamente, aplicando o Teorema de Fubini, mas dessa vez integrando com relação a x primeiro, temos

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) dA &= \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2) dx dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_1^2 (2 - 6y^2) dy = [2y - 2y^3]_1^2 = -12 \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 □ Calcule $\iint_R y \operatorname{sen}(xy) dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

SOLUÇÃO 1 Se integrarmos primeiro em relação a x , obteremos

$$\begin{aligned} \iint_R y \operatorname{sen}(xy) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy) dx dy \\ &= \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y) dy \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} y \Big|_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Se invertermos a ordem de integração, obteremos

$$\iint_R y \operatorname{sen}(xy) dA = \int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy) dy dx$$

Para calcular a integral interna usamos a integração por partes com

$$\begin{aligned} u &= y & dv &= \operatorname{sen}(xy) dy \\ du &= dy & v &= -\frac{\cos(xy)}{x} \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy) \, dy &= -\frac{y \cos(xy)}{x} \Big|_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x} \int_0^\pi \cos(xy) \, dy \\ &= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{1}{x^2} [\operatorname{sen}(xy)]_{y=0}^{y=\pi} \\ &= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^2} \end{aligned}$$

Se agora integrarmos o primeiro termo por partes com $u = -1/x$ e $dv = \pi \cos \pi x \, dx$, obteremos $du = dx/x^2$, $v = \operatorname{sen} \pi x$, e

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} \right) dx = -\frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} - \int \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^2} dx$$

Portanto

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^2} \right) dx = -\frac{\operatorname{sen} \pi x}{x}$$

e assim

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy) \, dy \, dx &= \left[-\frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} \right]_1^2 \\ &= -\frac{\operatorname{sen} 2\pi}{2} + \operatorname{sen} \pi = 0 \end{aligned}$$

□ No Exemplo 2, as soluções 1 e 2 são igualmente diretas, mas no Exemplo 3 a primeira solução é muito mais simples que a segunda. Portanto, ao calcular uma integral dupla, é recomendável escolher a ordem de integração que forneça integrais mais simples.

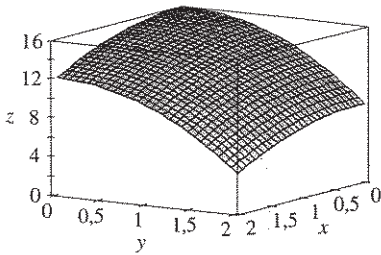


FIGURA 5

EXEMPLO 4 □ Determine o volume do sólido S que é delimitado pelo parabolóide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, os planos $x = 2$ e $y = 2$, e os três planos coordenados.

SOLUÇÃO Observemos primeiro que S é o sólido que está abaixo da superfície $z = 16 - x^2 - 2y^2$ e acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. (Veja a Figura 5.) Esse sólido foi considerado no Exemplo 1 da Seção 15.1, mas agora temos condições de calcular a integral dupla, usando o Teorema de Fubini. Portanto

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) \, dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy = \left[\frac{88}{3}y - \frac{4}{3}y^3 \right]_0^2 = 48 \end{aligned}$$

No caso especial em que $f(x, y)$ pode ser fatorado como o produto de uma função só de x por uma função só de y , a integral dupla de f pode ser escrita de forma particularmente simples. Para ser específico, suponha que $f(x, y) = g(x)h(y)$ e $R = [a, b] \times [c, d]$. Então o Teorema de Fubini nos dá

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y) \, dx \right] dy$$

Na integral interna, y é uma constante, então $h(y)$ é uma constante e podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y) \, dx \right] dy &= \int_c^d \left[h(y) \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \right] dy \\ &= \int_a^b g(x) \, dx \int_c^d h(y) \, dy \end{aligned}$$

já que $\int_a^b g(x) dx$ é uma constante. Portanto, neste caso, a integral dupla de f pode ser escrita como o produto de duas integrais de funções de uma variável real:

$$\iint_R g(x)h(y) dA = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy \quad \text{onde } R = [a, b] \times [c, d]$$

EXEMPLO 5 □ Se $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, então

$$\begin{aligned} \iint_R \text{sen } x \cos y dA &= \int_0^{\pi/2} \text{sen } x dx \int_0^{\pi/2} \cos y dy \\ &= [-\cos x]_0^{\pi/2} [\text{sen } y]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

□ A função $f(x, y) = \text{sen } x \cos y$ do Exemplo 5 é positiva em R ; assim, a integral representa o volume do sólido contido entre o gráfico de f e R como mostrado na Figura 6.

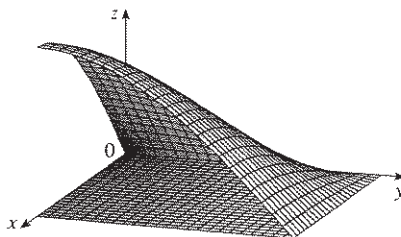


FIGURA 6

15.2 Exercícios

1-2 □ Determine $\int_0^3 f(x, y) dx$ e $\int_0^4 f(x, y) dy$.

1. $f(x, y) = 2x + 3x^2y$

2. $f(x, y) = \frac{y}{x+2}$

3-12 □ Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy) dx dy$

4. $\int_2^4 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy dx$

5. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \text{sen } y dy dx$

6. $\int_1^4 \int_0^2 (x + \sqrt{y}) dx dy$

7. $\int_0^2 \int_0^1 (2x + y)^8 dx dy$

8. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} dy dx$

9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dy dx$

10. $\int_1^2 \int_0^1 (x + y)^{-2} dx dy$

11. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 5} e^{2x-y} dx dy$

12. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dy dx$

13-20 □ Calcule a integral dupla.

13. $\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4) dA, R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$

14. $\iint_R \cos(x + 2y) dA, R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2\}$

15. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA, R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$

16. $\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2} dA, R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

17. $\iint_R x \text{sen}(x + y) dA, R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

18. $\iint_R \frac{x}{1 + xy} dA, R = [0, 1] \times [0, 1]$

19. $\iint_R xye^{x^2y} dA, R = [0, 1] \times [0, 2]$

20. $\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2} dA, R = [1, 2] \times [0, 1]$

21-22 □ Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

21. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y) dx dy$

22. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2) dy dx$

23. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano $3x + 2y + z = 12$ e acima do retângulo $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3\}$.

24. Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide hiperbólico $z = 4 + x^2 - y^2$ e acima do quadrado $R = [-1, 1] \times [0, 2]$.
25. Determine o volume do sólido contido abaixo do parabolóide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.
26. Determine o volume do sólido delimitado pela superfície $z = 1 + e^x \sin y$ e pelos planos $x = \pm 1, y = 0, y = \pi,$ e $z = 0$.
27. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e pelos planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ e $z = 0$.
28. Determine o volume do sólido limitado pelo parabolóide elíptico $z = 1 + (x - 1)^2 + 4y^2$, pelos planos $x = 3$ e $y = 2$ e pelos planos coordenados.
29. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$.
30. (a) Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = 6 - xy$ e pelos planos $x = 2, x = -2, y = 0, y = 3$ e $z = 0$.
 (b) Use o computador para desenhar o sólido.
31. Utilize um sistema computacional algébrico para determinar o valor exato da integral $\iint_R x^5 y^3 e^{xy} dA$, onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Em seguida use o CAS para desenhar o sólido cujo volume é dado pela integral.
32. Desenhe o sólido contido entre as superfícies $z = e^{-x^2} \cos(x^2 + y^2)$ e $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. Utilize um sistema computacional algébrico para aproximar o volume desse sólido até a quarta casa decimal.
- 33–34 □ Determine o valor médio de f sobre o retângulo dado.
33. $f(x, y) = x^2 y, R$ tem vértices $(-1, 0), (-1, 5), (1, 5), (1, 0)$
34. $f(x, y) = e^y \sqrt{x + e^y}, R = [0, 4] \times [0, 1]$
35. Utilize seu CAS para calcular as integrais iteradas
- $$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dy dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dx dy$$
- Suas respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique o que acontece.
36. (a) Em que aspectos os teoremas de Fubini e Clairaut são semelhantes?
 (b) Se $f(x, y)$ é contínua em $[a, b] \times [c, d]$ e
- $$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t) dt ds$$
- para $a < x < b, c < y < d$, mostre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Genéricas

Para as integrais de funções de uma variável real, a região sobre a qual integramos é sempre um intervalo. Porém, para integrais duplas, queremos integrar a função f não somente sobre retângulos, como também sobre uma região D de forma mais geral, como a ilustrada na Figura 1. Vamos supor que D seja uma região limitada, o que significa que D pode ser cercada por uma região retangular R como na Figura 2. Definimos então uma nova função F com domínio R por

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R, \text{ mas não em } D \end{cases}$$

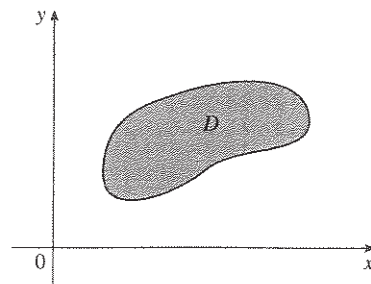


FIGURA 1

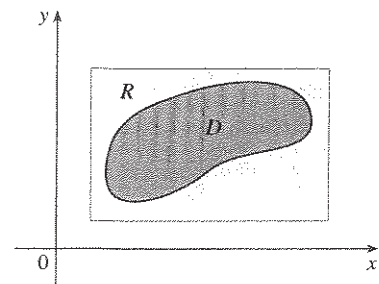


FIGURA 2

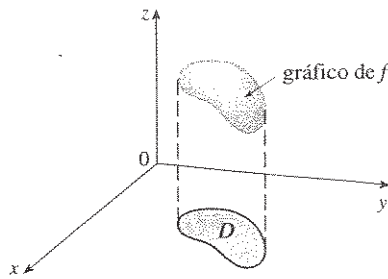


FIGURA 3

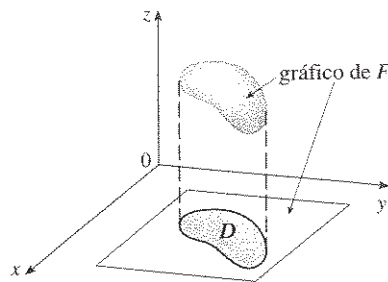


FIGURA 4

Se a integral dupla de F sobre R existe, então definimos a **integral dupla de f sobre D** por

$$\boxed{2} \quad \iint_D f(x, y) \, dA = \iint_R F(x, y) \, dA \quad \text{onde } F \text{ é dada pela Equação 1.}$$

A Definição 2 tem sentido porque R é um retângulo, e portanto $\iint_R F(x, y) \, dA$ foi definida de maneira precisa na Seção 15.1. O procedimento usado é razoável, pois os valores de $F(x, y)$ são 0 quando (x, y) está fora da região D e dessa forma não contribuem para o valor da integral. Isso significa que não importa qual o retângulo tomado R desde que contenha D .

No caso em que $f(x, y) \geq 0$ podemos ainda interpretar $\iint_D f(x, y) \, dA$ como o volume do sólido contido acima de D e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ (o gráfico de f). Você pode constatar que isso é razoável comparando os gráficos de f e F nas Figuras 3 e 4 e lembrando que $\iint_R F(x, y) \, dA$ é o volume abaixo do gráfico de F .

A Figura 4 mostra também que F provavelmente tem uma descontinuidade nos pontos de fronteira de D . Apesar disso, se f for contínua em D e se a curva fronteira de D for “bem comportada” (em um sentido que está fora do escopo deste livro), então pode ser mostrado que $\iint_R F(x, y) \, dA$ existe, e portanto $\iint_D f(x, y) \, dA$ existe. Em particular, esse é o caso para os tipos de regiões listados a seguir.

Uma região plana D é dita ser do **tipo I**, se está contida entre o gráfico de duas funções contínuas de x , ou seja,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são contínuas em $[a, b]$. Alguns exemplos de regiões do tipo I estão mostrados na Figura 5.

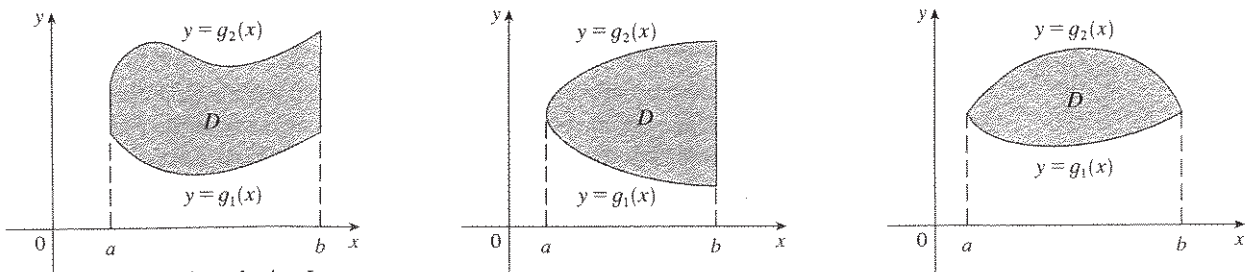


FIGURA 5 Algumas regiões do tipo I

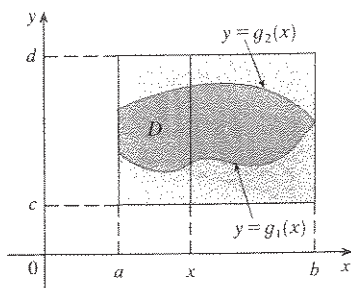


FIGURA 6

Para calcular $\iint_D f(x, y) \, dA$ quando D é do tipo I, escolhemos um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contenha D , como na Figura 6, e tomamos F a função definida como na Equação 1; ou seja, F coincide com f em D e F é 0 fora da região D . Então, pelo Teorema de Fubini,

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \iint_R F(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) \, dy \, dx$$

Observe que $F(x, y) = 0$ se $y < g_1(x)$ ou $y > g_2(x)$ porque (x, y) nessas condições está fora da região D . Assim,

$$\int_c^d F(x, y) \, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) \, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy$$

porque $F(x, y) = f(x, y)$ quando $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Portanto temos a seguinte fórmula que nos permite calcular a integral dupla como uma integral iterada.

[3] Se f é contínua em uma região D do tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

então

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

A integral do lado direito de (3) é uma integral iterada semelhante às consideradas na seção anterior, exceto que na integral de dentro enxergamos x como constante não só em $f(x, y)$, como também nos limites de integração $g_1(x)$ e $g_2(x)$.

Consideraremos também regiões planas do **tipo II**, que podem ser expressas como

[4] $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

onde h_1 e h_2 são contínuas. Dois exemplos de região do tipo II estão ilustrados na Figura 7. Utilizando o mesmo método que usamos para estabelecer (3), podemos mostrar que

[5] $\iint_D f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy$

onde D é uma região do tipo II dada pela Equação 4.

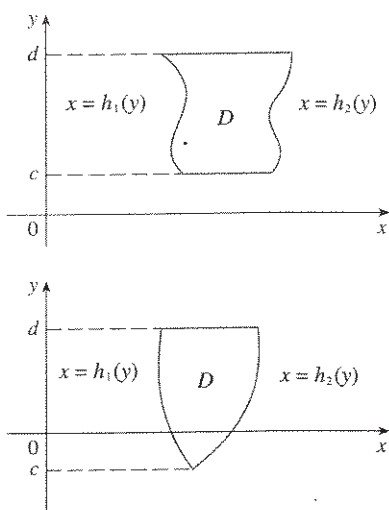


FIGURA 7
Algumas regiões do tipo II

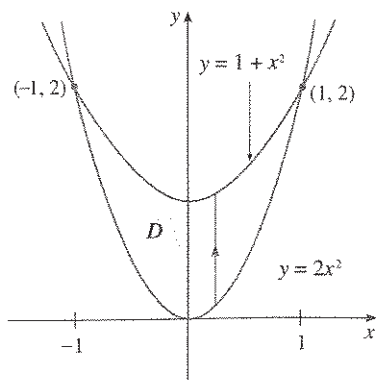


FIGURA 8

EXEMPLO 1 □ Calcule $\iint_D (x + 2y) \, dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

SOLUÇÃO As parábolas se interceptam quando $2x^2 = 1 + x^2$, ou seja, $x^2 = 1$, logo $x = \pm 1$. Notamos que a região D , ilustrada na Figura 8, é do tipo I e não do tipo II, e podemos escrever que

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$$

Como a fronteira de baixo é $y = 2x^2$ e a de cima é $y = 1 + x^2$, a Equação 3 leva a

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) \, dA &= \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} \, dx \\ &= \int_{-1}^1 [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2] \, dx \\ &= \int_{-1}^1 (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) \, dx \\ &= -3 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

□

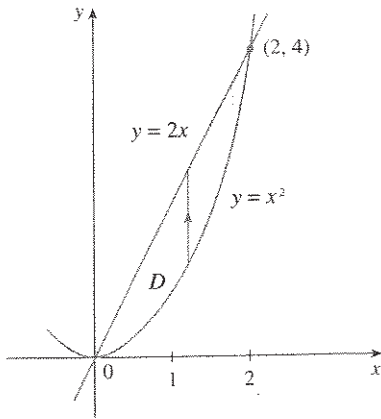


FIGURA 9
D como uma região do tipo I

NOTA □ Quando montamos a integral dupla como no Exemplo 1, é essencial desenhar um diagrama. Frequentemente é útil desenhar uma seta vertical como na Figura 8. Assim os limites de integração da integral de dentro podem ser lidos do diagrama ao segurar: a seta começa na fronteira de baixo \$y = g_1(x)\$, que fornece o extremo inferior da integral, e termina na fronteira de cima \$y = g_2(x)\$, que dá o extremo superior de integração. Para uma região do tipo II a seta é desenhada horizontalmente da fronteira esquerda para a fronteira direita.

EXEMPLO 2 □ Determine o volume do sólido que está contido abaixo do parabolóide \$z = x^2 + y^2\$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta \$y = 2x\$ e pela parábola \$y = x^2\$.

SOLUÇÃO 1 Da Figura 9 vemos que D é uma região do tipo I e

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

Portanto, o volume debaixo de \$z = x^2 + y^2\$ e acima de D é

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = \left[-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \right]_0^2 = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Da Figura 10 vemos que D pode ser escrito como uma região do tipo II

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

Logo, outra expressão para V é

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy \\ &= \frac{2}{15} y^{5/2} + \frac{2}{7} y^{7/2} - \frac{13}{96} y^4 \Big|_0^4 = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

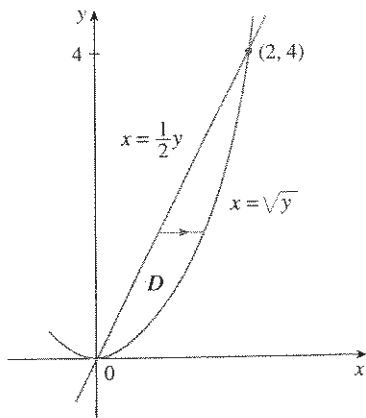


FIGURA 10
D como uma região do tipo II

□ A Figura 11 mostra o sólido cujo volume é calculado no Exemplo 2. Ele está acima do plano xy, abaixo do parabolóide \$z = x^2 + y^2\$, e entre o plano \$y = 2x\$ e o cilindro parabólico \$y = x^2\$.

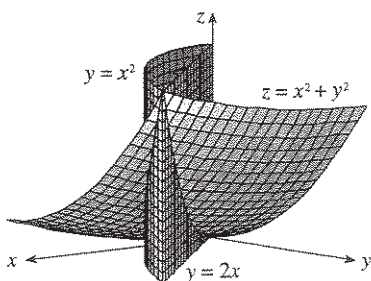


FIGURA 11

EXEMPLO 3 □ Calcule \$\iint_D xy dA\$, onde D é a região limitada pela reta \$y = x - 1\$ e pela parábola \$y^2 = 2x + 6\$.

SOLUÇÃO A região D está representada na Figura 12. Novamente D pode ser vista tanto como uma região do tipo I como uma região do tipo II, mas a descrição de D como região do tipo I é mais complicada, porque a fronteira inferior é constituída de duas partes. Portanto preferimos expressar D como uma região do tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1\}$$

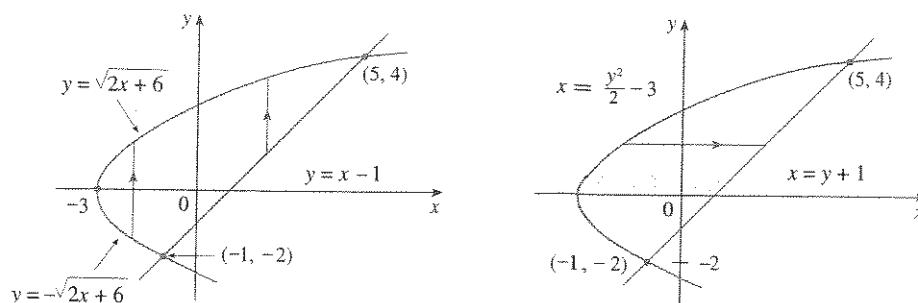


FIGURA 12 (a) D como região do tipo I (b) D como região do tipo II

Logo (5) fornece

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dA &= \int_{-2}^4 \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy \, dx \, dy = \int_{-2}^4 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y [(y+1)^2 - (\frac{1}{2}y^2 - 3)^2] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^4 = 36 \end{aligned}$$

Se tivéssemos expressado D como uma região do tipo I usando a Figura 12(a), obteríamos

$$\iint_D xy \, dA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx + \int_{-1}^5 \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx$$

mas isso daria muito mais trabalho que o outro método. □

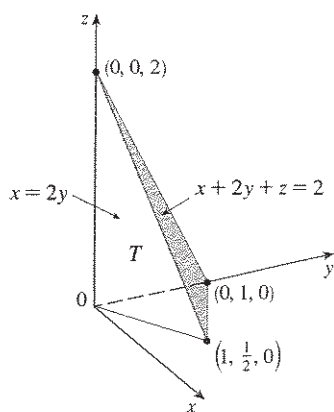


FIGURA 13

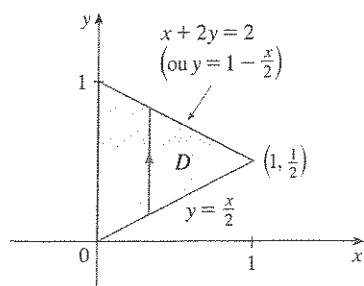


FIGURA 14

EXEMPLO 4 □ Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

SOLUÇÃO Em uma questão como essa, é prudente desenhar dois diagramas: um do sólido tridimensional e outro da região plana D sobre a qual o sólido se encontra. A Figura 13 mostra o tetraedro T limitado pelos planos coordenados $x = 0$, $z = 0$, o plano vertical $x = 2y$ e o plano $x + 2y + z = 2$. Como $x + 2y + z = 2$ intercepta o plano xy (cuja equação é $z = 0$) na reta $x + 2y = 2$, vemos que T está acima da região triangular D no plano xy limitado pelas retas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ e $x = 0$. (Veja a Figura 14.)

O plano $x + 2y + z = 2$ pode ser escrito como $z = 2 - x - 2y$, então o volume pedido está sob o gráfico da função $z = 2 - x - 2y$ e acima

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x/2 \leq y \leq 1 - x/2\}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (2 - x - 2y) \, dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 [2y - xy - y^2]_{y=x/2}^{y=1-x/2} \, dx \\
 &= \int_0^1 \left[2 - x - x \left(1 - \frac{x}{2} \right) - \left(1 - \frac{x}{2} \right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \right] \, dx \\
 &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 □ Calcule a integral iterada $\int_0^1 \int_x^1 \text{sen}(y^2) \, dy \, dx$.

SOLUÇÃO Se tentarmos calcular a integral como ela se apresenta, teremos inicialmente de resolver o problema de calcular $\int \text{sen}(y^2) \, dy$. Mas isso é impossível de fazer em termos finitos, uma vez que $\int \text{sen}(y^2) \, dy$ não é uma função elemental (veja o final da Seção 7.5 do Volume I). Precisamos então mudar a ordem de integração, o que pode ser conseguido escrevendo-se inicialmente a integral iterada dada como uma integral dupla. Usando (3) de trás para a frente, temos

$$\int_0^1 \int_x^1 \text{sen}(y^2) \, dy \, dx = \iint_D \text{sen}(y^2) \, dA$$

onde

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

Esboçamos essa região D na Figura 15. Então, da Figura 16 vemos que um modo alternativo de descrever D é

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

Isso nos permite usar (5) para exprimir a integral dupla como uma integral iterada na ordem reversa:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_x^1 \text{sen}(y^2) \, dy \, dx &= \iint_D \text{sen}(y^2) \, dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^y \text{sen}(y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 [x \text{sen}(y^2)]_{x=0}^{x=y} \, dy \\
 &= \int_0^1 y \text{sen}(y^2) \, dy = -\frac{1}{2} \cos(y^2) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}(1 - \cos 1)
 \end{aligned}$$

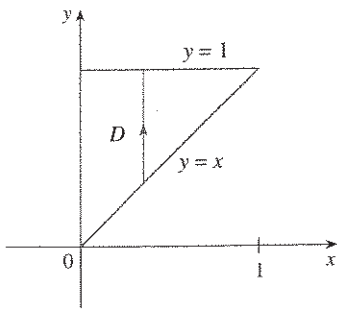


FIGURA 15
 D como uma região do tipo I

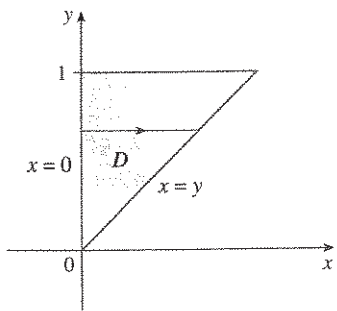


FIGURA 16
 D como uma região do tipo II

Propriedade da Integral Dupla

Suponha que todas as seguintes integrais existam. As primeiras três propriedades das integrais duplas sobre uma região D seguem imediatamente da Definição 2 e das Propriedades 7, 8 e 9 da Seção 15.1.

$$\boxed{6} \quad \iint_D [f(x, y) + g(x, y)] \, dA = \iint_D f(x, y) \, dA + \iint_D g(x, y) \, dA$$

$$\boxed{7} \quad \iint_D cf(x, y) \, dA = c \iint_D f(x, y) \, dA$$

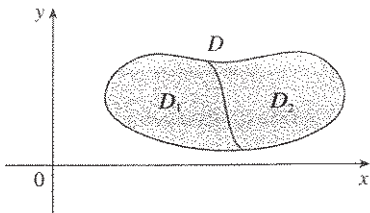


FIGURA 17

Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em D , então

$$\boxed{8} \quad \iint_D f(x, y) \, dA \geq \iint_D g(x, y) \, dA$$

A próxima propriedade de integral dupla é semelhante à propriedade de integral de uma função de uma variável real dada pela equação $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$.

Se $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 não se sobrepõem exceto talvez nas fronteiras (veja a Figura 17), então

$$\boxed{9} \quad \iint_D f(x, y) \, dA = \iint_{D_1} f(x, y) \, dA + \iint_{D_2} f(x, y) \, dA$$

A Propriedade 9 pode ser usada para calcular integrais duplas sobre regiões D que não sejam nem do tipo I nem do tipo II. A Figura 18 ilustra esse processo (veja os Exercícios 49 e 50).

A próxima propriedade de integrais diz que, se integrarmos uma função constante $f(x, y) = 1$ sobre uma região D , obteremos a área de D :

$$\boxed{10} \quad \iint_D 1 \, dA = A(D)$$

A Figura 19 ilustra por que a Equação 10 é verdadeira: um cilindro sólido, cuja base é D e altura 1, tem volume $A(D) \cdot 1 = A(D)$, mas sabemos que também podemos escrever seu volume como $\iint_D 1 \, dA$.

Finalmente, podemos combinar as Propriedades 7, 8 e 10 para provar a seguinte propriedade (veja o Exercício 53):

$\boxed{11}$ Se $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo (x, y) em D , então

$$mA(D) \leq \iint_D f(x, y) \, dA \leq MA(D)$$

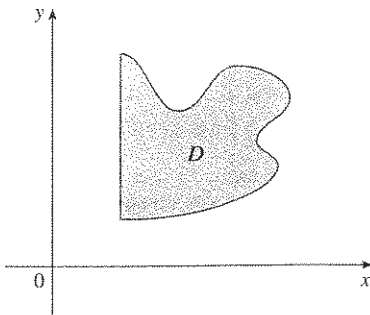
EXEMPLO 6 □ Utilize a Propriedade 11 para estimar a integral $\iint_D e^{\sin x \cos y} \, dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2.

SOLUÇÃO Como $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos y \leq 1$, temos $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$ e portanto

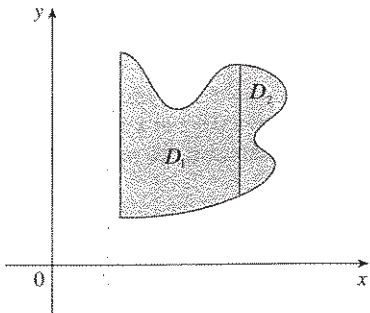
$$e^{-1} \leq e^{\sin x \cos y} \leq e^1 = e$$

Assim, usando $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$, e $A(D) = \pi(2)^2$ na Propriedade 11, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y} \, dA \leq 4\pi e$$



(a) D não é região nem do tipo I nem do tipo II.



(b) $D = D_1 \cup D_2$,
 D_1 é do tipo I, e D_2 é tipo do II.

FIGURA 18

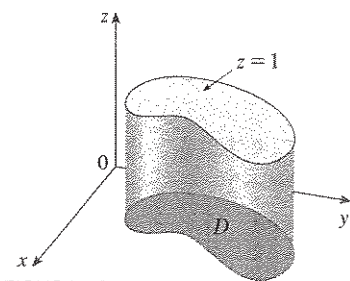


FIGURA 19

(a) Cilindro com base D e altura 1.

15.3 Exercícios

1-6 □ Calcule as integrais iteradas.

1. $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y) dy dx$
2. $\int_1^2 \int_y^2 xy dx dy$
3. $\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x} dx dy$
4. $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y) dy dx$
5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} e^{\sin \theta} dr d\theta$
6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1-v^2} du dv$

7-18 □ Calcule a integral dupla.

7. $\iint_D x^3 y^2 dA, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x\}$
8. $\iint_D \frac{4y}{x^3 + 2} dA, D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}$
9. $\iint_D \frac{2y}{x^2 + 1} dA, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
10. $\iint_D e^{x^2} dA, D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$
11. $\iint_D e^{x/y} dA, D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\}$
12. $\iint_D x\sqrt{y^2 - x^2} dA, D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$
13. $\iint_D x \cos y dA, D$ é limitada por $y = 0, y = x^2, x = 1$
14. $\iint_D (x + y) dA, D$ é limitada por $y = \sqrt{x}, y = x^2$
15. $\iint_D y^3 dA,$
 D é a região triangular com vértices $(0, 2), (1, 1)$ e $(3, 2)$
16. $\iint_D xy^2 dA, D$ é limitada por $x = 0$ e $x = \sqrt{1 - y^2}$
17. $\iint_D (2x - y) dA,$
 D é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2.
18. $\iint_D 2xy dA, D$
é a região triangular com vértices $(0, 0), (1, 2)$ e $(0, 3)$

19-28 □ Determine o volume do sólido dado.

19. Abaixo do plano $x + 2y - z = 0$ e acima da região limitada por $y = x$ e $y = x^4$
20. Abaixo da superfície $z = 2x + y^2$ e acima da região limitada por $x = y^2$ e $x = y^3$

21. Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices em $(1, 1), (4, 1)$ e $(1, 2)$

22. Delimitado pelo parabolóide $z = x^2 + 3y^2$ e pelos planos $x = 0, y = 1, y = x, z = 0$
23. Limitado pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0,$ e $x + y + z = 1$
24. Limitado pelo cilindro $z = x, y = x, x + y = 2,$ e $z = 0$
25. Delimitado pelos cilindros $z = x^2, y = x^2$ e pelos planos $z = 0, y = 4$
26. Limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y, x = 0, z = 0$ no primeiro octante
27. Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z, x = 0, z = 0$ no primeiro octante
28. Limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$

29. Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para estimar a coordenada x dos pontos de interseção da curva $y = x^4$ e $y = 3x - x^2$. Se D é a região limitada por essas curvas, estime $\iint_D x dA$.
30. Determine o volume aproximado do sólido no primeiro octante que é limitado pelos planos $y = x, z = 0$ e $z = x$ e pelo cilindro $y = \cos x$. (Utilize o dispositivo gráfico para estimar os pontos de interseção.)

31-32 □ Determine o volume do sólido por subtração de dois volumes.

31. O sólido delimitado pelos cilindros parabólicos $y = 1 - x^2, y = x^2 - 1$ e pelos planos $x + y + z = 2, 2x + 2y - z + 10 = 0$
32. O sólido delimitado pelo parabolóide cilíndrico $y = x^2$ e os planos $z = 3y, z = 2 + y$

33-36 □ Use um sistema de computação algébrica para determinar o volume exato do sólido.

33. Abaixo da superfície $z = x^3 y^4 + xy^2$ e acima da região limitada pelas curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ para $x \geq 0$
34. Entre os parabolóides $z = 2x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - 2y^2$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$
35. Delimitado por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z = 0$
36. Delimitado por $z = x^2 + y^2$ e $z = 2y$

37-42 □ Esboce a região de integração e faça a mudança da ordem de integração.

37. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$
38. $\int_0^1 \int_{4x}^4 f(x, y) dy dx$

39. $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx dy$ 40. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y}} f(x, y) dx dy$

41. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$ 42. $\int_0^1 \int_{\arctg x}^{\pi/4} f(x, y) dy dx$

43-48 □ Calcule a integral trocando a ordem de integração.

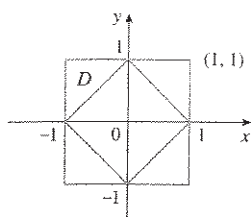
43. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$ 44. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx dy$

45. $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx dy$ 46. $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \text{sen}(y^3) dy dx$

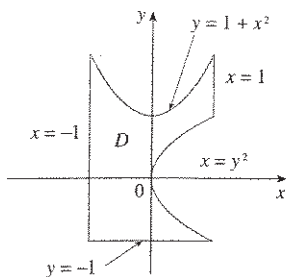
47. $\int_0^1 \int_{\arcsen y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$ 48. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy$

49-50 □ Expresse D como a união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule a integral.

49. $\iint_D x^2 dA$



50. $\iint_D xy dA$



51-52 □ Utilize a Propriedade 11 para estimar o valor da integral.

51. $\iint_D \sqrt{x^3 + y^3} dA, D = [0, 1] \times [0, 1]$

52. $\iint_D e^{x^2+y^2} dA, D$ é o disco com centro na origem e raio $\frac{1}{2}$

53. Prove a Propriedade 11.

54. No cálculo de uma integral dupla sobre uma região D , obtivemos uma soma de integrais iteradas como a que segue:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y) dx dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y) dx dy$$

Esboce a região D e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.

55. Calcule $\iint_D (x^2 \text{tg } x + y^3 + 4) dA$, onde $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$.

[Dica: explore o fato de que D é simétrica com relação a ambos os eixos.]

56. Utilize simetria para calcular $\iint_D (2 - 3x + 4y) dA$, onde D é a região limitada pelo quadrado com vértices $(\pm 5, 0)$ e $(0, \pm 5)$.

57. Calcule $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dA$, onde D é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$, identificando primeiro a integral como o volume de um sólido.

58. Desenhe o sólido limitado pelo plano $x + y + z = 1$ e pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e determine seu volume exato. (Utilize seu CAS para fazer esse desenho, para achar as equações das fronteiras da região de integração e para calcular a integral dupla.)

15.4

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Suponha que queiramos calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$, onde R é uma das regiões mostradas na Figura 1. Em qualquer dos casos, a descrição de R é complicada em coordenadas retangulares, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.

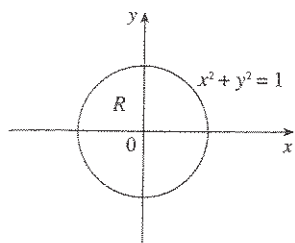
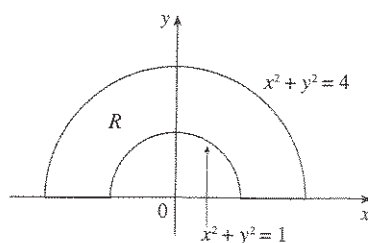


FIGURA 1 (a) $R = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$



(a) $R = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$

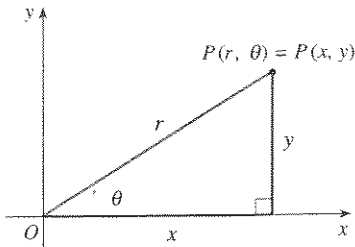


FIGURA 2

Lembre-se da Figura 2 em que as coordenadas polares (r, θ) de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x, y) pelas equações

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

(Veja a Seção 10.3.)

As regiões da Figura 1 são casos especiais do **retângulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

que é apresentado na Figura 3. Para calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$, onde R é o retângulo polar, dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de larguras iguais $\Delta r = (b - a)/m$ e dividimos o intervalo $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de larguras iguais $\Delta \theta = (\beta - \alpha)/n$. Então os círculos $r = r_i$ e os raios $\theta = \theta_j$ dividem o retângulo polar R nos retângulos polares menores mostrados na Figura 4.

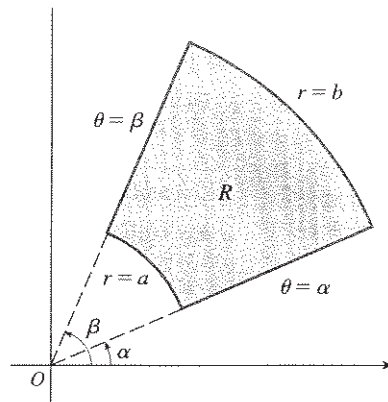


FIGURA 3 Retângulo polar

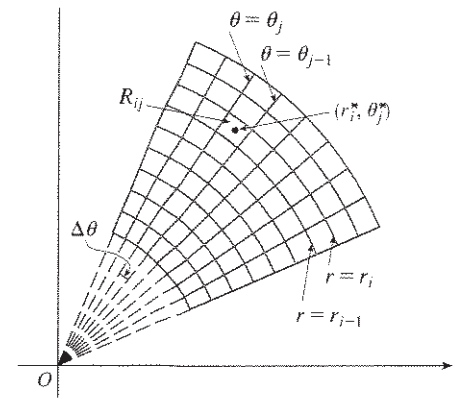


FIGURA 4 Dividindo R em sub-retângulos polares

O “centro” dos sub-retângulos polares

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$

tem coordenadas polares

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \quad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Calculamos a área de R_{ij} usando o fato de a área de um setor de círculo de raio r e ângulo central θ ser $\frac{1}{2}r^2\theta$. Subtraindo as áreas de dois desses setores, cada um deles com ângulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, descobrimos que a área de R_{ij} é

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \frac{1}{2}r_i^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2 \Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2) \Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) \Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta \end{aligned}$$

Apesar de termos definido a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$ em termos de retângulos convencionais, podemos mostrar que, para as funções contínuas f , obtemos a mesma resposta usando os retângulos polares. As coordenadas retangulares do centro R_{ij} são $(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*)$, portanto uma soma de Riemann típica é

$$\boxed{1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta$$

Se escrevermos $g(r, \theta) = rf(r \cos \theta, r \sen \theta)$, então a soma de Riemann na Equação 1 pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta \theta$$

que é a soma de Riemann para a integral dupla

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) dr d\theta$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sen \theta_j^*) \Delta A_i \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta \theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sen \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

[2] Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla Se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sen \theta) r dr d\theta$$

A fórmula em (2) diz que convertemos coordenadas retangulares para coordenadas polares em uma integral dupla, escrevendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sen \theta$, usando os limites de integração apropriados para r e θ , e substituindo dA por $r dr d\theta$. Cuidado para não esquecer o fator adicional r no lado direito da Fórmula 2. Um método clássico para se lembrar encontra-se na Figura 5, onde podemos pensar nos retângulos polares “infinitesimais” como retângulos convencionais com dimensões $r d\theta$ e dr e portanto com “área” $dA = r dr d\theta$.

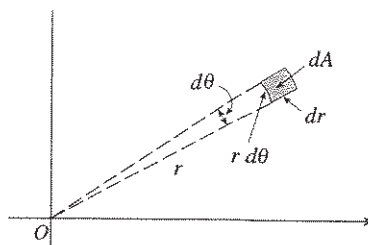


FIGURA 5

EXEMPLO 1 □ Calcule $\iint_R (3x + 4y^2) dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO A região R pode ser descrita como

$$R = \{(x, y) \mid y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

É a metade do anel mostrado na Figura 1(b), e em coordenadas polares é dado por $1 \leq r \leq 2$,

$0 \leq \theta \leq \pi$. Portanto, da Fórmula 2, segue

$$\begin{aligned} \iint_R (3x + 4y^2) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2 \cos \theta + 4r^3 \sin^2 \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^\pi [r^3 \cos \theta + r^4 \sin^2 \theta]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^\pi (7 \cos \theta + 15 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi [7 \cos \theta + \frac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)] d\theta \\ &= 7 \sin \theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4} \sin 2\theta \Big|_0^\pi = \frac{15\pi}{2} \end{aligned}$$

□ Aqui usamos a identidade trigonométrica $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$. Veja a Seção 7.2 (Volume I) para informações sobre a integração de funções trigonométricas.

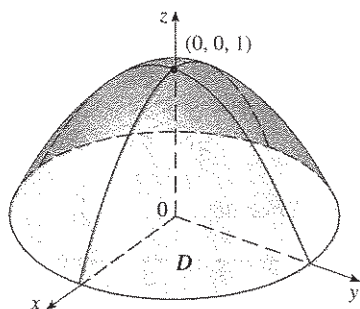


FIGURA 6

EXEMPLO 2 □ Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

SOLUÇÃO Se tomarmos $z = 0$ na equação do parabolóide, obteremos $x^2 + y^2 = 1$. Isso significa que o plano intercepta o parabolóide no círculo $x^2 + y^2 = 1$, e o sólido está abaixo do parabolóide e acima do disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ [veja as Figuras 6 e 1(a)]. Em coordenadas polares, D é dado por $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, o volume é

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (1 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3) dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Se trabalhássemos com coordenadas retangulares em vez de coordenadas polares, obteríamos

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dA = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx$$

que não é fácil de calcular porque envolve o cálculo das seguintes integrais:

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx \quad \int x^2 \sqrt{1 - x^2} dx \quad \int (1 - x^2)^{3/2} dx$$

O que fizemos até aqui pode ser estendido para tipos de região mais complicados, como mostrado na Figura 7. Isso é semelhante a uma região em coordenadas retangulares do tipo II consideradas na Seção 15.3. De fato, combinando a Fórmula 2 desta seção com a Fórmula 15.3.5, obtemos o seguinte:

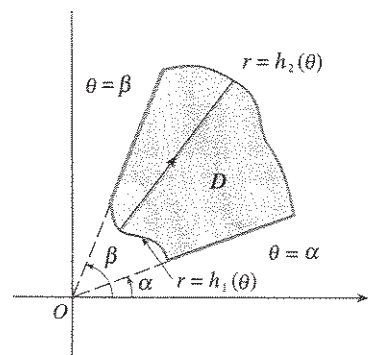


FIGURA 7

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

3 Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

então
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Em particular, tomando $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ e $h_2(\theta) = h(\theta)$ nessa fórmula, vemos que a área da região D limitada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ e $r = h(\theta)$ é

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D 1 \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{h(\theta)} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [h(\theta)]^2 d\theta \end{aligned}$$

que é o mesmo que obteríamos usando a Fórmula 10.4.3.

EXEMPLO 3 □ Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

SOLUÇÃO Do esboço da curva na Figura 8 vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq r \leq \cos 2\theta\}$$

Sua área é

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta) \, d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

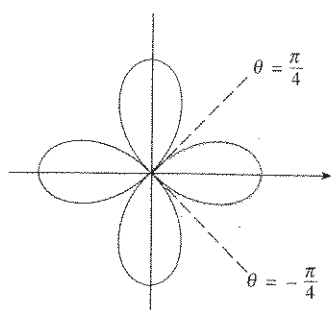


FIGURA 8

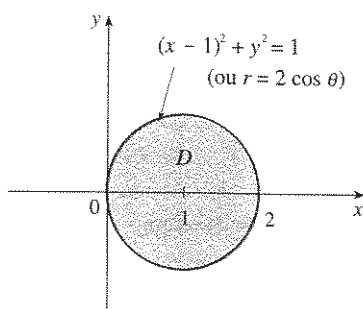


FIGURA 9

EXEMPLO 4 □ Determine o volume do sólido que está sob o parabolóide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy , e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUÇÃO O sólido está acima do disco D cuja fronteira tem equação $x^2 + y^2 = 2x$ ou, após completar os quadrados,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(veja as Figuras 9 e 10). Em coordenadas polares, temos $x^2 + y^2 = r^2$ e $x = r \cos \theta$, logo a fronteira circular fica $r^2 = 2r \cos \theta$, ou $r = 2 \cos \theta$. Portanto o disco D é dado por

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta\}$$

e, da Fórmula 3, vem

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) \, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} [1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)] d\theta \\ &= 2 \left[\frac{3}{2} \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} = 2 \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

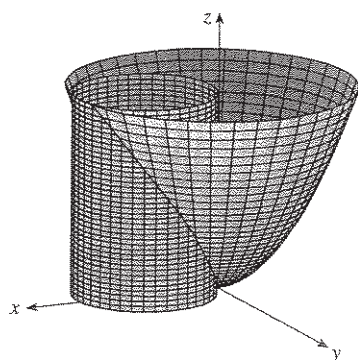
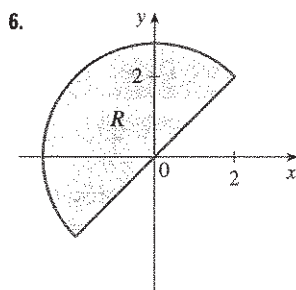
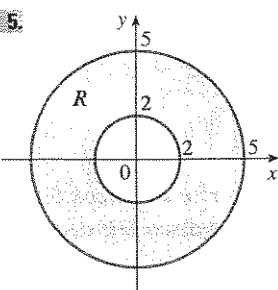
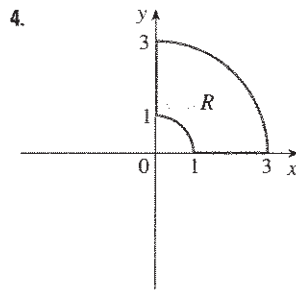
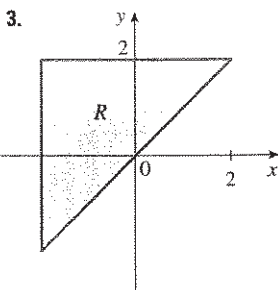
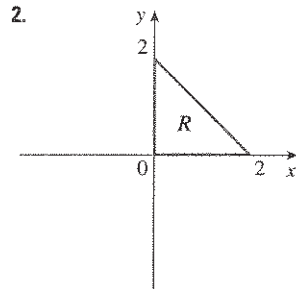
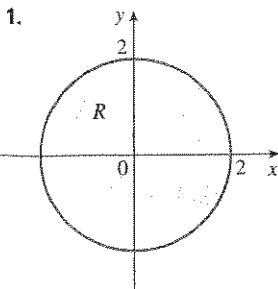


FIGURA 10

15.4 Exercícios

1–6 □ Uma região R é mostrada na figura. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares e escreva $\iint_R f(x, y) dA$ como uma integral iterada, onde f é uma arbitrária qualquer contínua em R .



7–8 □ Esboce a região cuja área é dada pela integral e calcule-a

7. $\int_{\pi}^{2\pi} \int_4^7 r dr d\theta$

8. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos \theta} r dr d\theta$

9–16 □ Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares.

9. $\iint_R xy dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 3

10. $\iint_R (x + y) dA$, onde R é a região que está à esquerda do eixo y e entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

11. $\iint_R \cos(x^2 + y^2) dA$, onde R é a região acima do eixo x e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 9$

12. $\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2} dA$, onde $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

13. $\iint_D e^{-x^2 - y^2} dA$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y

14. $\iint_R ye^x dA$, onde D é a região do primeiro quadrante contida pelo círculo $x^2 + y^2 = 16$

15. $\iint_R \arctan(y/x) dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

16. $\iint_D x dA$, onde D é a região do primeiro quadrante compreendida entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$

17–20 □ Utilize a integral dupla para determinar a área da região.

17. Um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$

18. A região delimitada pela curva $r = 4 + 3 \cos \theta$

19. A região interior a ambos os círculos $r = \cos \theta$ e $r = \sin \theta$

20. A região dentro do círculo $r = 4 \sin \theta$ e fora do círculo $r = 2$

21–27 □ Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

21. Abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leq 9$

22. Dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

23. Uma esfera de raio a

24. Limitada pelo parabolóide $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ e pelo plano $z = 4$

25. Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

26. Limitada pelos parabolóides $z = 3x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$

27. Dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

28. (a) Uma broca cilíndrica de raio r_1 é usada para fazer um furo no centro de uma esfera de raio r_2 . Determine o volume do sólido em formato de anel restante.

(b) Expresse o volume da parte (a) em termos da altura h do anel. Note que o volume depende somente de h , e não de r_1 ou r_2 .

29–32 □ Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares.

29. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy dx$

30. $\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$

$$31. \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x^2 y^2 dx dy \qquad 32. \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx$$

33. Uma piscina circular tem 40 pés de diâmetro. Sua profundidade é constante na direção leste-oeste e aumenta linearmente de 2 pés no término sul para 7 pés no término norte. Determine o volume de água da piscina.
34. Um aspersor distribui água em um círculo de raio de 100 pés. Ele fornece água até uma profundidade e^{-r} pés por hora em uma distância de r pés do aspersor.
- (a) Qual a quantidade total de água fornecida por hora para a região dentro de um círculo de raio R centrado no aspersor?
- (b) Determine uma expressão para a quantidade média de água por hora e por pés quadrados fornecida para uma região circular de raio R .

35. Utilize coordenadas polares para combinar a soma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy dy dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy dy dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy dy dx$$

em uma única integral dupla. Em seguida calcule essa integral dupla.

36. (a) Definimos uma integral imprópria (sobre todo plano \mathbb{R}^2)

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dA \end{aligned}$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dA = \pi$$

- (b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte (a) é

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)} dA$$

onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use esse resultado para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi$$

- (c) Deduza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

- (d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2}x$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

(Esse é um resultado fundamental para probabilidade e estatística.)

37. Utilize o resultado do Exercício 36, parte (c), para calcular as seguintes integrais:

$$(a) \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \qquad (b) \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$$

15.5 Aplicações das Integrais Duplas

Já vimos uma aplicação da integral dupla: cálculo de volumes. Outra aplicação geométrica importante é a determinação de áreas de superfícies, o que será feito na próxima seção. Nesta seção, vamos explorar as aplicações físicas, como no cálculo de massa, carga elétrica, centro de massa e momento de inércia. Veremos ainda como essas idéias físicas são importantes quando aplicadas a funções de densidade de probabilidade de duas variáveis aleatórias.

Densidade e Massa

Na Seção 8.3 do Volume I calculamos momentos e centro de massa de placas finas ou lâminas de densidade constante, usando as integrais de funções de uma variável real. Agora, com auxílio das integrais duplas, temos condições de considerar as lâminas com densidade variável. Suponha uma lâmina colocada em uma região D do plano xy e cuja **densidade** (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua sobre D . Isso significa que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

onde Δm e ΔA são a massa e a área do pequeno retângulo que contém (x, y) e tomamos o limite quando as dimensões do retângulo se aproximam de 0 (veja a Figura 1).

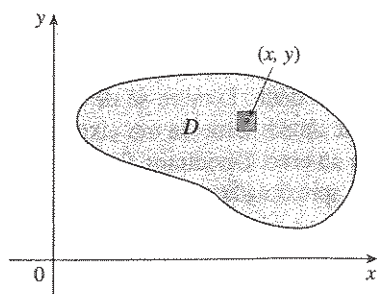


FIGURA 1

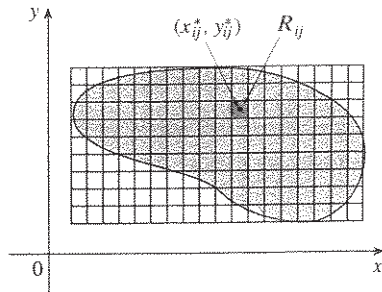


FIGURA 2

Para determinar a massa total m da lâmina, dividimos o retângulo R contendo D em sub-retângulos R_{ij} todos do mesmo tamanho (como na Figura 2), e consideramos $\rho(x, y)$ como 0 fora de D . Se escolhermos um ponto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} , então a massa da parte da lâmina que ocupa R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$, onde ΔA é a área de R_{ij} . Se somarmos todas essas massas, obteremos uma aproximação do valor da massa total:

$$m \approx \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Aumentando o número de sub-retângulos, obtemos a massa total m da lâmina como o valor limite dessa aproximação:

1
$$m = \lim_{k, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D \rho(x, y) dA$$

Físicos consideram ainda outros tipos de densidade que podem ser tratados da mesma maneira. Por exemplo: se uma carga elétrica está distribuída sobre uma região D e a densidade de carga (em unidades de carga por unidade de área) é dada por $\sigma(x, y)$ em um ponto (x, y) em D , então a carga total Q é dada por

2
$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA$$

EXEMPLO 1 □ Uma carga está distribuída sobre uma região D da Figura 3 de modo que a densidade de carga em (x, y) seja $\sigma(x, y) = xy$, medida em coulombs por metro quadrado (C/m²). Determine a carga total.

SOLUÇÃO Da Equação 2 e Figura 3, temos

$$\begin{aligned} Q &= \iint_D \sigma(x, y) dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} [1^2 - (1-x)^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

Logo, a carga total é $\frac{5}{24}$ C. □

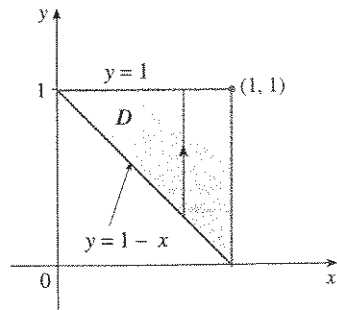


FIGURA 3

Momentos e Centro de Massa

Na Seção 8.3 do Volume I, determinamos o centro de massa de uma lâmina de densidade constante; aqui, consideramos uma lâmina com densidade variável. Suponha que a lâmina ocupe uma região D e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade. Lembre-se de que no Capítulo 8 (Volume I) definimos o momento de uma partícula em torno de um eixo como o produto de sua massa pela distância (na perpendicular) ao eixo. Dividimos D em retângulos pequenos como na Figura 2. Então a massa de R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$, e podemos aproximar o momento de R_{ij} com relação ao eixo x por

$$[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A] y_{ij}^*$$

Se somarmos essas quantidades e tomarmos o limite quando o número de sub-retângulos cresce indefinidamente, obteremos o **momento** da lâmina inteira em torno do eixo x :

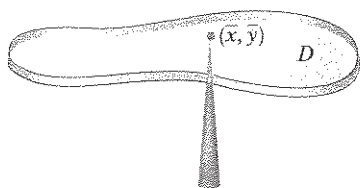


FIGURA 4

$$\boxed{3} \quad M_x = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y \rho(x, y) \, dA$$

Da mesma forma, o momento em torno do eixo y é:

$$\boxed{4} \quad M_y = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x \rho(x, y) \, dA$$

Como anteriormente, definimos o centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) de modo que $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$. O significado físico disso é que a lâmina se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa. Assim, a lâmina permanece horizontal quando equilibrada em seu centro de massa (veja a Figura 4).

5 As coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade $\rho(x, y)$ são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) \, dA \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) \, dA$$

onde a massa m é dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y) \, dA$$

EXEMPLO 2 □ Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade é $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.

SOLUÇÃO O triângulo está mostrado na Figura 5. (Note que a equação da fronteira superior é $y = 2 - 2x$.) A massa da lâmina é

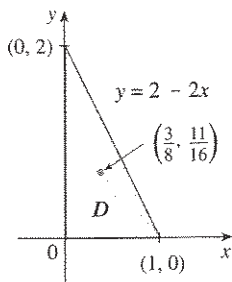


FIGURA 5

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) \, dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} \, dx \\ &= 4 \int_0^1 (1 - x^2) \, dx = 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Então, as fórmulas em (5) nos dão

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) \, dA = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy) \, dy \, dx \\ &= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[xy + 3x^2y + x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} \, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^3) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y) dA = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2) dy dx \\ &= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[7x - 9 \frac{x^2}{2} - x^3 + 5 \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

O centro de massa é o ponto $(\frac{3}{8}, \frac{11}{16})$.

EXEMPLO 3 □ A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância do centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

SOLUÇÃO Vamos considerar a lâmina como a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ (veja a Figura 6). Então a distância do ponto (x, y) ao centro do círculo (origem) é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto, a função densidade é

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

onde K é alguma constante. Tanto a função densidade como o formato da lâmina sugerem a conversão para coordenadas polares. Então $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ e a região D é dada por $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi$. Logo a massa da lâmina é

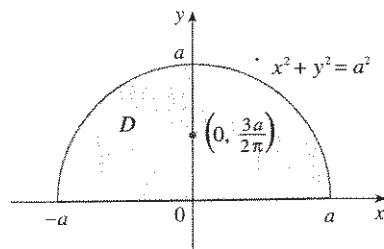


FIGURA 6

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2} dA \\ &= \int_0^\pi \int_0^a (Kr) r dr d\theta = K \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^2 dr \\ &= K\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a = \frac{K\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

Tanto a lâmina como a função densidade são simétricas com relação ao eixo y , e assim o centro de massa precisa estar sobre o eixo y , ou seja, $\bar{x} = 0$. A coordenada y é dada por

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y) dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^\pi \int_0^a r \sin \theta (Kr) r dr d\theta \\ &= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{3}{\pi a^3} [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{3}{\pi a^3} \frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi} \end{aligned}$$

Portanto o centro de massa está localizado no ponto $(0, 3a/(2\pi))$.

□ Compare a localização do centro de massa no Exemplo 3 com o Exemplo 4 na Seção 8.3 (Volume I), onde encontramos o centro de massa da lâmina com o mesmo formato, mas a densidade uniforme a está localizada no ponto $(0, 4a/(3\pi))$.

Momento de Inércia

O **momento de inércia** (também chamado **segundo momento**) de uma partícula de massa m em torno de um eixo é definido como mr^2 , onde r é a distância da partícula ao eixo. Estendemos o conceito a uma lâmina com função densidade $\rho(x, y)$ e ocupando uma região D pelo mesmo processo que fizemos para momentos simples. Dividimos D em

pequenos retângulos, aproximamos o momento de inércia de cada sub-retângulo em torno do eixo x e tomamos o limite da soma quando o número de sub-retângulos aumenta indefinidamente. O resultado é o **momento de inércia da lâmina em torno do eixo x** :

$$\boxed{6} \quad I_x = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA$$

Da mesma forma, o **momento de inércia em torno do eixo y** é:

$$\boxed{7} \quad I_y = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA$$

É de interesse, ainda, considerar o **momento de inércia em torno da origem**, também chamado **momento polar de inércia**:

$$\boxed{8} \quad I_0 = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

Note que $I_0 = I_x + I_y$.

EXEMPLO 4 □ Determine os momentos de inércia I_x , I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a .

SOLUÇÃO A fronteira de D é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$, que em coordenadas polares D é descrito como $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq a$. Vamos calcular I_0 primeiro:

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2) \rho dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r dr d\theta \\ &= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = 2\pi \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi \rho a^4}{2} \end{aligned}$$

Em vez de calcular I_x e I_y diretamente, vamos usar o fato de que $I_x + I_y = I_0$ e $I_x = I_y$ (da simetria do problema). Portanto

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi \rho a^4}{4} \quad \square$$

No Exemplo 4, note que a massa do disco é

$$m = \text{densidade} \times \text{área} = \rho (\pi a^2)$$

de modo que o momento de inércia do disco em torno da origem (como uma roda em torno de seu eixo) pode ser escrito como

$$I_0 = \frac{1}{2} m a^2$$

Portanto, se aumentarmos a massa ou o raio do disco, aumentaremos o momento de inércia.

Em geral, o momento de inércia tem um papel em movimento de rotação semelhante ao que a massa tem em um movimento linear. O momento de inércia de uma roda é o que torna difícil começar ou parar a rotação da roda, assim como a massa do carro dificulta seu movimento inicial e a freada.

O raio de rotação de uma lâmina em torno de um eixo é um número R tal que

$$\boxed{9} \quad mR^2 = I$$

onde m é a massa da lâmina e I é o momento de inércia em torno do eixo dado. A Equação 9 nos diz que, se a massa da lâmina estiver concentrada a uma distância R do eixo, então o momento de inércia desse "ponto massa" seria o mesmo que o momento de inércia da lâmina.

Em particular, o raio de rotação \bar{y} em torno do eixo x e o raio de rotação \bar{x} em torno do eixo y têm as equações

$$\boxed{10} \quad m\bar{y}^2 = I_x \quad m\bar{x}^2 = I_y$$

Então (\bar{x}, \bar{y}) é o ponto no qual podemos concentrar a massa da lâmina sem modificar o momento de inércia em torno dos eixos coordenados resultantes. (Note a analogia com o centro de massa.)

EXEMPLO 5 □ Determine o raio de rotação em torno do eixo x do disco do Exemplo 4.

SOLUÇÃO Como notado, a massa do disco é $m = \rho\pi a^2$, e da Equação 10, temos

$$\bar{y}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{4}$$

Portanto, o raio de rotação em torno do eixo x é

$$\bar{y} = \frac{a}{2}$$

que é metade do raio do disco. □

Probabilidade

Na Seção 9.5, consideramos a *função densidade de probabilidade* f de uma variável aleatória contínua X . Isso significa que $f(x) \geq 0$ para todo x , $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, e a probabilidade de que X esteja entre a e b é determinada integrando-se f de a até b :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Consideremos agora um par de variáveis aleatórias X e Y , como o tempo de vida de dois componentes de uma máquina ou a altura e o peso de uma mulher adulta escolhida ao acaso. A **função densidade conjunta** de X e Y é uma função f de duas variáveis tais que a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D seja

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dA$$

de que Y esteja entre c e d é

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

(Veja a Figura 7.)

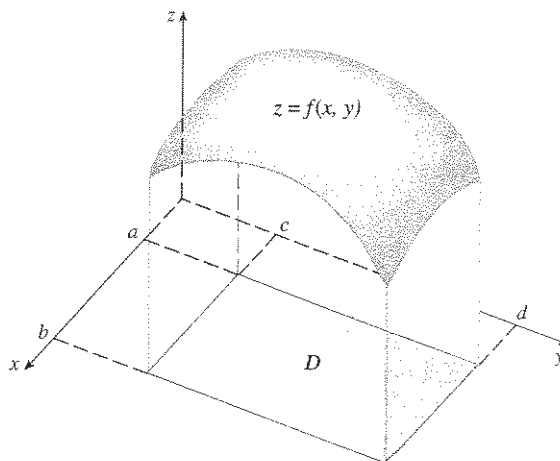


FIGURA 7

A probabilidade de que X esteja entre a e b e de que Y esteja entre c e d é o volume do sólido acima do retângulo $D = [a, b] \times [c, d]$ e abaixo do gráfico da função densidade conjunta.

Como as probabilidades não podem ser negativas e são medidas na escala de 0 a 1, a função densidade conjunta tem as seguintes propriedades:

$$f(x, y) \geq 0 \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dA = 1$$

Como no Exercício 36 da Seção 15.4, a integral dupla sobre \mathbb{R}^2 é uma integral imprópria definida como o limite da integral dupla sobre o círculo ou retângulo expandido e podemos escrever

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy = 1$$

EXEMPLO 6 □ Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C . Em seguida calcule $P(X \leq 7, Y \geq 2)$.

SOLUÇÃO Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1. Como $f(x, y) = 0$ fora do retângulo $[0, 10] \times [0, 10]$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy \, dx &= \int_0^{10} \int_0^{10} C(x + 2y) \, dy \, dx = C \int_0^{10} [xy + y^2]_{y=0}^{y=10} \, dx \\ &= C \int_0^{10} (10x + 100) \, dx = 1500C \end{aligned}$$

Portanto $1500C = 1$, e então $C = \frac{1}{1.500}$.

Agora podemos calcular a probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$\begin{aligned} P(X \leq 7, Y \geq 2) &= \int_{-\infty}^7 \int_2^{\infty} f(x, y) dy dx = \int_0^7 \int_2^{10} \frac{1}{1500}(x + 2y) dy dx \\ &= \frac{1}{1500} \int_0^7 [xy + y^2]_{y=2}^{y=10} dx = \frac{1}{1500} \int_0^7 (8x + 96) dx \\ &= \frac{868}{1500} \approx 0,5787 \end{aligned}$$

Suponha que X seja uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f_1(x)$ e Y seja uma variável aleatória com função densidade $f_2(y)$. Então X e Y são ditas **variáveis aleatórias independentes** se a função densidade conjunta for o produto das funções densidade individuais:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

Na Seção 8.5 do Volume I, modelamos o tempo de espera utilizando a função densidade exponencial

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

onde μ é o tempo médio de espera. No próximo exemplo consideraremos a situação com dois tempos de espera independentes.

EXEMPLO 7 □ O gerente de um cinema determina que o tempo médio de espera na fila para as pessoas comprarem entrada para o filme da semana seja de dez minutos, e que o tempo médio que levam para comprar pipoca seja de cinco minutos. Supondo que os tempos de espera sejam independentes, determine a probabilidade de um espectador esperar menos que 20 minutos até se dirigir a seu assento.

SOLUÇÃO Supondo que os tempos de espera X para comprar a entrada e Y para comprar pipoca possam ser modelados por funções densidade de probabilidade exponencial, podemos escrever as funções densidade individual como

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{1}{5}e^{-y/5} & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$$

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5} & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Perguntamos pela probabilidade de $X + Y < 20$:

$$P(X + Y < 20) = P((X, Y) \in D)$$

onde D é a região triangular mostrada na Figura 8. Então

$$\begin{aligned} P(X + Y < 20) &= \iint_D f(x, y) dA = \int_0^{20} \int_0^{20-x} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5} dy dx \\ &= \frac{1}{50} \int_0^{20} [e^{-x/10}(-5)e^{-y/5}]_{y=0}^{y=20-x} dx \end{aligned}$$

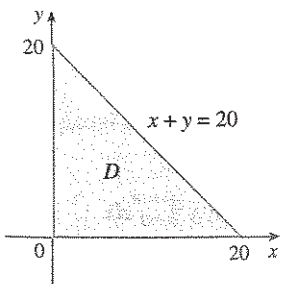


FIGURA 8

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{10} \int_0^{20} e^{-x/10} (1 - e^{-(x-20)/5}) dx \\
&= \frac{1}{10} \int_0^{20} (e^{-x/10} - e^{-4} e^{x/10}) dx = 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476 \\
&= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476
\end{aligned}$$

Isso significa que cerca de 75% dos espectadores esperam menos que 20 minutos antes de tomar seus assentos. □

Valor Esperado

Lembre-se da Seção 8.5 (Volume I) que, se X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade f , então sua *média* é

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Se X e Y são variáveis aleatórias com função densidade conjunta f , definimos **média X** e **média Y** , também chamadas **valores esperados** de X e Y , como

$$\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} xf(x, y) dA \quad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} yf(x, y) dA$$

Note como são parecidas as expressões de μ_1 e μ_2 em (11) com os momentos M_x e M_y de uma lâmina com função densidade ρ nas Equações 3 e 4. De fato, podemos pensar na probabilidade como uma massa continuamente distribuída. Calculamos probabilidade da mesma maneira que calculamos massa: integrando a função densidade. E, como a “probabilidade de massa” total é 1, as expressões de \bar{x} e \bar{y} em (5) mostram que podemos pensar que os valores esperados de X e Y , μ_1 e μ_2 são as coordenadas do “centro de massa” da distribuição de probabilidade.

No próximo exemplo trabalhamos com distribuição normal. Como na Seção 8.5 (Volume I), uma única variável aleatória tem *distribuição normal* se sua função densidade de probabilidade é da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

onde μ é sua média e σ é seu desvio-padrão.

EXEMPLO 8 □ Uma fábrica produz rolamentos (de forma cilíndrica) que são vendidos como tendo 4,0 cm de diâmetro e 6,0 cm de comprimento. De fato, o diâmetro X tem distribuição normal com média 4,0 cm e desvio-padrão 0,01 cm, enquanto o comprimento Y tem distribuição normal com média 6,0 cm e desvio padrão 0,01 cm. Supondo que X e Y sejam independentes, escreva a função densidade conjunta e faça dela um gráfico. Determine a probabilidade de um rolamento escolhido aleatoriamente da linha de produção diferir dos valores médios em mais do que 0,02 cm.

SOLUÇÃO Temos que X e Y têm distribuição normal com $\mu_1 = 4,0$, $\mu_2 = 6,0$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,01$. As funções densidade individuais para X e Y são

$$f_1(x) = \frac{1}{0,01\sqrt{2\pi}} e^{-(x-4)^2/0,0002} \quad f_2(y) = \frac{1}{0,01\sqrt{2\pi}} e^{-(y-6)^2/0,0002}$$

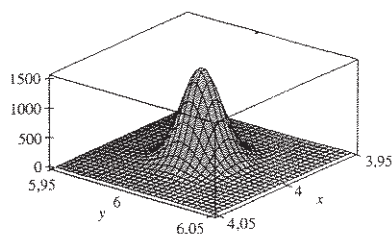


FIGURA 9

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_1(x)f_2(y) = \frac{1}{0,0002\pi} e^{-(x-4)^2/0,0002} e^{-(y-6)^2/0,0002} \\ &= \frac{5000}{\pi} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]} \end{aligned}$$

O gráfico dessa função é mostrado na Figura 9.

Vamos inicialmente calcular a probabilidade de X e Y diferirem dos valores médios de menos que 0,02 cm. Usando uma calculadora ou computador para estimar a integral, temos

$$\begin{aligned} P(3,98 < X < 4,02, 5,98 < Y < 6,02) &= \int_{3,98}^{4,02} \int_{5,98}^{6,02} f(x, y) dy dx \\ &= \frac{5000}{\pi} \int_{3,98}^{4,02} \int_{5,98}^{6,02} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]} dy dx \\ &\approx 0,91 \end{aligned}$$

Então a probabilidade de X ou Y diferir de seu valor médio em 0,02 cm ou mais é de aproximadamente

$$1 - 0,91 = 0,09$$

15.5 Exercícios

- Uma carga elétrica é distribuída sobre um retângulo $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$, de modo que a densidade de carga em (x, y) seja $\sigma(x, y) = 2xy + y^2$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no retângulo.
- Uma carga elétrica é distribuída sobre um disco $x^2 + y^2 \leq 4$ de modo que a densidade de carga em (x, y) seja $\sigma(x, y) = x + y + x^2 + y^2$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no disco.
- 10 □ Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem função densidade ρ .
 - $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$; $\rho(x, y) = xy^2$
 - $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$; $\rho(x, y) = cxy$
 - D é uma região triangular com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$; $\rho(x, y) = x + y$
 - D é uma região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 0)$; $\rho(x, y) = x$
 - D é limitada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$; $\rho(x, y) = y$
 - D é limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$; $\rho(x, y) = x$.
 - D é limitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $y = x - 2$; $\rho(x, y) = 3$
 - $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \cos x, 0 \leq x \leq \pi/2\}$; $\rho(x, y) = x$
- Uma lâmina ocupa a parte do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ do primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo x .
- Determine o centro de massa da lâmina do Exercício 11 se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.
- Determine o centro de massa da lâmina com formato de um triângulo reto isósceles com lados iguais de tamanho a se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do ponto ao vértice oposto à hipotenusa.
- Uma lâmina ocupa a região circular $x^2 + y^2 = 2y$, mas fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Determine o centro de massa se a densidade for proporcional à distância do ponto à origem.
- Determine os momentos de inércia I_x , I_y , I_0 para a lâmina do Exercício 7.
- Determine os momentos de inércia I_x , I_y , I_0 para a lâmina do Exercício 12.
- Determine os momentos de inércia I_x , I_y , I_0 para a lâmina do Exercício 9.
- Considere uma pá de ventilador, quadrada, com lado de comprimento igual a 2 e com seu canto inferior esquerdo posicionado na origem. Se a densidade da pá for $\rho(x, y) = 1 + 0,1x$, será mais difícil girar a pá em torno do eixo x ou do eixo y ?

19–20 □ Utilize um sistema de manipulação algébrica para determinar a massa, o centro de massa e os momentos de inércia da lâmina que ocupa a região D e tem a densidade dada.

19. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sec x, 0 \leq x \leq \pi\}; \rho(x, y) = xy$

20. D é delimitada pela cardióide $r = 1 + \cos \theta$;

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

21. Uma lâmina com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa um quadrado de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) e $(0, a)$. Determine os momentos de inércia I_x e I_y e os raios de rotação \bar{x} e \bar{y} .

22. Uma lâmina com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa a região abaixo da curva $y = \sin x$ de $x = 0$ até $x = \pi$. Determine os momentos de inércia I_x e I_y e raios de rotação \bar{x} e \bar{y} .

23. A função densidade conjunta para um par de variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Determine a constante C .
- (b) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.
- (c) Determine $P(X + Y \leq 1)$.

24. (a) Verifique que

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

é uma função densidade conjunta.

- (b) Se X e Y são variáveis aleatórias cuja função densidade conjunta é f da parte (a), determine
 - (i) $P(X \geq \frac{1}{2})$ (ii) $P(X \geq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2})$
- (c) Determine os valores esperados de X e Y .

25. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 0,1e^{-(0,5x+0,2y)} & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Verifique que f é de fato uma função densidade conjunta.
- (b) Determine as seguintes probabilidades.
 - (i) $P(Y \geq 1)$ (ii) $P(X \leq 2, Y \leq 4)$
- (c) Determine os valores esperados de X e Y .

26. (a) Uma lâmpada tem dois bulbos de um tipo com tempo de vida médio de 1000 horas. Supondo que possamos modelar a probabilidade de falha desses bulbos por uma

função densidade exponencial com média $\mu = 1000$, determine a probabilidade de que ambos os bulbos venham a falhar dentro de um período de 1000 horas.

(b) Outra lâmpada tem somente um bulbo do mesmo tipo dos da parte (a). Se um bulbo se queima e é trocado por outro do mesmo tipo, determine a probabilidade de que os dois venham a falhar dentro de 1000 horas.

27. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias, onde X tem distribuição normal com média 45 e desvio-padrão 0,5 e Y tem distribuição normal com média 20 e desvio-padrão 0,1.

- (a) Ache $P(40 \leq X \leq 50, 20 \leq Y \leq 25)$
- (b) Encontre $P(4(X - 45)^2 + 100(Y - 20)^2 \leq 2)$.

28. Xavier e Yolanda têm aulas que terminam ao meio-dia e concordaram em se encontrar todo dia depois das aulas. Eles chegam em um café separadamente. O tempo de chegada de Xavier é X e o da Yolanda é Y , onde X e Y são medidos em minutos após o meio-dia. As funções densidade individuais são

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}y & \text{se } 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

(Xavier chega algumas vezes depois do meio-dia, e é mais provável que ele chegue na hora do que se atrase. Yolanda sempre chega às 12h10, e é mais provável que se atrase do que chegue pontualmente.) Depois de Yolanda chegar, ela espera até meia hora por Xavier, mas ele não espera por ela. Determine a probabilidade de eles se encontrarem.

29. Quando estudamos uma contaminação epidêmica, supomos que a probabilidade de um indivíduo infectado disseminar a doença para um indivíduo não infectado seja uma função da distância entre eles. Considere uma cidade circular com raio de 10 mi na qual a população está uniformemente distribuída. Para um indivíduo não infectado no ponto $A(x_0, y_0)$, suponha que a função probabilidade seja dada por

$$f(P) = \frac{1}{20}[20 - d(P, A)]$$

onde $d(P, A)$ denota a distância de P a A .

- (a) Suponha que a exposição de uma pessoa à doença seja a soma das probabilidades de adquirir a doença de todos os membros da população. Suponha ainda que as pessoas infectadas estejam uniformemente distribuídas pela cidade, existindo k indivíduos contaminados por milha quadrada. Determine a integral dupla que representa a exposição de uma pessoa que reside em A .
- (b) Calcule a integral para o caso em que A está no centro da cidade e para o caso em que A está na periferia da cidade. Onde você preferiria viver?

15.6 Área de Superfície

□ Na Seção 16.6, trataremos de superfícies mais gerais, chamadas superfícies paramétricas. Assim, você pode pular esta seção, se for cobrir a outra.

Nesta seção, vamos aplicar a integral dupla ao problema de se determinar a área de uma superfície. Na Seção 8.2 (Volume I), determinamos a área de um tipo especial de superfície – uma superfície de revolução – por métodos de cálculo de uma única variável. Calcularemos aqui a área de uma superfície cuja equação é dada por $z = f(x, y)$, o gráfico de uma função de duas variáveis.

Seja S a superfície com a equação $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais contínuas.

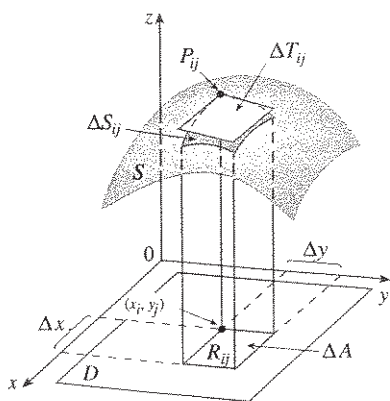


FIGURA 1

Para simplificar a dedução da fórmula da área, vamos supor que $f(x, y) \geq 0$ e que o domínio D de f seja um retângulo. Vamos dividir D em retângulos pequenos R_{ij} com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Se (x_i, y_j) é o canto de R_{ij} mais próximo da origem, seja $P_{ij}(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ o ponto de S diretamente acima dele (veja a Figura 1). O plano tangente a S em P_{ij} é uma aproximação de S perto de P_{ij} . Assim, a área ΔT_{ij} da parte desse plano tangente (um paralelogramo) que está diretamente acima de R_{ij} é uma aproximação da área ΔS_{ij} da parte de S que está diretamente acima de R_{ij} . Então, a soma $\sum \sum \Delta T_{ij}$ é uma aproximação da área total de S , a qual parece melhorar à medida que aumentamos o número de retângulos. Portanto definimos a **área de superfície** de S como

$$A(S) = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta T_{ij}$$

Para determinar uma fórmula mais conveniente que a Equação 1 para propósitos computacionais, tomamos \mathbf{a} e \mathbf{b} como os vetores que começam em P_{ij} e correspondem aos lados do paralelogramo com área ΔT_{ij} (veja a Figura 2). Então $\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Lembre-se, da Seção 14.3, que $f_x(x_i, y_j)$ e $f_y(x_i, y_j)$ são as inclinações das retas tangentes a P_{ij} com direções \mathbf{a} e \mathbf{b} . Portanto

$$\mathbf{a} = \Delta x \mathbf{i} + f_x(x_i, y_j) \Delta x \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y \mathbf{j} + f_y(x_i, y_j) \Delta y \mathbf{k}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j) \Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j) \Delta y \end{vmatrix} \\ &= -f_x(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \mathbf{i} - f_y(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \mathbf{j} + \Delta x \Delta y \mathbf{k} \\ &= [-f_x(x_i, y_j) \mathbf{i} - f_y(x_i, y_j) \mathbf{j} + \mathbf{k}] \Delta A \end{aligned}$$

Logo
$$\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \Delta A$$

Da Definição 1, temos

$$\begin{aligned} A(S) &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta T_{ij} \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \Delta A \end{aligned}$$

e por qualquer definição de integral dupla podemos obter a seguinte fórmula:

2 A área da superfície com equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde f_x e f_y são contínuas, é

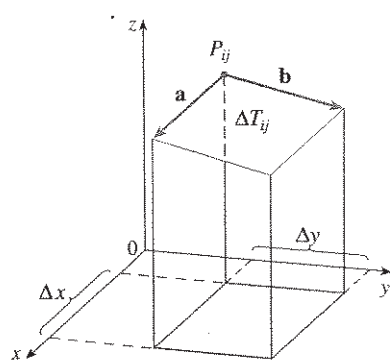
$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} dA$$


FIGURA 2

Verificaremos na Seção 16.6 que essa fórmula é consistente com nossa fórmula prévia para a área de uma superfície de revolução. Se utilizarmos a notação alternativa para derivada parcial, podemos reescrever a Fórmula 2 como segue:

$$\boxed{3} \quad A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

Note a semelhança entre a fórmula de área da superfície na Equação 3 e a fórmula do comprimento de arco da Seção 8.1 (Volume I):

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

EXEMPLO 1 □ Determine a área de superfície da parte da superfície $z = x^2 + 2y$ que está acima da região triangular T no plano xy com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

SOLUÇÃO A região T é mostrada na Figura 3 e descrita por

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

Usando a Fórmula 2 com $f(x, y) = x^2 + 2y$, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \iint_T \sqrt{(2x)^2 + (2)^2 + 1} dA = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2 + 5} dy dx \\ &= \int_0^1 x \sqrt{4x^2 + 5} dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (4x^2 + 5)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (27 - 5\sqrt{5}) \end{aligned}$$

A Figura 4 mostra a porção da superfície cuja área acabamos de calcular.

EXEMPLO 2 □ Determine a área da parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

SOLUÇÃO O plano intercepta o parabolóide no círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Portanto a superfície dada está acima do disco D com centro na origem e raio 3 (veja a Figura 5). Usando a Fórmula 3, temos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA \end{aligned}$$

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \frac{1}{8} \sqrt{1 + 4r^2} (8r) dr \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{8}\right)^2 (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1) \end{aligned}$$

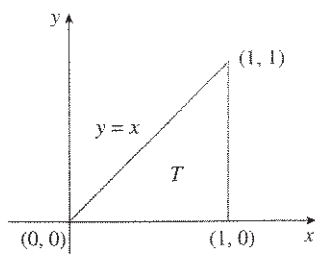


FIGURA 3

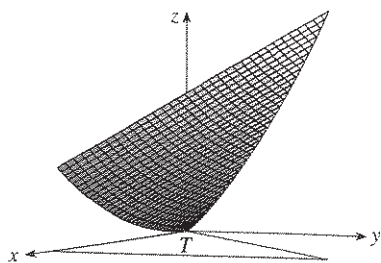


FIGURA 4

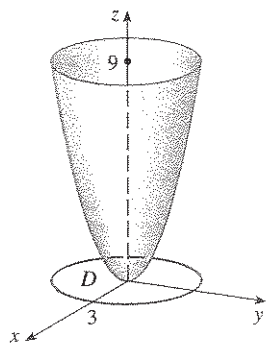


FIGURA 5

15.6 Exercícios

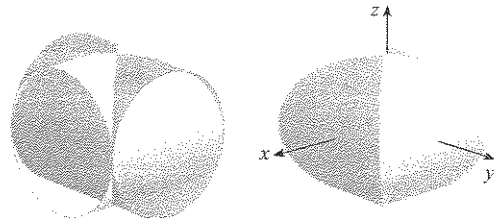
1–12 □ Determine a área da superfície.

1. A parte do plano $z = 2 + 3x + 4y$ que está acima do retângulo $[0, 5] \times [1, 4]$
2. A parte do plano $2x + 5y + z = 10$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$
3. A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante
4. A parte da superfície $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$
5. A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está acima do retângulo com vértices, $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 2)$ e $(4, 2)$
6. A parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy
7. A parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$
8. A superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$
9. A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$
10. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano $z = 1$
11. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$ e acima do plano xy
12. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do parabolóide $z = x^2 + y^2$

13–14 □ Determine a área de superfície com precisão de quatro casas decimais, expressando a área em termos de integral de função de uma variável real e use sua calculadora para estimar o valor da integral.

13. A parte da superfície $z = e^{-x^2-y^2}$ que está acima do círculo $x^2 + y^2 \leq 4$
 14. A parte da superfície $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
15. (a) Use a Regra do Ponto Médio para as integrais duplas (veja a Seção 15.1) com quatro quadrados para estimar a área da superfície da porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está acima do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.
- (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a área da superfície da parte (a) com precisão de quatro casas decimais. Compare com sua resposta para a parte (a).

16. (a) Use a Regra do Ponto Médio para as integrais duplas com $m = n = 2$ para estimar a área da superfície $z = xy + x^2 + y^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.
- (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a área da superfície da parte (a) com precisão de quatro casas decimais. Compare com sua resposta para a parte (a).
17. Determine a área exata da superfície $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 1$.
18. Determine a área exata da superfície $z = 1 + x + y + x^2$ $-2 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Ilustre traçando o gráfico da superfície.
19. Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície $z = 1 + x^2y^2$ que está acima do disco $x^2 + y^2 \leq 1$.
20. Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está acima do quadrado $|x| + |y| \leq 1$. Ilustre, traçando o gráfico da superfície.
21. Mostre que a área da parte da superfície do plano $z = ax + by + c$ com projeção sobre a região D no plano xy com área $A(D)$ é $\sqrt{a^2 + b^2 + 1} A(D)$.
22. Se você tentar utilizar a Fórmula 2 para determinar a área do topo superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, terá problemas, porque a integral dupla é imprópria. De fato, o integrando tem uma descontinuidade infinita em todo ponto da fronteira circular $x^2 + y^2 = a^2$. Entretanto, a integral pode ser calculada sobre o disco $x^2 + y^2 \leq t^2$ como $t \rightarrow a^-$. Use esse método para mostrar que a área da esfera de raio a é $4\pi a^2$.
23. Determine a área da parte do parabolóide $y = x^2 + z^2$ cortada pelo plano $y = 25$. [Dica: Projete a superfície sobre o plano xz .]
24. A figura mostra a superfície criada quando o cilindro $y^2 + z^2 = 1$ intercepta o cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Determine a área dessa superfície.



15.7 Integrais Triplas

Assim como definimos integrais para funções de uma única variável e duplas para funções de duas variáveis, vamos definir integrais triplas, para funções de três variáveis. Inicialmente, trataremos o caso mais simples, quando f é definida em uma caixa retangular:

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

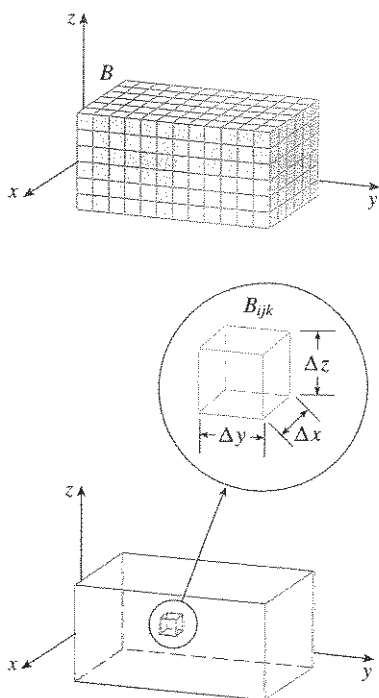


FIGURA 1

O primeiro passo é dividir B em subcaixas. Fazemos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimentos iguais Δx , dividindo $[c, d]$ em m subintervalos de comprimentos Δy , e dividindo $[r, s]$ em n subintervalos de comprimento Δz . Os planos através dos pontos terminais desses subintervalos paralelos aos planos coordenados subdividem a caixa B em lmn subcaixas

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

como mostrado na Figura 1. Cada subcaixa tem volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

Assim formamos a **soma tripla de Riemann**

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

onde o ponto amostra $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ está em B_{ijk} . Por analogia com a definição da integral dupla (15.1.5), definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann em (2).

3 Definição A integral tripla de f sobre a caixa B é

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

se o limite existir.

Novamente, a integral tripla sempre existe se f for contínua. Escolhemos o ponto amostra como qualquer ponto de cada subcaixa, mas, se escolhermos o ponto (x_i, y_j, z_k) , obteremos uma expressão com aparência menos complicada para a integral tripla:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V$$

Assim como para as integrais duplas, o método prático para calcular uma integral tripla consiste em expressá-la como uma integral iterada como segue.

4 Teorema de Fubini para as integrais Triples Se f é contínua em uma caixa retangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, então

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

A integral iterada do lado direito do Teorema de Fubini indica que primeiro integramos em relação a x (mantendo y e z fixados), em seguida integramos em relação a y (mantendo z fixado) e finalmente em relação a z . Existem cinco outras ordens possíveis de integração, todas fornecendo o mesmo resultado. Por exemplo: se primeiro integramos em relação a y , então em relação a z e depois a x , teremos

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx$$

EXEMPLO 4 Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2 dV$, onde B é a caixa retangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

SOLUÇÃO Podemos usar qualquer uma das seis possíveis ordens de integração. Se escolhermos integrar primeiro em relação a x , depois em relação a y e então em relação a z , obteremos

$$\begin{aligned} \iiint_B xyz^2 dV &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dx dy dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2 yz^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy dz \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} dy dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2 z^2}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} dz \\ &= \int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz = \left[\frac{z^3}{4} \right]_0^3 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

Agora definiremos a **integral tripla sobre uma região limitada genérica E** no espaço tridimensional (um sólido) pelo mesmo método usado para as integrais duplas (15.3.2). Envolveremos E por uma caixa B do tipo dado pela Equação 1. Em seguida definiremos uma função F de modo que ela coincida com f em E e seja 0 nos pontos de B fora de E . Por definição,

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iiint_B F(x, y, z) dV$$

Essa integral existe se f for contínua e na fronteira de E for “razoavelmente lisa”. A integral tripla tem essencialmente as mesmas propriedades da integral dupla (Propriedades 6-9 da Seção 15.3).

Vamos restringir nossa atenção às funções contínuas f e a certos tipos de regiões. Uma região sólida E é dita ser do **tipo 1** se está contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e y , ou seja,

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy , como mostrado na Figura 2. Note que a fronteira superior do sólido E é a superfície de equação $z = u_2(x, y)$, enquanto a fronteira inferior é a superfície $z = u_1(x, y)$.

Pelos mesmos argumentos que nos levaram a (15.3.3), podemos mostrar que, se E é uma região do tipo 1 dada pela Equação 5, então

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

O significado da integral de dentro do lado direito da Equação 6 é que x e y são mantidos fixos, e assim $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ são vistas como constantes, enquanto $f(x, y, z)$ é integrada em relação a z .

Em particular, se a projeção D de E sobre o plano xy é uma região plana do tipo I (como na Figura 3), então

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

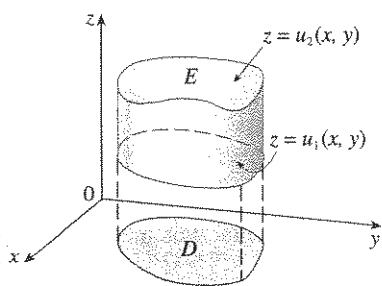


FIGURA 2
Uma região sólida do tipo 1

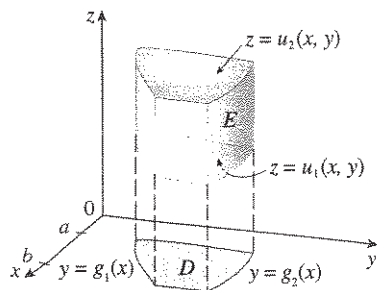


FIGURA 3
Uma região sólida do tipo 1

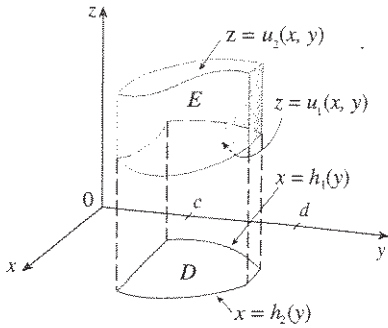


FIGURA 4
Outra região sólida do tipo 1

e a Equação 6 fica

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

Se, por outro lado, D é uma região plana do tipo II (como na Figura 4), então

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

e a Equação 6 fica

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$$

Exemplo 7 Calcule $\iiint_E z \, dV$, onde E é o tetraedro sólido delimitado pelos quatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

SOLUÇÃO Para montarmos a integral tripla, é recomendável desenhar *dois* diagramas: um da região sólida E (veja a Figura 5) e outro de sua projeção D no plano xy (veja a Figura 6). A fronteira inferior do tetraedro é o plano $z = 0$ e a superior é o plano $x + y + z = 1$ (ou $z = 1 - x - y$), e então usamos $u_1(x, y) = 0$ e $u_2(x, y) = 1 - x - y$ na Fórmula 7. Note que os planos $x + y + z = 1$ e $z = 0$ se interceptam na reta $x + y = 1$ (ou $y = 1 - x$) no plano xy . Logo, a projeção de E é a região triangular da Figura 6, e temos

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Essa descrição de E como região do tipo 1 nos permite calcular a integral como segue:

$$\begin{aligned} \iiint_E z \, dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{6} \left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Uma região sólida E é do **tipo 2** se for da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano yz (veja a Figura 7). A superfície de trás é $x = u_1(y, z)$, e a superfície da frente é $x = u_2(y, z)$, e temos

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) \, dx \right] dA$$

Finalmente, uma região do **tipo 3** é da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

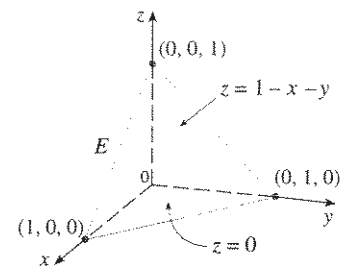


FIGURA 5

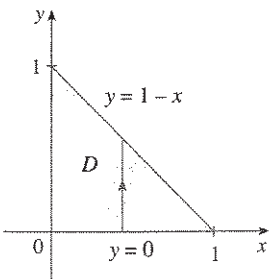


FIGURA 6

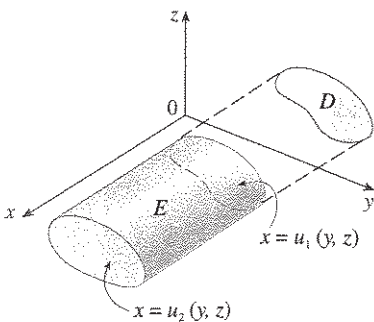


FIGURA 7
Uma região do tipo 2

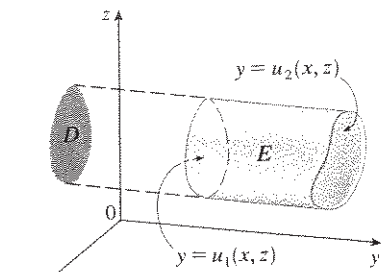


FIGURA 8

Uma região do tipo 3

onde D é a projeção de E sobre o plano xz , $y = u_1(x, z)$ é a superfície da esquerda, e $y = u_2(x, z)$ é a superfície da direita (veja a Figura 8). Para esse tipo de região, temos

$$(11) \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) \, dy \right] dA$$

Em cada uma das Equações 10 e 11 podem existir duas possíveis expressões para a integral dependendo de D ser uma região plana do tipo I ou II (e correspondendo às Equações 7 e 8).

EXEMPLO 3 Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV$, onde E é a região limitada pelo parabolóide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.

SOLUÇÃO O sólido E está mostrado na Figura 9. Se o olharmos como uma região do tipo 1, então precisaremos considerar sua projeção D_1 sobre o plano xy , que é a região parabólica da Figura 10. (O traço de $y = x^2 + z^2$ no plano $z = 0$ é a parábola $y = x^2$.)

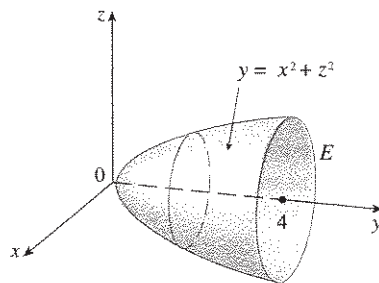


FIGURA 9

Região de integração

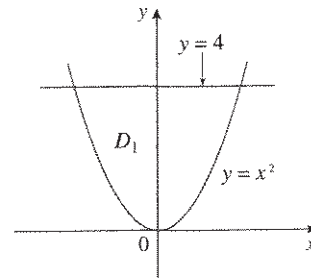


FIGURA 10

Projeção sobre o plano xy

De $y = x^2 + z^2$ obtemos $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, e então a superfície fronteira debaixo de E é $z = -\sqrt{y - x^2}$, e a superfície de cima é $z = \sqrt{y - x^2}$. Portanto a descrição de E como região do tipo 1 é

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, -\sqrt{y - x^2} \leq z \leq \sqrt{y - x^2}\}$$

e obtemos

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2} \, dz \, dy \, dx$$

Apesar de essa expressão estar correta, é extremamente difícil calculá-la. Vamos, em vez disso, considerar E como região do tipo 3. Como tal, sua projeção D_3 sobre o plano xz é o disco $x^2 + z^2 \leq 4$ mostrado na Figura 11.

Então a superfície lateral esquerda de E é o parabolóide $y = x^2 + z^2$ e a superfície lateral direita é o plano $y = 4$. Assim, tomando $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ e $u_2(x, z) = 4$ na Equação 11, temos

$$\begin{aligned} \iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV &= \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2 + z^2} \, dy \right] dA \\ &= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} \, dA \end{aligned}$$

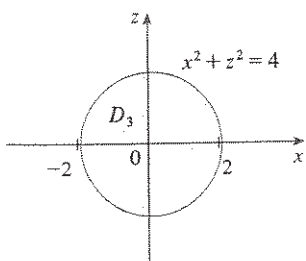


FIGURA 11

Projeção sobre o plano xz

□ A maior dificuldade no cálculo de uma integral tripla é estabelecer a expressão para a região de integração (como na Equação 9 do Exemplo 2). Lembre-se de que os limites de integração da integral de dentro contêm no máximo duas variáveis, os limites de integração da integral do meio contêm no máximo uma variável, e os limites de integração de fora precisam ser constantes.

Apesar de essa integral poder ser escrita como

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2} dz dx$$

fica mais simples convertê-la para coordenadas polares no plano xz : $x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$. O que nos dá

$$\begin{aligned} \iiint_E \sqrt{x^2+z^2} dV &= \iint_{D_1} (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2)r r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2-r^4) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{15} \end{aligned}$$

Aplicações da Integral Tripla

Lembre-se de que, se $f(x) \geq 0$, então a integral $\int_a^b f(x) dx$ representa a área abaixo da curva $y = f(x)$ de a até b , e se $f(x, y) \geq 0$, então a integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$ representa o volume sob a superfície $z = f(x, y)$ acima de D . A interpretação correspondente para a integral tripla $\iiint_E f(x, y, z) dV$, onde $f(x, y, z) \geq 0$, não é muito útil, porque seria um “hipervolume” de um objeto de quatro dimensões e, é claro, de muito difícil visualização. (Lembre-se de que E é somente o domínio da função f ; o gráfico de f pertence ao espaço quadridimensional.) Apesar disso, a integral tripla $\iiint_E f(x, y, z) dV$ pode ser interpretada de forma diversa em diferentes situações físicas, dependendo das interpretações físicas de x , y , z e $f(x, y, z)$.

Vamos começar com o caso especial onde $f(x, y, z) = 1$ para todos os pontos em E . Nesse caso, a integral tripla representa o volume de E :

12

$$V(E) = \iiint_E dV$$

Por exemplo: você pode ver isso no caso de uma região do tipo 1 colocando $f(x, y, z) = 1$ na Fórmula 6:

$$\iiint_E 1 dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} dz \right] dA = \iint_D [u_2(x,y) - u_1(x,y)] dA$$

e, da Seção 15.3, sabemos que isso representa o volume que está entre as superfícies $z = u_1(x, y)$ e $z = u_2(x, y)$.

EXEMPLO 4 □ Utilize uma integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

SOLUÇÃO O tetraedro T e sua projeção D sobre o plano xy estão mostrados nas Figuras 12 e 13. A fronteira inferior de T é o plano $z = 0$, e a superior é o plano $x + 2y + z = 2$, ou seja, $z = 2 - x - 2y$. Portanto, temos

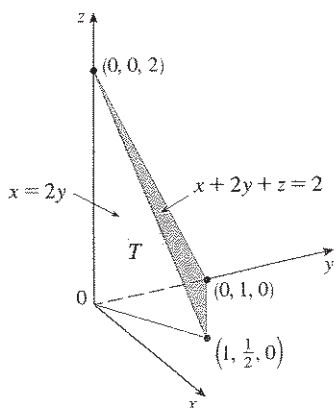


FIGURA 12

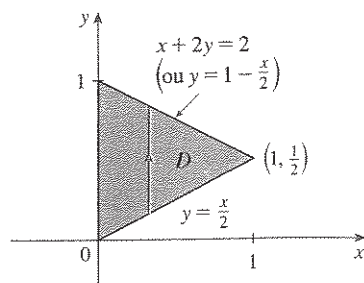


FIGURA 13

$$\begin{aligned} V(T) &= \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2-x-2y) \, dy \, dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

pelo mesmo cálculo usado no Exemplo 4 da Seção 15.3.

(Note que não é necessário usar a integral tripla para calcular volumes. Elas simplesmente fornecem um método alternativo para estabelecer os cálculos.)

Todas as aplicações de integrais duplas da Seção 15.5 podem ser imediatamente estendidas para as integrais triplas. Por exemplo: se a função densidade de um objeto sólido que ocupa a região E é $\rho(x, y, z)$, em unidades de massa por unidade de volume, em qualquer ponto (x, y, z) , então sua **massa** é

$$\boxed{13} \quad m = \iiint_E \rho(x, y, z) \, dV$$

e seus **momentos** em relação aos três planos coordenados são

$$\boxed{14} \quad \begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_E x\rho(x, y, z) \, dV & M_{xz} &= \iiint_E y\rho(x, y, z) \, dV \\ M_{xy} &= \iiint_E z\rho(x, y, z) \, dV \end{aligned}$$

O **centro de massa** está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\boxed{15} \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Se a densidade é constante, o centro de massa do sólido é chamado **centróide** de E . Os **momentos de inércia** em relação aos três eixos coordenados são

$$\boxed{16} \quad \begin{aligned} I_x &= \iiint_E (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dV & I_y &= \iiint_E (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dV \\ I_z &= \iiint_E (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) \, dV \end{aligned}$$

Como na Seção 15.5, a **carga elétrica** total sobre um objeto sólido ocupando a região E e tendo uma densidade de carga $\sigma(x, y, z)$ é

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z) \, dV$$

Se tivermos três variáveis aleatórias X, Y e Z , sua **função densidade conjunta** é uma função das três variáveis tal que a probabilidade de (X, Y, Z) estar em E é

$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z) \, dV$$

Em particular,

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d, r \leq Z \leq s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

A função densidade conjunta satisfaz

$$f(x, y, z) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx = 1$$

EXEMPLO 5 — Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico $x = y^2$ e pelos planos $x = z$, $z = 0$ e $x = 1$.

SOLUÇÃO O sólido E e sua projeção sobre o plano xy estão mostrados na Figura 14. As superfícies inferior e superior de E são os planos $z = 0$ e $z = x$, e então descrevemos E como uma região do tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$$

Então, se a densidade é $\rho(x, y, z) = \rho$, a massa é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E \rho \, dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x \rho \, dz \, dx \, dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x \, dx \, dy = \rho \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 (1 - y^4) \, dy = \rho \int_0^1 (1 - y^4) \, dy \\ &= \rho \left[y - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{5} \end{aligned}$$

Por causa da simetria de E e ρ em relação ao plano xz , podemos dizer imediatamente que $M_{xz} = 0$ e, portanto, $\bar{y} = 0$. Os outros momentos são

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_E x\rho \, dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x x\rho \, dz \, dx \, dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 \, dx \, dy = \rho \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{2\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) \, dy = \frac{2\rho}{3} \left[y - \frac{y^7}{7} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_E z\rho \, dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x z\rho \, dz \, dx \, dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=x} dx \, dy = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 \, dx \, dy \\ &= \frac{\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) \, dy = \frac{2\rho}{7} \end{aligned}$$

Logo, o centro de massa é

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m} \right) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14} \right)$$

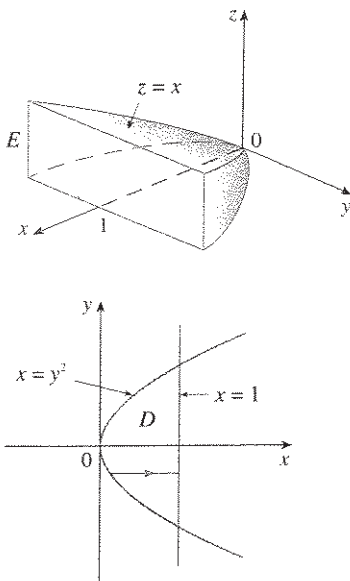


FIGURA 14

15.7 Exercícios

1. Calcule a integral do Exemplo 1, integrando primeiro em relação a z , depois x e então y .

2. Calcule a integral $\iiint_E (xz - y^3) dV$, onde $E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$ utilizando três ordens diferentes de integração.

3–5 □ Calcule a integral iterada.

3. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz \, dy \, dx \, dz$ 4. $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyz \, dz \, dy \, dx$

5. $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y \, dx \, dz \, dy$ 6. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2} \, dx \, dy \, dz$

7–16 □ Calcule a integral tripla.

7. $\iiint_E 2x \, dV$, onde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq z \leq y\}$

8. $\iiint_E yz \cos(x^3) \, dV$, onde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, x \leq z \leq 2x\}$

9. $\iiint_E 6xy \, dV$, onde E está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$

10. $\iiint_E y \, dV$, onde E é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + 2y + z = 4$

11. $\iiint_E xy \, dV$, onde E é o sólido tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$

12. $\iiint_E xz \, dV$, onde E é o sólido tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$

13. $\iiint_E x^2 e^y \, dV$, onde E é limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $z = 0$, $x = 1$, and $x = -1$

14. $\iiint_E (x + 2y) \, dV$, onde E é limitado pelo cilindro parabólico $y = x^2$ e pelos planos $x = z$, $x = y$ e $z = 0$

15. $\iiint_E x \, dV$, onde E é limitado pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$

16. $\iiint_E z \, dV$, onde E é limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante

17–20 □ Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado.

17. O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$

18. O sólido limitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$, $z = 4$, e $y = 9$

19. O sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos $y + z = 5$ e $z = 1$

20. O sólido limitado pelo parabolóide $x = y^2 + z^2$ e pelo plano $x = 16$

21. (a) Expresse o volume da cunha no primeiro octante que é cortado do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 1$ como uma integral tripla.

(b) Utilize a Tabela de Integrais (na *contracapa*) ou um sistema computacional algébrico para determinar o valor exato da integral tripla da parte (a).

22. (a) Na **Regra do Ponto Médio para as Integrais Triplas** usamos a soma tripla de Riemann para aproximar a integral tripla sobre uma caixa B , onde $f(x, y, z)$ é calculada no centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ da caixa B_{ijk} . Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar $\iiint_B e^{-x^2-y^2-z^2} dV$, onde B é o cubo definido por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Divida B em oito cubos de igual tamanho.

(b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a integral da parte (a) com precisão de até duas casas decimais. Compare com a resposta da parte (a).

23–24 □ Use a Regra do Ponto Médio para as integrais triplas (Exercício 22) para estimar o valor da integral. Divida B em oito subcaixas de igual tamanho.

23. $\iiint_B \frac{1}{\ln(1 + x + y + z)} dV$, onde

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8, 0 \leq z \leq 4\}$$

24. $\iiint_B \operatorname{sen}(xy^2z^3) \, dV$, onde

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$$

25–26 □ Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

25. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy \, dz \, dx$ 26. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx \, dz \, dy$

27–30 □ Expresse a integral $\iiint_E f(x, y, z) \, dV$ como uma integral iterada de seis modos diferentes, onde E é o sólido limitado pelas superfícies dadas.

27. $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, $y = 6$

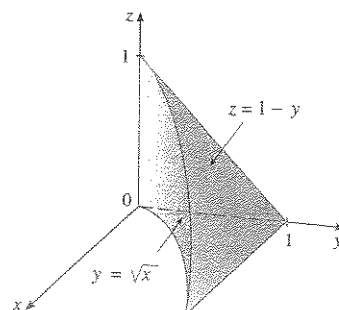
28. $z = 0$, $x = 0$, $y = 2$, $z = y - 2x$

29. $z = 0$, $z = y$, $x^2 = 1 - y$

30. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

31. A figura mostra a região de integração para a integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

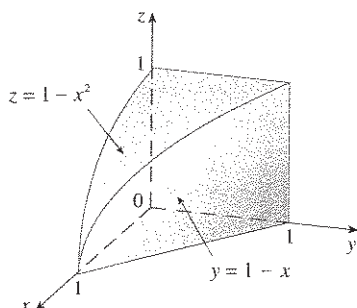


Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente em cinco modos diferentes.

32. A figura mostra a região de integração para a integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$$

Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente em cinco modos diferentes.



33-34 □ Escreva cinco outras integrais iteradas que sejam iguais à integral iterada dada.

33. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$

34. $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$

35-38 □ Determine a massa e o centro de massa do sólido dado E com a função densidade dada ρ .

35. E é o sólido do Exercício 9; $\rho(x, y, z) = 2$

36. E é limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $x + z = 1$, $x = 0$ e $z = 0$; $\rho(x, y, z) = 4$

37. E é o cubo dado por $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

38. E é o tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$; $\rho(x, y, z) = y$

39-40 □ Estabeleça, mas não calcule, as expressões integrais para (a) a massa, (b) o centro de massa e (c) o momento de inércia em relação ao eixo z .

39. O sólido do Exercício 19; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

40. O hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

41. Seja E um sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$ com função densidade $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$. Use um sistema computacional algébrico para determinar os valores exatos das

seguintes quantidades para E .

- (a) A massa
(b) O centro de massa
(c) O momento de inércia em relação ao eixo z

42. Se E é o sólido do Exercício 16 com função densidade $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, determine as seguintes quantidades, com precisão de três decimais.

- (a) A massa
(b) O centro de massa
(c) O momento de inércia em relação ao eixo z

43. Determine os momentos de inércia para um cubo com densidade constante k e lados de comprimento L se um vértice está localizado na origem e três arestas estão nos eixos coordenados.

44. Determine os momentos de inércia do tijolo retangular de dimensões a , b e c , massa M e densidade constante se o centro do tijolo está na origem e suas arestas são paralelas aos eixos coordenados.

45. A função densidade conjunta de variáveis aleatórias X , Y e Z é $f(x, y, z) = Cxyz$ se $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ e $f(x, y, z) = 0$ em caso contrário.

- (a) Determine o valor da constante C .
(b) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1, Z \leq 1)$.
(c) Determine $P(X + Y + Z \leq 1)$.

46. Suponha que X , Y e Z sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta $f(x, y, z) = Ce^{-(0,5x+0,2y+0,1z)}$ se $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ e $f(x, y, z) = 0$ em caso contrário.

- (a) Determine o valor da constante C .
(b) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.
(c) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1, Z \leq 1)$.

- 47-48 □ O valor médio de uma função $f(x, y, z)$ sobre uma região sólida E é definido como

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z) \, dV$$

onde $V(E)$ é o volume de E . Por exemplo: se ρ é a função densidade, então $\rho_{\text{méd}}$ é a densidade média de E .

47. Determine o valor médio da função $f(x, y, z) = xyz$ sobre o cubo com lados de comprimento L que está no primeiro octante, com um vértice na origem e arestas paralelas aos eixos coordenados.

48. Ache o valor médio da função $f(x, y, z) = x^2z + y^2z$ sobre a região delimitada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.

49. Determine a região E para a qual a integral

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2) \, dV$$

é máxima.

Projeto Descubra

Volumes de Hiperesferas

Nesse projeto determinaremos as fórmulas para o volume contido em uma hiperesfera em um espaço n -dimensional.

1. Utilize uma integral dupla e substituições trigonométricas, juntamente com a Fórmula 64 da Tabela de Integrais, para determinar a área do círculo de raio r .
2. Use uma integral tripla e substituições trigonométricas para determinar o volume da esfera de raio r .
3. Utilize uma integral quádrupla para determinar o hipervolume contido na hiperesfera $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ em \mathbb{R}^4 . (Use somente a substituição trigonométrica e a redução das fórmulas para $\int \sin^m x \, dx$ ou $\int \cos^m x \, dx$.)
4. Use uma integral n -upla para determinar o volume contido em uma hiperesfera de raio r no espaço n -dimensional \mathbb{R}^n . [Dica: as fórmulas para n par e para n ímpar são diferentes.]

15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Vimos na Seção 15.4 que algumas integrais duplas são mais simples de calcular usando coordenadas polares. Nesta seção, veremos que algumas integrais triplas são mais simples de calcular utilizando coordenadas polares ou esféricas.

Coordenadas Cilíndricas

Lembre-se da Seção 12.7 que as coordenadas cilíndricas de um ponto P eram (r, θ, z) , onde r , θ e z estão mostrados na Figura 1. Suponha que E seja uma região do tipo 1, cuja projeção D no plano xy tenha uma representação conveniente em coordenadas polares (veja a Figura 2). Em particular, suponha que f seja contínua e

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

onde D é dado em coordenadas polares por

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

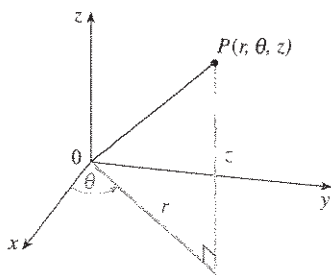


FIGURA 1

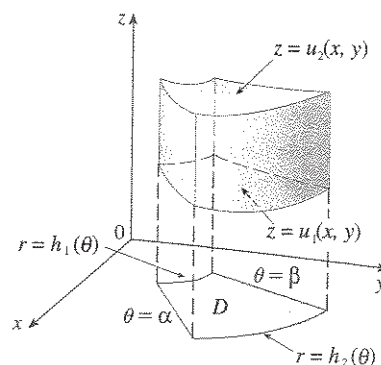


FIGURA 2

Sabemos da Equação 15.7.6 que

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

Mas também sabemos como calcular integrais duplas em coordenadas polares. De fato, combinando a Equação 1 com a Equação 15.4.3, obtemos

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

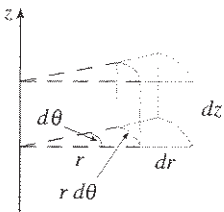


FIGURA 3

Elemento de volume em coordenadas cilíndricas: $dV = r dz dr d\theta$

A Fórmula 2 é a **fórmula para a integração tripla em coordenadas cilíndricas**. Ela nos diz que convertemos uma integral tripla em coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas escrevendo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e deixando z como está, utilizando os limites apropriados de integração para z , r e θ , e trocando dV por $r dz dr d\theta$. (A Figura 3 mostra como se lembrar disso.) É recomendável a utilização dessa fórmula quando E é uma região sólida cuja descrição é mais simples em coordenadas cilíndricas, e especialmente quando a função $f(x, y, z)$ envolve expressões $x^2 + y^2$.

EXEMPLO 1 ▮ Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ (veja a Figura 4). A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E .

SOLUÇÃO Em coordenadas cilíndricas o cilindro é $r = 1$ e o parabolóide é $z = 1 - r^2$, e podemos escrever

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$$

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z , a função densidade é

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

onde K é a constante de proporcionalidade. Portanto, da Fórmula 15.7.13, a massa de E é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr) r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2 [4 - (1 - r^2)] dr d\theta = K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4) dr \\ &= 2\pi K \left[r^3 + \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 ▮ Calcule $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$.

SOLUÇÃO Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região sólida

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}$$

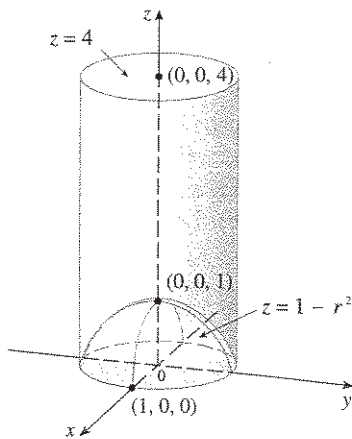


FIGURA 4

Sabemos da Equação 15.7.6 que

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

Mas também sabemos como calcular integrais duplas em coordenadas polares. De fato, combinando a Equação 1 com a Equação 15.4.3, obtemos

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

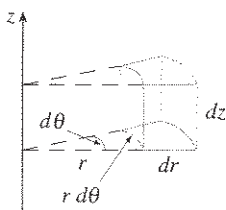


FIGURA 3

Elemento de volume em coordenadas cilíndricas: $dV = r dz dr d\theta$

A Fórmula 2 é a **fórmula para a integração tripla em coordenadas cilíndricas**. Ela nos diz que convertemos uma integral tripla em coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas escrevendo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e deixando z como está, utilizando os limites apropriados de integração para z , r e θ , e trocando dV por $r dz dr d\theta$. (A Figura 3 mostra como se lembrar disso.) É recomendável a utilização dessa fórmula quando E é uma região sólida cuja descrição é mais simples em coordenadas cilíndricas, e especialmente quando a função $f(x, y, z)$ envolve expressões $x^2 + y^2$.

EXEMPLO 1 = Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ (veja a Figura 4). A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E .

SOLUÇÃO Em coordenadas cilíndricas o cilindro é $r = 1$ e o parabolóide é $z = 1 - r^2$, e podemos escrever

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$$

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z , a função densidade é

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

onde K é a constante de proporcionalidade. Portanto, da Fórmula 15.7.13, a massa de E é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr) r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2 [4 - (1 - r^2)] dr d\theta = K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4) dr \\ &= 2\pi K \left[r^3 + \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 = Calcule $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$.

SOLUÇÃO Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região sólida

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}$$

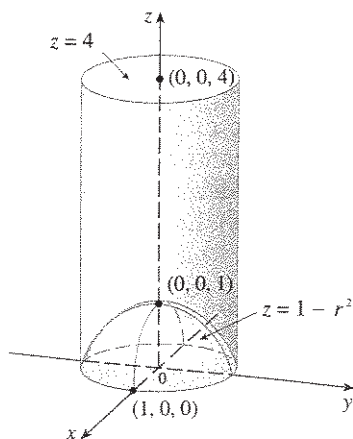


FIGURA 4

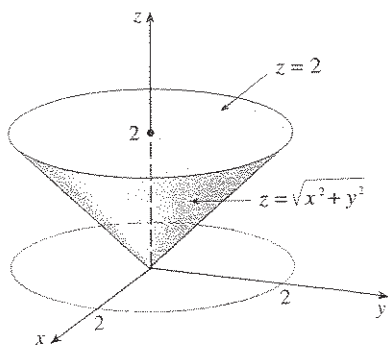


FIGURA 5

e a projeção de E sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$. A superfície inferior de E é o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e a superfície superior é o plano $z = 2$. Essa região tem uma descrição muito mais simples em coordenadas cilíndricas:

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2\}$$

Portanto temos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx &= \iiint_E (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^2 r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2-r) dr = 2\pi \left[\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{5}r^5 \right]_0^2 = \frac{16}{5}\pi \end{aligned}$$

Coordenadas Esféricas

Na Seção 12.7, definimos as coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) de um ponto (veja a Figura 6) e demonstramos as seguintes relações entre coordenadas retangulares e coordenadas esféricas:

$$\boxed{3} \quad x = \rho \cos \phi \cos \theta \quad y = \rho \cos \phi \sin \theta \quad z = \rho \sin \phi$$

Nesse sistema de coordenadas, o correspondente à caixa retangular é uma **cunha esférica**

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

onde $a \geq 0$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, e $d - c \leq \pi$. Apesar de termos definido as integrais triplas dividindo sólidos em pequenas caixas, podemos mostrar que, dividindo o sólido em pequenas cunhas esféricas, obtemos sempre o mesmo resultado. Assim, dividiremos E em pequenas cunhas esféricas E_{ijk} por meio de esferas igualmente espaçadas $\rho = \rho_i$, semiplanos $\theta = \theta_j$ e semicones $\phi = \phi_k$. A Figura 7 mostra que E_{ijk} é aproximadamente uma caixa retangular com dimensões $\Delta\rho$, $\rho_i \Delta\phi$ (arco de circunferência de raio ρ_i e ângulo $\Delta\phi$) e $\rho_i \sin\phi_k \Delta\theta$ (arco de circunferência de raio $\rho_i \sin\phi_k$ e ângulo $\Delta\theta$). Logo, uma aproximação do volume de E_{ijk} é dada por

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i \Delta\phi)(\rho_i \sin\phi_k \Delta\theta) = \rho_i^2 \sin\phi_k \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi$$

De fato, pode ser mostrado, com a ajuda do Teorema do Valor Médio (Exercício 39), que o valor exato do volume de E_{ijk} é dado por

$$\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \sin\tilde{\phi}_k \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi$$

onde $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k)$ é algum ponto do interior de E_{ijk} . Seja $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ as coordenadas retangulares desse ponto. Então

$$\begin{aligned} \iiint_E f(x, y, z) dV &= \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V_{ijk} \\ &= \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\tilde{\rho}_i \cos\tilde{\phi}_k \cos\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \cos\tilde{\phi}_k \sin\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \sin\tilde{\phi}_k) \tilde{\rho}_i^2 \sin\tilde{\phi}_k \Delta\rho_i \Delta\theta_j \Delta\phi_k \end{aligned}$$

Mas essa soma é uma soma de Riemann para a função

$$F(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \sin\phi f(\rho \cos\phi \cos\theta, \rho \cos\phi \sin\theta, \rho \sin\phi)$$

Conseqüentemente, chegamos à seguinte fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas:

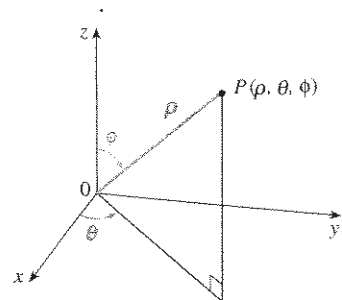


FIGURA 6

Coordenadas esféricas de P

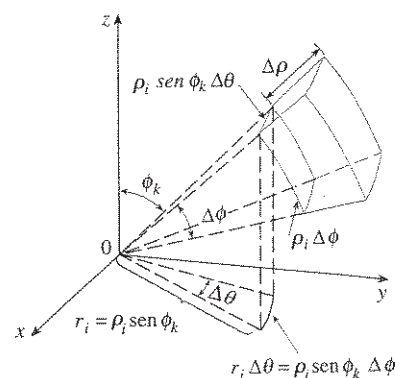


FIGURA 7

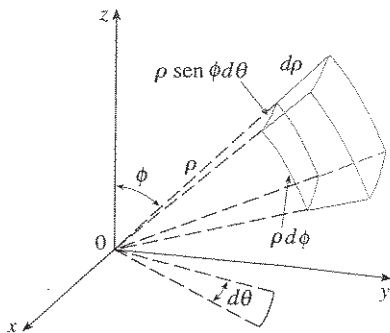


FIGURA 8

Elemento de volume em coordenadas esféricas:
 $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

4
$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

onde E é uma cunha esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

A Fórmula 4 nos diz que convertemos uma integral tripla de coordenadas retangulares para as coordenadas esféricas, escrevendo

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

utilizando os limites de integração apropriados e substituindo dV por $\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$. Isso é ilustrado na Figura 8.

Podemos esperar que essa fórmula inclua regiões esféricas mais gerais como

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d, g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

Nesse caso, a fórmula é a mesma que (4), exceto que os limites de integração para ρ são $g_1(\theta, \phi)$ e $g_2(\theta, \phi)$.

Normalmente as coordenadas esféricas são utilizadas nas integrais triplas quando superfícies como cones e esferas formam a fronteira da região de integração.

EXEMPLO 3 □ Calcule $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV$, onde B é a bola unitária:

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

SOLUÇÃO Como a fronteira de B é uma esfera, utilizaremos coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

Além disso, as coordenadas esféricas são convenientes, pois

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Então, (4) temos

$$\begin{aligned} \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} \, d\rho \\ &= [-\cos \phi]_0^\pi (2\pi) \left[\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \pi (e - 1) \quad \square \end{aligned}$$

NOTA □ Seria extremamente desvantajoso calcular a integral do Exemplo 3 sem coordenadas esféricas. Com coordenadas retangulares a integral iterada seria

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dz \, dy \, dx$$

EXEMPLO 4 Utilize as coordenadas esféricas para determinar o volume de um sólido que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ (veja a Figura 9).

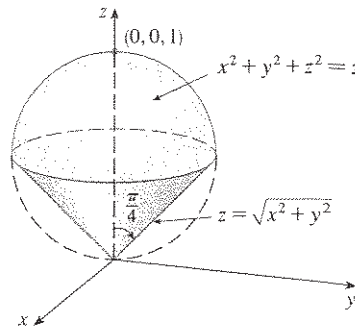


FIGURA 9

A Figura 10 mostra uma visão diferente (desta vez, utilizamos o MAPLE) do sólido do Exemplo 4.

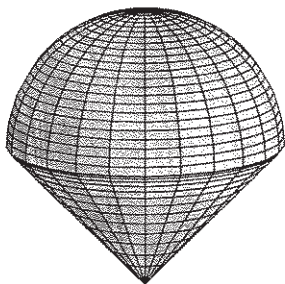


FIGURA 10

SOLUÇÃO Note que a esfera passa pela origem e tem centro em $(0, 0, \frac{1}{2})$. Escrevemos a equação da esfera em coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \quad \text{ou} \quad \rho = \cos \phi$$

A equação do cone pode ser escrita como

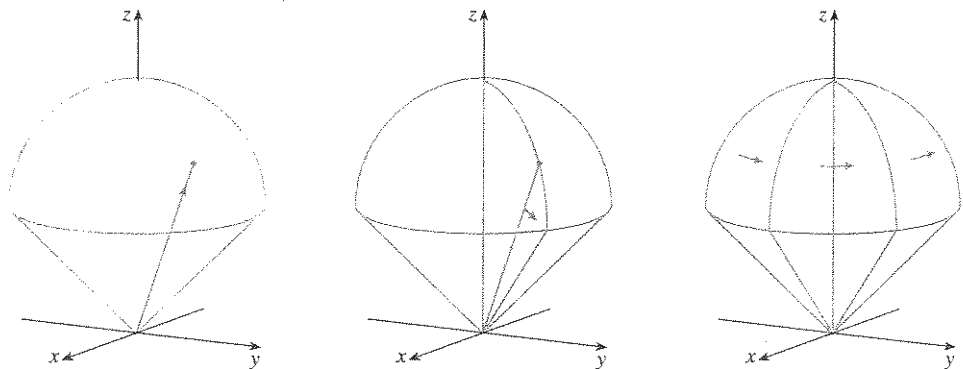
$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta} = \rho \sin \phi$$

Ou seja, $\sin \phi = \cos \phi$, ou $\phi = \pi/4$. Portanto a descrição do sólido E em coordenadas esféricas é

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq \cos \phi\}$$

A Figura 11 mostra como E é varrido se integramos primeiro em relação a ρ , depois em relação a ϕ , e então em relação a θ . O volume de E é

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=\cos \phi} d\phi \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \sin \phi \cos^3 \phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4 \phi}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$



ρ varia de 0 a $\cos \phi$, enquanto ϕ e θ ficam constantes.

ϕ varia de 0 a $\pi/4$, enquanto θ fica constante.

θ varia de 0 a 2π .

FIGURA 11

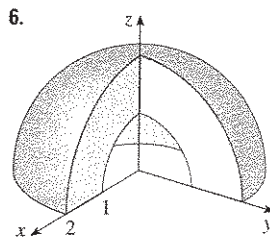
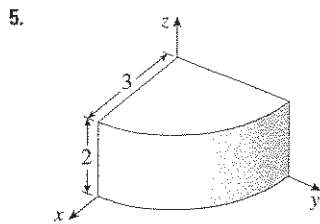
15.8 Exercícios

1–4 □ Faça o esboço do sólido cujo volume é dado pela integral e calcule essa integral.

1. $\int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_r^4 r \, dz \, d\theta \, dr$ 2. $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{9-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$

3. $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$ 4. $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

5–6 □ Estabeleça a integral tripla de uma função contínua arbitrária $f(x, y, z)$ em coordenadas cilíndricas ou esféricas sobre o sólido mostrado.



7–16 □ Utilize as coordenadas cilíndricas.

7. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$, onde E é a região contida dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.
8. Calcule $\iiint_E (x^3 + xy^2) \, dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.
9. Calcule $\iiint_E e^z \, dV$, onde E está delimitado pelo parabolóide $z = 1 + x^2 + y^2$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 5$ e pelo plano xy .
10. Calcule $\iiint_E x \, dV$, onde E está delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + 3$, pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.
11. Calcule $\iiint_E x^2 \, dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.
12. Determine o volume do sólido que está dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ como da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
13. (a) Ache o volume da região E limitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.
(b) Encontre o centróide do E (centro de massa no caso em que a densidade é constante).
14. (a) Determine o volume do sólido que o cilindro $r = a \cos \theta$ corta da esfera de raio a centrada na origem.
(b) Ilustre o sólido da parte (a) desenhando a esfera e o cilindro na mesma tela.
15. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ ($a > 0$) se S tem densidade constante K .

16. Determine a massa da bola B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ se a densidade em qualquer ponto for proporcional a sua distância ao eixo z .

17–28 □ Utilize as coordenadas esféricas.

17. Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$, onde B é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
 18. Calcule $\iiint_H (x^2 + y^2) \, dV$, onde H é a região hemisférica que está acima do plano xy e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 19. Calcule $\iiint_E z \, dV$, onde E está contido entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante.
 20. Calcule $\iiint_E e^{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dV$, onde E é delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no primeiro octante.
 21. Calcule $\iiint_E x^2 \, dV$, onde E é limitado pelo plano xz e os hemisférios $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ e $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$.
 22. Calcule $\iiint_E xyz \, dV$, onde E está entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$.
 23. Determine o volume do sólido que está acima do cone $\phi = \pi/3$ e abaixo da esfera $\rho = 4 \cos \phi$.
 24. Determine o volume do sólido que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
 25. Determine o centróide do sólido do Exercício 21.
 26. Seja H um hemisfério sólido de raio a cuja densidade em qualquer ponto é proporcional à distância ao centro da base.
(a) Determine a massa de H .
(b) Determine o centro de massa de H .
(c) Determine o momento de inércia de H em relação a seu eixo.
 27. (a) Determine o centróide do hemisfério sólido homogêneo de raio a .
(b) Determine o momento de inércia do sólido da parte (a) em relação ao diâmetro de sua base.
 28. Determine a massa e o centro de massa do hemisfério sólido de raio a se a densidade em qualquer ponto for proporcional a sua distância à base.
- 29–32 □ Dentre as coordenadas cilíndricas ou esféricas, utilize a que lhe parecer mais apropriada.
29. Determine o volume e o centróide do sólido E que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 30. Determine o volume da menor cunha esférica de uma esfera de raio a cortada por dois planos que se interceptam ao longo de um diâmetro com um ângulo de $\pi/6$.

31. Calcule $\iiint_E z \, dV$, onde E está acima do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do plano $z = 2y$. Utilize a Tabela de Integrais (veja a *contracapa*) ou um sistema computacional algébrico para calcular a integral.

32. (a) Determine o volume contido pelo toro $\rho = \text{sen } \phi$.
 (b) Utilize um computador para desenhar o toro.

33-34 □ Calcule a integral, transformando para coordenadas cilíndricas.

33. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{3/2} \, dz \, dy \, dx$

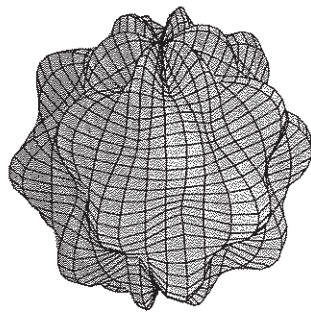
34. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz \, dz \, dx \, dy$

35-36 □ Calcule a integral, transformando para coordenadas esféricas.

35. $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz \, dy \, dx$

36. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dx \, dy$

37. No Projeto de Laboratório do Capítulo 12, investigamos a família de superfícies $\rho = 1 + \frac{1}{5} \text{sen } m\theta \text{sen } n\phi$ que foram usadas para modelar tumores. A "esfera rugosa" com $m = 6$ e $n = 5$ está mostrada. Utilize um sistema de computação algébrica para determinar seu volume.



38. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2+y^2+z^2)} \, dx \, dy \, dz = 2\pi$$

(A integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio aumenta indefinidamente.)

39. (a) Utilize coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado por cima pela esfera $r^2 + z^2 = a^2$ e por baixo pelo cone $z = \text{cotg } \phi_0$ (ou $\phi = \phi_0$), onde $0 < \phi_0 < \pi/2$, é

$$V = \frac{2\pi a^3}{3} (1 - \cos \phi_0)$$

(b) Deduza que o volume da cunha esférica dada por $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ é

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

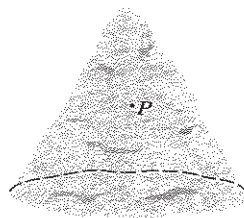
(c) Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que o volume da parte (b) pode ser escrito como

$$\Delta V = \bar{\rho}^2 \text{sen } \bar{\phi} \, \Delta \rho \, \Delta \theta \, \Delta \phi$$

onde $\bar{\rho}$ está entre ρ_1 e ρ_2 , $\bar{\phi}$ está entre ϕ_1 e ϕ_2 , $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$, e $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$.

40. Quando estudam a formação de cordilheiras, os geólogos estimam a quantidade de trabalho requerida para levantar uma montanha do nível do mar. Considere uma montanha que tem essencialmente o formato de um cone reto circular. Suponha que a densidade de peso do material na vizinhança de um ponto P é $g(P)$ e a altura é $h(P)$.

- (a) Determine a integral definida que representa o trabalho total exercido para formar a montanha.
- (b) Assuma que o monte Fuji no Japão tem o formato de um cone circular reto com raio de 62.000 pés, altura de 12.400 pés e densidade constante de 200 lb/pé³. Quanto trabalho teria sido exercido para formar o monte Fuji se a terra estivesse inicialmente ao nível do mar?

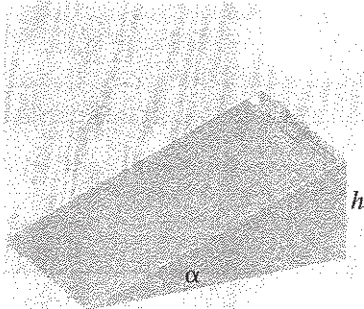


Projeto Aplicado

Corrida na Rampa

Suponha que uma bola sólida (de gude), uma bola oca (de squash), um cilindro sólido (uma barra de aço) e um cilindro oco (um cano de chumbo) rolem em um plano inclinado. Qual desses objetos chegará mais depressa embaixo? (Dê seu palpite antes de continuar.)

Para responder a essa questão, consideramos a bola ou o cilindro com massa m , raio r e momento de inércia I (em relação ao eixo de rotação). Se a queda vertical for h , a energia potencial no topo será mgh . Suponha que o objeto chegue embaixo com velocidade v e velocidade angular ω , e assim $v = \omega r$.



A energia cinética na base da rampa consiste em duas partes: $\frac{1}{2}mv^2$ da translação (movimento de descida da rampa) e $\frac{1}{2}I\omega^2$ da rotação. Se supusermos que a perda de energia por atrito na descida seja desprezível, então a lei de conservação de energia nos dá:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

1. Mostre que

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + I^*} \quad \text{onde } I^* = \frac{I}{mr^2}$$

2. Se $y(t)$ é a distância vertical percorrida até o instante t , então as mesmas razões utilizadas no Problema 1 mostram que $v^2 = 2gy/(1 + I^*)$ a qualquer instante t . Utilize esse resultado para mostrar que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1 + I^*}} (\sin \alpha) \sqrt{y}$$

onde α é o ângulo de inclinação da rampa.

3. Resolvendo a equação diferencial do Problema 2, mostre que o tempo total de percurso é

$$T = \sqrt{\frac{2h(1 + I^*)}{g \sin^2 \alpha}}$$

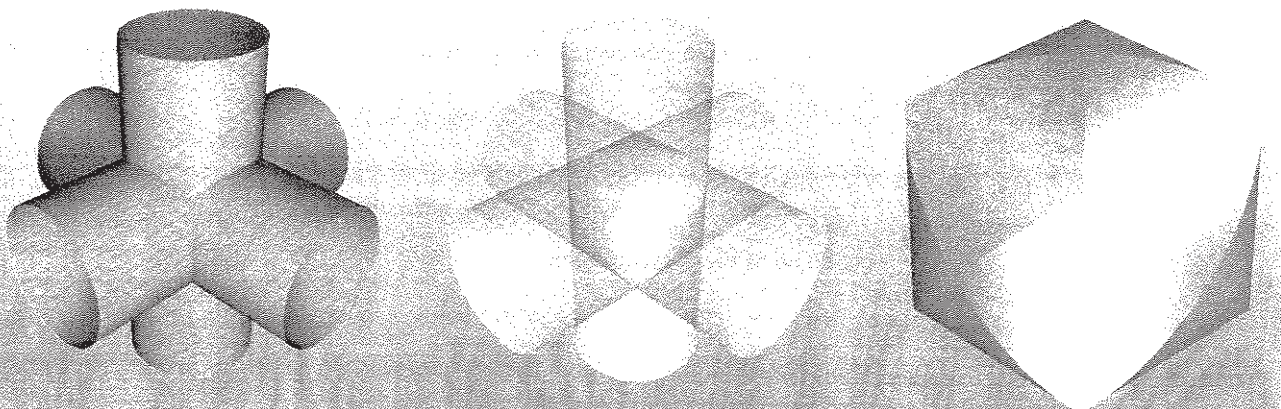
Isso mostra que o objeto com menor I^* ganha a corrida.

4. Mostre que $I^* = \frac{1}{2}$ para o cilindro sólido e $I^* = 1$ para o cilindro oco.
 5. Calcule I^* para a bola parcialmente oca com raio interior a e raio externo r . Expresse sua resposta em termos do coeficiente $b = a/r$. O que acontece quando $a \rightarrow 0$ e quando $a \rightarrow r$?
 6. Mostre que $I^* = \frac{2}{5}$ para a bola sólida e $I^* = \frac{2}{3}$ para a bola oca. Assim, os objetos terminam a corrida na seguinte ordem: bola sólida, cilindro sólido, bola oca, cilindro oco.

Projeto Descoberta

A Interseção de Três Cilindros

A figura mostra o sólido formado por três cilindros circulares com mesmo diâmetro que se interceptam em ângulo reto. Neste projeto vamos calcular seu volume e determinar como sua forma varia quando os cilindros têm diâmetros diferentes.



1. Esboce cuidadosamente o sólido contido nos três cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$. Indique a posição dos eixos coordenados e identifique as faces com as equações dos cilindros correspondentes.

2. Determine o volume do sólido do Problema 1.
3. Utilize um sistema computacional algébrico para desenhar as arestas do sólido.
4. O que aconteceria ao sólido do Problema 1 se o raio do primeiro cilindro fosse diferente de 1? Ilustre com um desenho à mão livre ou com um gráfico no computador.
5. Se o primeiro cilindro for $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a < 1$, estabeleça, mas não calcule, uma integral dupla que forneça o volume do sólido. E se $a > 1$?

15.9 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Em cálculo unidimensional, freqüentemente usamos a mudança de variável (uma substituição) para simplificar uma integral. Revertendo os papéis de x e u , podemos escrever a Regra da Substituição (5.5.6, dada no Capítulo 5 do Volume I) como

$$\boxed{1} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u))g'(u) du$$

onde $x = g(u)$ e $a = g(c)$, $b = g(d)$. Outro modo de escrever a Fórmula 1 é a seguinte:

$$\boxed{2} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(x(u)) \frac{dx}{du} du$$

Uma mudança de variáveis pode também ser útil em integrais duplas. Já vimos um exemplo disso: a conversão para as coordenadas polares. As novas variáveis r e θ estão relacionadas às velhas variáveis x e y pelas equações

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

e a fórmula de mudança de variáveis (15.4.2) pode ser escrita como

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

onde S é a região no plano $r\theta$ que corresponde à região R no plano xy .

Genericamente, consideremos uma mudança de variável dada pela **transformação** T do plano uv no plano xy :

$$T(u, v) = (x, y)$$

onde x e y estão relacionados com u e v pelas equações

$$\boxed{3} \quad x = g(u, v) \quad y = h(u, v)$$

ou, como às vezes escrevemos,

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v)$$

Vamos admitir que T seja uma **transformação** C^1 , o que significa que g e h têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

Uma transformação T é de fato somente uma função cujo domínio e imagem são ambos subconjuntos de \mathbb{R}^2 . Se $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$, então o ponto (x_1, y_1) é denominado **imagem** do ponto (u_1, v_1) . Se não existem dois pontos com a mesma imagem, T é

chamada **um a um**. A Figura 1 mostra o efeito de uma transformação T em uma região S do plano uv . T transforma S em uma região R no plano xy denominada **imagem de S** , constituída das imagens de todos os pontos de S .

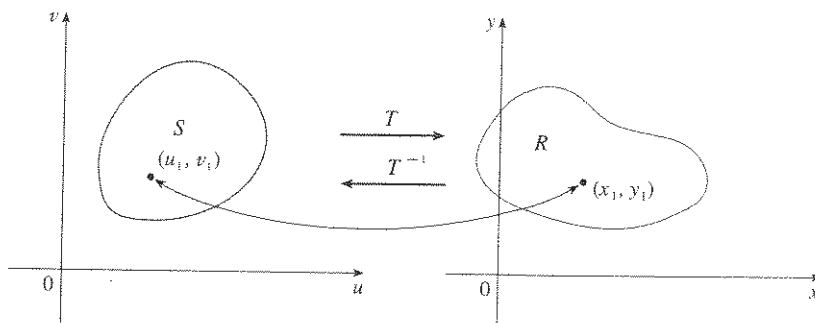


FIGURA 1

Se T é um a um, então existe uma **transformação inversa** T^{-1} do plano xy para o plano uv e é possível resolver as Equações 3 para u e v em termos de x e y :

$$u = G(x, y) \quad v = H(x, y)$$

EXEMPLO 1 □ Uma transformação é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \quad y = 2uv$$

Determine a imagem do quadrado $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.

SOLUÇÃO A transformação leva a fronteira de S na fronteira da imagem. Assim, começamos por determinar a imagem dos lados de S . O primeiro lado, S_1 , é dado por $v = 0$ ($0 \leq u \leq 1$) (veja a Figura 2). Das equações dadas, temos $x = u^2$, $y = 0$, e portanto $0 \leq x \leq 1$. Então, S_1 é mapeado no segmento de reta que liga $(0, 0)$ a $(1, 0)$ no plano xy . O segundo lado, S_2 , é $u = 1$ ($0 \leq v \leq 1$) e, substituindo $u = 1$ nas equações dadas, temos

$$x = 1 - v^2 \quad y = 2v$$

Eliminando v , obtemos

$$\boxed{4} \quad x = 1 - \frac{y^2}{4} \quad 0 \leq x \leq 1$$

que é parte de uma parábola. Da mesma forma, S_3 é dado por $v = 1$ ($0 \leq u \leq 1$), cuja imagem é o arco parabólico

$$\boxed{5} \quad x = \frac{y^2}{4} - 1 \quad -1 \leq x \leq 0$$

Finalmente, S_4 é dado por $u = 0$ ($0 \leq v \leq 1$), cuja imagem é $x = -v^2$, $y = 0$, ou seja, $-1 \leq x \leq 0$. (Note que quando nos movemos ao redor do quadrado no sentido anti-horário, também nos movemos ao redor da região parabólica no sentido anti-horário.) A imagem de S é a região R (mostrada na Figura 2) limitada pelo eixo x e pelas parábolas dadas pelas Equações 4 e 5.

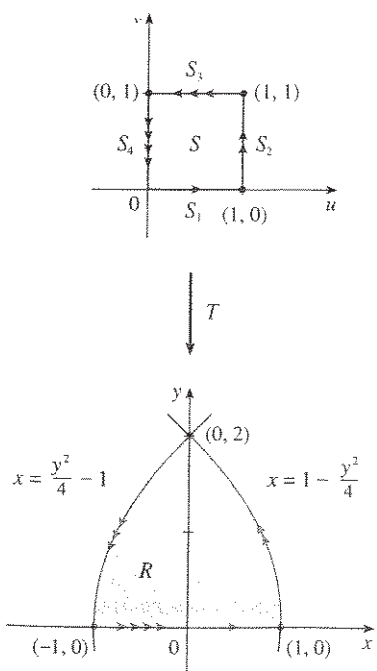


FIGURA 2

Agora vamos ver como a mudança de variáveis afeta a integral dupla. Começemos com um retângulo pequeno S no plano uv cujo canto inferior esquerdo é o ponto (u_0, v_0) e cujas dimensões são Δu e Δv (veja a Figura 3).

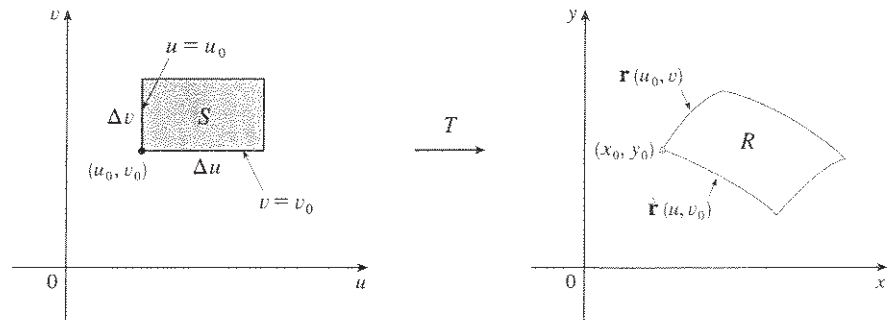


FIGURA 3

A imagem de S é a região R do plano xy , onde em um dos pontos da fronteira está $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. O vetor

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v)\mathbf{i} + h(u, v)\mathbf{j}$$

é o vetor de posição da imagem do ponto (u, v) . A equação do lado inferior de S é $v = v_0$, cuja curva imagem é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v_0)$. O vetor tangente em (x_0, y_0) a essa curva imagem é

$$\mathbf{r}_u = g_u(u_0, v_0)\mathbf{i} + h_u(u_0, v_0)\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}$$

Da mesma forma, o vetor tangente em (x_0, y_0) à curva imagem do lado esquerdo de S ($u = u_0$) é

$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0, v_0)\mathbf{i} + h_v(u_0, v_0)\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}$$

Podemos aproximar a região imagem $R = T(S)$ pelo paralelogramo determinado pelos vetores secantes

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

mostrados na Figura 4. Mas

$$\mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

e então

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u \mathbf{r}_u$$

Da mesma forma

$$\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v \mathbf{r}_v$$

Isso significa que podemos aproximar R por um paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u \mathbf{r}_u$ e $\Delta v \mathbf{r}_v$ (veja a Figura 5). Portanto podemos aproximar a área de R pela área desse paralelogramo, que da Seção 12.4 é

$$\boxed{6} \quad |(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

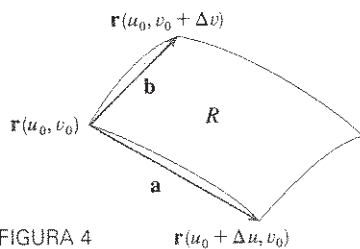


FIGURA 4

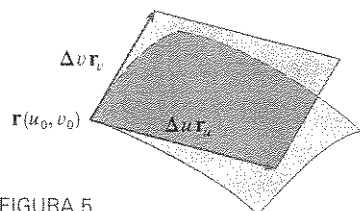


FIGURA 5

Calculando o produto vetorial, obtemos

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

O determinante que aparece nesse cálculo é chamado *jacobiano* da transformação e tem uma notação especial:

O jacobiano recebeu esse nome em homenagem ao matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Apesar de o matemático francês Cauchy ter usado esse determinante especial envolvendo derivadas parciais antes, Jacobi usou-os no método para calcular as integrais múltiplas.

7 Definição O **jacobiano** da transformação T dada por $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Com essa notação podemos utilizar a Equação 6 para obter uma aproximação da área ΔA de R :

$$\text{8} \quad \Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$$

onde o jacobiano é calculado em (u_0, v_0) .

Em seguida dividimos a região S do plano uv em retângulos S_{ij} e chamamos suas imagens no plano xy de R_{ij} (veja a Figura 6).

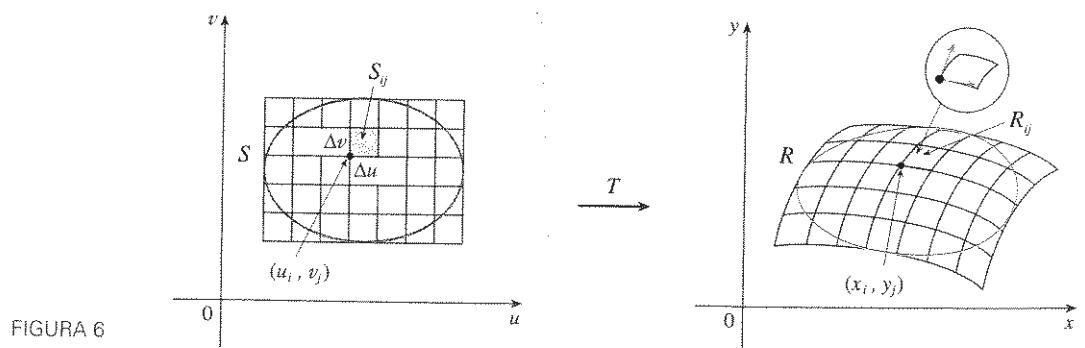


FIGURA 6

Aplicando a aproximação (8) a cada R_{ij} , aproximamos a integral dupla de f sobre R como se segue:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dA &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A \\ &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v \end{aligned}$$

onde o jacobiano é calculado em (u_i, v_j) . Note que a soma dupla é a soma de Riemann para a integral

$$\iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

A argumentação precedente sugere que o seguinte teorema seja verdadeiro. (Uma prova completa é dada em livros de cálculo avançado.)

9 Mudança de Variáveis em uma Integral Dupla Suponha que T seja uma transformação C^1 cujo jacobiano seja não nulo e leve uma região S do plano uv para uma região R do plano xy . Suponha que f seja contínua sobre R e que R e S sejam regiões planas do tipo I ou II. Suponha ainda que T seja um a um, exceto possivelmente nos pontos de fronteira de S . Então

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

O Teorema 9 diz que mudamos de uma integral em x e y para uma integral em u e v escrevendo x e y em termos de u e v e escrevendo

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Note a semelhança entre o Teorema 9 e a fórmula unidimensional da Equação 2. Em vez da derivada dx/du , temos o valor absoluto do jacobiano, ou seja, $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$.

Como primeira ilustração do Teorema 9, vamos mostrar que a fórmula de integração em coordenadas polares é um caso especial desta. Aqui a transformação T do plano $r\theta$ para o plano xy é dada por

$$x = g(r, \theta) = r \cos \theta \quad y = h(r, \theta) = r \sin \theta$$

e a geometria das transformações é mostrada na Figura 7. T mapeia um retângulo ordinário do plano $r\theta$ no retângulo polar do plano xy . O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r > 0$$

Logo, o Teorema 9 nos leva a

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

que é o mesmo que a Fórmula 15.4.2.

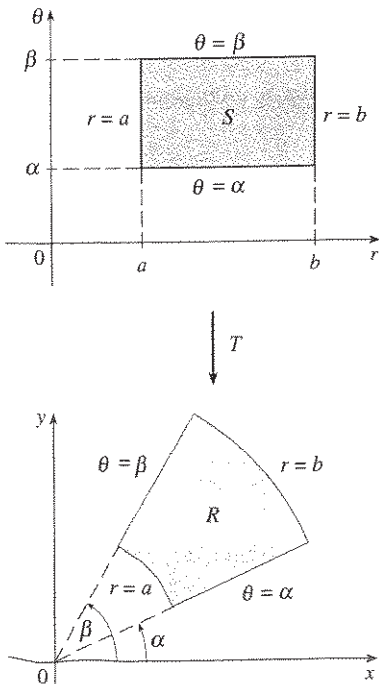


FIGURA 7 Transformação para as coordenadas polares

EXEMPLO 2 □ Utilize a mudança de variáveis $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, para calcular a integral $\iint_R y \, dA$, onde R é a região limitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$ e $y^2 = 4 + 4x$.

SOLUÇÃO A região R está mostrada na Figura 2. No Exemplo 1 descobrimos que $T(S) = R$, onde S é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. De fato, a razão que nos levou a fazer a mudança de variável para calcular a integral é que S é uma região muito mais simples que R . Vamos calcular o jacobiano:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Portanto, pelo Teorema 9,

$$\begin{aligned} \iint_R y \, dA &= \iint_S 2uv \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA = \int_0^1 \int_0^1 (2uv)4(u^2 + v^2) \, du \, dv \\ &= 8 \int_0^1 \int_0^1 (u^3v + uv^3) \, du \, dv = 8 \int_0^1 \left[\frac{1}{4}u^4v + \frac{1}{2}u^2v^3 \right]_{u=0}^{u=1} dv \\ &= \int_0^1 (2v + 4v^3) \, dv = [v^2 + v^4]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

NOTA □ O Exemplo 2 não foi um problema muito difícil de resolver porque já conhecíamos uma mudança de variáveis apropriada. Se não a conhecêssemos de antemão, então o primeiro passo seria descobrir uma mudança de variáveis apropriada. Se $f(x, y)$ é difícil de integrar, então a forma de $f(x, y)$ pode sugerir uma transformação. Se a região de integração R é desajeitada, então a transformação deve ser escolhida para que a região S correspondente no plano uv tenha uma descrição mais conveniente.

EXEMPLO 3 □ Calcule a integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)} \, dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ e $(0, -1)$.

SOLUÇÃO Como não é fácil integrar $e^{(x+y)/(x-y)}$, vamos fazer a mudança de variáveis sugerida pela forma da função:

$$\boxed{10} \quad u = x + y \quad v = x - y$$

Essas equações definem a transformação T^{-1} do plano xy para o plano uv . O Teorema 9 diz respeito à transformação T do plano uv para o plano xy . Esta é obtida resolvendo-se as Equações 10 para x e y :

$$\boxed{11} \quad x = \frac{1}{2}(u + v) \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$$

O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

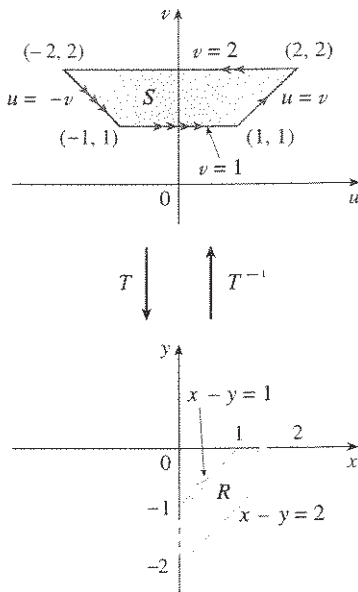


FIGURA 8

Para determinar a região S do plano uv correspondente a R , notamos que os lados de R estão sobre as retas

$$y = 0 \quad x - y = 2 \quad x = 0 \quad x - y = 1$$

e das Equações 10 ou 11 as retas imagem do plano uv são

$$u = v \quad v = 2 \quad u = -v \quad v = 1$$

Então, a região S é a região trapezoidal com vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$ e $(-1, 1)$ mostrada na Figura 8. Como

$$S = \{(u, v) \mid 1 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}$$

o Teorema 9 leva a

$$\begin{aligned} \iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA &= \iint_S e^{u/v} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \int_1^2 \int_{-v}^v e^{u/v} \left(\frac{1}{2}\right) du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 [ve^{u/v}]_{u=-v}^{u=v} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (e - e^{-1})v dv = \frac{3}{4}(e - e^{-1}) \end{aligned}$$

Integrais Triplas

Existe uma fórmula de mudança de variáveis semelhante para as integrais triplas. Seja T a transformação que leva uma região S no espaço uvw para uma região R no espaço xyz por meio das equações

$$x = g(u, v, w) \quad y = h(u, v, w) \quad z = k(u, v, w)$$

O **Jacobiano** de T é o seguinte determinante 3×3 :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (12)$$

Das hipóteses semelhantes àsquelas do Teorema 9, temos a seguinte fórmula para integrais triplas:

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \quad (13)$$

EXEMPLO 4 □ Utilize a Fórmula 13 para deduzir a fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas.

SOLUÇÃO Aqui a mudança de variáveis é dada por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

Calculamos o jacobiano como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} \\ &= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \end{vmatrix} - \rho \operatorname{sen} \phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \cos \phi (-\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen}^2 \theta - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos^2 \theta) \\ &\quad - \rho \operatorname{sen} \phi (\rho \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta) \\ &= -\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen}^2 \phi = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

Como $0 \leq \phi \leq \pi$, temos $\operatorname{sen} \phi \geq 0$. Portanto

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = |-\rho^2 \operatorname{sen} \phi| = \rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

e a Fórmula 13 nos dá

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dV = \iiint_S f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

que equivale à Fórmula 15.8.4.

15.9 Exercícios

1-6 □ Determine o jacobiano da transformação.

1. $x = u + 4v, \quad y = 3u - 2v$

2. $x = u^2 - v^2, \quad y = u^2 + v^2$

3. $x = \frac{u}{u+v}, \quad y = \frac{v}{u-v}$

4. $x = \alpha \operatorname{sen} \beta, \quad y = \alpha \cos \beta$

5. $x = uv, \quad y = vw, \quad z = uw$

6. $x = e^{u-v}, \quad y = e^{u+v}, \quad z = e^{u+v+w}$

7-10 □ Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

7. $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\};$
 $x = 2u + 3v, \quad y = u - v$

8. S é o quadrado limitado pelas retas $u = 0, u = 1, v = 0,$
 $v = 1; \quad x = v, \quad y = u(1 + v^2)$

9. S é a região triangular com vértices $(0, 0), (1, 1), (0, 1);$
 $x = u^2, \quad y = v$

10. S é o disco dado por $u^2 + v^2 \leq 1; \quad x = au, \quad y = bv$

11-16 □ Utilize a transformação dada para calcular a integral.

11. $\iint_R (x - 3y) \, dA$, onde R é a região triangular de vértices
 $(0, 0), (2, 1),$ e $(1, 2); \quad x = 2u + v, \quad y = u + 2v$

12. $\iint_R (4x + 8y) \, dA$, onde R é o paralelogramo com vértices
 $(-1, 3), (1, -3), (3, -1),$ e $(1, 5);$
 $x = \frac{1}{4}(u + v), \quad y = \frac{1}{4}(v - 3u)$

13. $\iint_R x^2 \, dA$, onde R é a região limitada pela elipse
 $9x^2 + 4y^2 = 36; \quad x = 2u, \quad y = 3v$

14. $\iint_R (x^2 - xy + y^2) \, dA$, onde R é a região limitada pela
 elipse $x^2 - xy + y^2 = 2;$
 $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v, \quad y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$

15. $\iint_R xy \, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada
 pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e pelas hipérbolas $xy = 1, xy = 3;$
 $x = u/v, \quad y = v$

16. $\iint_R y^2 dA$, onde R é a região limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$; $u = xy$, $v = xy^2$. Ilustre utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar R .
17. (a) Calcule $\iiint_E dV$, onde E é o sólido contido pelo elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Utilize a transformação $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.
- (b) A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação os pólos foram achatados. Assim, seu formato pode ser aproximado por um elipsóide com $a = b = 6378$ km e $c = 6356$ km. Use o item (a) para estimar o volume da Terra.
18. Calcule $\iiint_E x^2 y dV$, onde E é o sólido do Exercício 17(a).

19-23 □ Calcule a integral, fazendo uma mudança de variáveis apropriada.

19. $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y} dA$, onde R é o paralelogramo delimitado pelas retas $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$, e $3x-y=8$

20. $\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2} dA$, onde R é o retângulo delimitado pelas retas $x-y=0$, $x-y=2$, $x+y=0$ e $x+y=3$
21. $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, 1)$
22. $\iint_R \sin(9x^2 + 4y^2) dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$
23. $\iint_R e^{x+y} dA$, onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leq 1$
24. Seja f uma função contínua sobre $[0, 1]$ e seja R a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Mostre que

$$\iint_R f(x+y) dA = \int_0^1 uf(u) du$$

15 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

- Suponha que f seja uma função contínua definida sobre um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$.
 - Escreva uma expressão para a soma dupla de Riemann de f . Se $f(x, y) \geq 0$, o que essa soma representa?
 - Escreva a definição de $\iint_R f(x, y) dA$ como um limite.
 - Qual é a interpretação geométrica de $\iint_R f(x, y) dA$ se $f(x, y) \geq 0$? E se f tiver valores positivos e valores negativos?
 - Como calcular $\iint_R f(x, y) dA$?
 - O que a Regra do Ponto Médio para as integrais duplas diz?
 - Escreva uma expressão para o valor médio de f .
- Como você define $\iint_D f(x, y) dA$ se D é uma região limitada que não é retangular?
 - O que é uma região do tipo I? Como calcular $\iint_D f(x, y) dA$ se D for uma região do tipo I?
 - O que é uma região do tipo II? Como calcular $\iint_D f(x, y) dA$ se D for uma região do tipo II?
 - Quais as propriedades de uma integral dupla?
- Como transformar uma integral dupla em coordenadas retangulares para uma integral em coordenadas polares? Por que você faria isso?
- Se uma lâmina ocupa uma região plana D e tem densidade $\rho(x, y)$, escreva expressões para cada um dos seguintes itens em termos de integral dupla.
 - A massa
 - Os momentos em relação aos eixos
 - O centro de massa
 - Os momentos de inércia em relação aos eixos e à origem
- Seja f uma função densidade conjunta de um par de variáveis aleatórias X e Y .
 - Escreva uma integral dupla que represente a probabilidade de X estar entre a e b e Y estar entre c e d .
 - Que propriedades f possui?
 - Quais são os valores esperados de X e Y ?
- Escreva uma expressão para a área de uma superfície com a equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.
- Escreva a definição da integral tripla sobre uma caixa retangular B .
 - Como calcular $\iiint_B f(x, y, z) dV$?
 - Como definir $\iiint_E f(x, y, z) dV$ se E for uma região sólida limitada diferente de uma caixa retangular?
 - O que é uma região sólida do tipo 1? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z) dV$ se E for tal região?
 - O que é uma região sólida do tipo 2? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z) dV$ se E for tal região?
 - O que é uma região sólida do tipo 3? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z) dV$ se E for tal região?
- Suponha que um objeto sólido ocupe uma região E e tenha função densidade $\rho(x, y, z)$. Escreva expressões para cada um dos seguintes itens.
 - A massa

- (b) Os momentos em relação aos planos coordenados
 - (c) As coordenadas do centro de massa
 - (d) Os momentos de inércia em relação aos eixos
9. (a) Como, em uma integral tripla, trocar de coordenadas retangulares para cilíndricas?
 (b) Como, em uma integral tripla, trocar de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas?

- (c) Em que situações você deve trocar para coordenadas cilíndricas ou esféricas?
10. (a) Se uma transformação T é dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, qual é o jacobiano de T ?
 (b) Como você muda de variáveis em uma integral dupla?
 (c) Como você muda de variáveis em uma integral tripla?

TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se são falsas ou verdadeiras as seguintes afirmações. Se verdadeiras, explique por quê. Se falsa, explique por que ou dê um contra-exemplo.

1. $\int_{-1}^2 \int_0^6 x^2 \sin(x - y) dx dy = \int_0^6 \int_{-1}^2 x^2 \sin(x - y) dy dx$
2. $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{x + y^2} dy dx = \int_0^x \int_0^1 \sqrt{x + y^2} dx dy$
3. $\int_1^2 \int_3^4 x^2 e^y dy dx = \int_1^2 x^2 dx \int_3^4 e^y dy$
4. $\int_{-1}^1 \int_0^1 e^{x^2+y^2} \sin y dx dy = 0$

5. Se D é um disco dado por $x^2 + y^2 \leq 4$, então

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dA = \frac{16}{3} \pi$$

6. $\int_1^4 \int_0^1 (x^2 + \sqrt{y}) \sin(x^2 y^2) dx dy \leq 9$
 7. 5. A integral

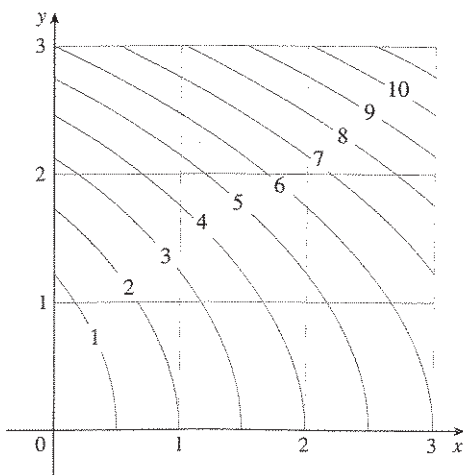
$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 dz dr d\theta$$

representa um volume contido pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 2$.

8. A integral $\iiint_E kr^3 dz dr d\theta$ representa o momento de inércia em torno do eixo z de um sólido E com densidade constante k .

EXERCÍCIOS

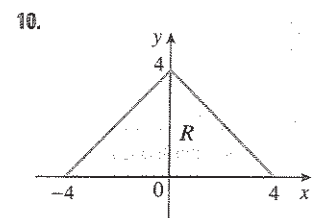
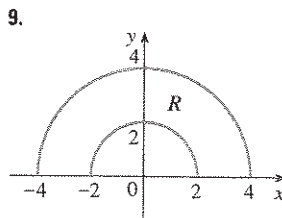
1. A figura mostra um mapa de contornos de uma função f sobre o quadrado $R = [0, 3] \times [0, 3]$. Utilize a soma de Riemann com nove termos para estimar o valor de $\iint_R f(x, y) dA$. Tome os pontos amostra como sendo o canto superior direito dos quadrados.



2. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar a integral do Exercício 1.
 3-8 □ Calcule a integral iterada.
 3. $\int_1^2 \int_0^2 (y + 2xe^y) dx dy$ 4. $\int_0^1 \int_0^1 ye^{xy} dx dy$

5. $\int_0^1 \int_0^x \cos(x^2) dy dx$ 6. $\int_0^1 \int_x^{e^x} 3xy^2 dy dx$
 7. $\int_0^\pi \int_0^1 \int_{1-y}^{1-y^2} y \sin x dz dy dx$ 8. $\int_0^1 \int_0^y \int_x^1 6xyz dz dx dy$

9-10 □ Escreva $\iint_R f(x, y) dA$ como uma integral iterada, onde R é a região mostrada e f é uma função arbitrária contínua em R .



11. Descreva a região cuja área é dada pela integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sec 2\theta} r dr d\theta$$

12. Descreva o sólido cujo volume é dado pela integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

e calcule essa integral.

13-14 □ Calcule a integral iterada primeiro invertendo a ordem de integração.

13. $\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2) dy dx$ 14. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{ye^{x^2}}{x^3} dx dy$

15-28 □ Calcule o valor da integral múltipla.

- 15. $\iint_R ye^{xy} dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$
- 16. $\iint_D xy dA$, onde $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y + 2\}$
- 17. $\iint_D \frac{y}{1+x^2} dA$, onde D é limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$
- 18. $\iint_D \frac{1}{1+x^2} dA$, onde D é a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, e $(0, 1)$
- 19. $\iint_D y dA$, onde D é a região no primeiro quadrante limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x = 8 - y^2$
- 20. $\iint_D y dA$, onde D é a região do primeiro quadrante que está acima da hipérbole $xy = 1$ e da reta $y = x$ e abaixo da reta $y = 2$
- 21. $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dA$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = 0$ e $y = \sqrt{3}x$ e pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$
- 22. $\iint_D x dA$, onde D é a região no primeiro quadrante que se encontra entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$
- 23. $\iiint_E xy dV$, onde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x + y\}$
- 24. $\iiint_T xy dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices em $(0, 0, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$
- 25. $\iiint_E y^2 z^2 dV$, onde E é limitado pelo parabolóide $x = 1 - y^2 - z^2$ e pelo plano $x = 0$
- 26. $\iiint_E z dV$, onde E é limitado pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$ e pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ no primeiro octante
- 27. $\iiint_E yz dV$, onde E está acima do plano $z = 0$, abaixo do plano $z = y$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$
- 28. $\iiint_H z^3 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$, onde H é o hemisfério sólido com centro na origem e raio 1, que está acima do plano xy

29-34 □ Determine o volume do sólido dado.

- 29. Abaixo do parabolóide $z = x^2 + 4y^2$ e acima do retângulo $R = [0, 2] \times [1, 4]$
- 30. Abaixo da superfície $z = x^2 y$ e acima do triângulo do plano xy com vértices $(1, 0)$, $(2, 1)$ e $(4, 0)$
- 31. O tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$ e $(2, 2, 0)$
- 32. Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 3$

33. Da cunha obtida pelo corte do cilindro $x^2 + 9y^2 = a^2$ pelos planos $z = 0$ e $z = mx$

34. Acima do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do semicone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

35. Considere uma lâmina que ocupa, no primeiro quadrante, a região D limitada pela parábola $x = 1 - y^2$ e pelos eixos coordenados, com função densidade $\rho(x, y) = y$.
 (a) Determine a massa da lâmina.
 (b) Determine o centro de massa.
 (c) Determine os momentos de inércia e raio de rotação em relação aos eixos x e y .

36. Uma lâmina ocupa a parte do disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ que está no primeiro quadrante.
 (a) Determine o centróide da lâmina.
 (b) Determine o centro de massa da lâmina se a função densidade for $\rho(x, y) = xy^2$.

37. (a) Determine o centróide de um cone circular reto com altura h e raio da base a . (Coloque o cone de forma que a base esteja sobre o plano xy com o centro na origem e seu eixo esteja sobre o eixo z .)
 (b) Determine o momento de inércia do cone em relação a seu eixo (eixo z).

38. Determine a área da parte do cone $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

39. Determine a área da parte da superfície $z = x^2 + y$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$.

40. Trace o gráfico da superfície $z = x \operatorname{sen} y$, $-3 \leq x \leq 3$, $-\pi \leq y \leq \pi$, e determine sua área com precisão até a quarta casa decimal.

41. Utilize coordenadas polares para calcular

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2) dy dx.$$

42. Utilize coordenadas esféricas para calcular

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy$$

43. Se D é uma região limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = e^x$, determine o valor aproximado da integral $\iint_D y^2 dA$. (Utilize um dispositivo gráfico para estimar os pontos de interseção das curvas.)

44. Determine o centro de massa do tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$ e função densidade $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

45. A função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y) & \text{se } 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante C .

- (b) Determine $P(X \leq 2, Y \geq 1)$.
 (c) Determine $P(X + Y \leq 1)$.

46. Uma lâmpada tem três bulbos, cada um de um tipo, com vida média de 800 horas. Se modelarmos a probabilidade de falha dos bulbos por uma função densidade exponencial com média 800, determine a probabilidade dos três bulbos virem a falhar dentro de um intervalo de 1000 horas.
47. Reescreva a integral

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

como uma integral iterada na ordem $dx \, dy \, dz$.

48. Dê outras cinco integrais iteradas iguais a

$$\int_0^2 \int_0^{y^2} \int_0^{y^2} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$$

49. Utilize a transformação $u = x - y$, $v = x + y$ para calcular $\iint_R (x - y)/(x + y) \, dA$, onde R é o quadrado com vértices $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 3)$.
50. Utilize a transformação $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ para determinar o volume da região limitada pela superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ e pelos planos coordenados.
51. Utilize a fórmula de mudança de variáveis e a transformação apropriada para calcular $\iint_R xy \, dA$, onde R é o quadrado com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ e $(1, -1)$.
52. O Teorema do Valor Médio para as Integrais Duplas diz que, se f é uma função contínua em uma região plana D do tipo I ou do tipo II, então existe um ponto (x_0, y_0) em D , tal que

$$\iint_D f(x, y) \, dA = f(x_0, y_0) A(D)$$

Utilize o Teorema do Valor Extremo (14.7.8) e a Propriedade 15.3.11 das integrais para provar esse teorema. (Use a prova da versão unidimensional da Seção 6.5 do Volume I como guia.)

53. Suponha que f seja contínua sobre um disco que contém o ponto (a, b) . Seja D_r um disco fechado com centro em (a, b) e raio r . Utilize o Teorema do Valor Médio para as integrais duplas (veja o Exercício 52) para mostrar que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y) \, dA = f(a, b)$$

54. (a) Calcule $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{n/2}} \, dA$, onde n é um inteiro e D é a região limitada por círculos com centro na origem e raios r e R , $0 < r < R$.
- (b) Para que valores de n a integral da parte (a) tem limite quando $r \rightarrow 0^+$?
- (c) Determine $\iiint_E \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}} \, dV$, onde E é a região limitada pelas esferas com centro na origem e raios r e R , $0 < r < R$.
- (d) Para que valores de n a integral da parte (c) tem limite quando $r \rightarrow 0^+$?

Problemas Quentes

1. Se $\llbracket x \rrbracket$ denota o maior inteiro contido em x , calcule a integral

$$\iint_R \llbracket x + y \rrbracket dA$$

onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 5\}$.

2. Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\max\{x^2, y^2\}} dy dx$$

onde $\max\{x^2, y^2\}$ significa o maior dos números x^2 e y^2 .

3. Determine o valor médio da função $f(x) = \int_x^1 \cos(t^2) dt$ no intervalo $[0, 1]$.
4. Se \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} são vetores constantes, \mathbf{r} é o vetor de posição $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, e E é dado pelas inequações $0 \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \leq \alpha$, $0 \leq \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \leq \beta$, $0 \leq \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} \leq \gamma$, mostre que

$$\iiint_E (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) dV = \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}$$

5. A integral dupla $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy$ é uma integral imprópria e pode ser definida como limite da integral dupla sobre o retângulo $[0, t] \times [0, t]$ quando $t \rightarrow 1^-$. Mas, se expandirmos o integrando como uma série geométrica, podemos exprimir a integral como a soma de uma série infinita. Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

6. Leonhard Euler determinou o valor exato da soma das séries do Problema 5. Em 1736, ele provou que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Nesse problema, pedimos para você provar esse fatos calculando a integral dupla do Problema 5. Comece fazendo a mudança de variável

$$x = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$$

Isso corresponde a uma rotação em torno da origem de um ângulo de $\pi/4$. Você precisa esboçar a região correspondente no plano uv .

[Dica: se, calculando a integral, você encontrar uma das expressões $(1 - \sin \theta)/\cos \theta$ ou $(\cos \theta)/(1 + \sin \theta)$, deve usar a identidade $\cos \theta = \sin((\pi/2) - \theta)$ e a identidade correspondente para $\sin \theta$.]

7. (a) Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xyz} dx dy dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

(Ninguém jamais foi capaz de determinar o valor exato da soma dessa série.)

(b) Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+xyz} dx dy dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

Use essa equação para calcular a integral tripla com precisão de duas casas decimais.

8. Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \pi x - \operatorname{arctg} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \pi$$

primeiro escrevendo a integral como uma integral iterada.

9. Se f é contínua, mostre que

$$\int_0^x \int_0^y \int_0^z f(t) dt dz dy = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

10. (a) Uma lâmina tem densidade constante ρ e o formato de um disco com centro na origem e raio R . Utilize a Lei de Newton da Gravitação (veja a Seção 13.4) para mostrar que a grandeza da força de atração que a lâmina exerce sobre um corpo com massa m colocado em um ponto $(0, 0, d)$ sobre o lado positivo do eixo z é

$$F = 2\pi G m \rho d \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right)$$

[Dica: divida o disco como na Figura 4 da Seção 15.4 e calcule primeiro o componente vertical da força exercida pelo sub-retângulo polar R_{ij} .]


- (b) Mostre que a grandeza da força de atração da lâmina com densidade ρ que ocupa o plano inteiro sobre um objeto de massa m localizado à distância d do plano é

$$F = 2\pi G m \rho$$

Note que essa expressão não depende de d .

16

Cálculo Vetorial

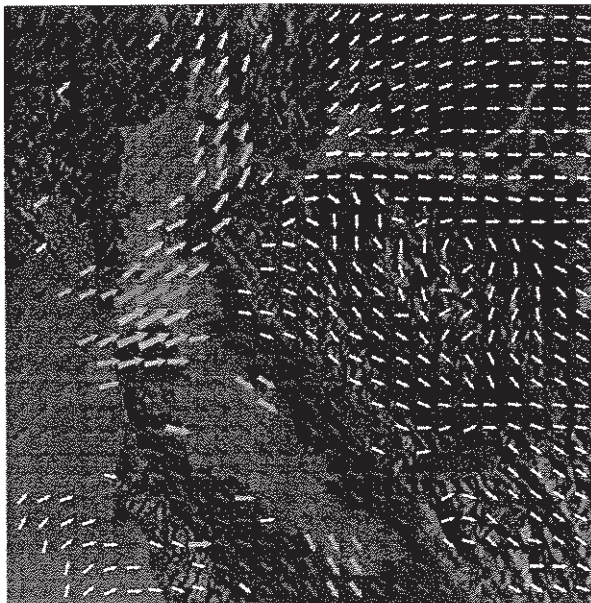


Os vetores podem representar campos de velocidade, como correntes oceânicas, velocidade do vento durante um tornado ou o fluxo de ar passando por um aerofólio inclinado.

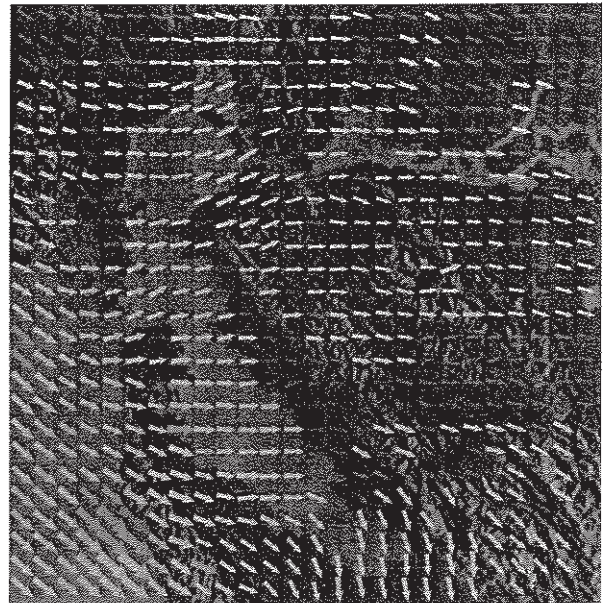
Neste capítulo estudaremos o cálculo de campos vetoriais. (Esses campos são funções que associam vetores a pontos do espaço.) Em particular, definiremos a integral de linha (que pode ser utilizada para determinar o trabalho efetuado por um campo de força agindo sobre um objeto que se move ao longo de uma curva). Definimos a integral de superfície (que pode ser usada para determinar a taxa de vazão de um fluido através de uma superfície). As conexões entre esses tipos novos de integrais e as integrais de funções de uma variável real, duplas e triplas, que já vimos, são dadas por versões de maior dimensão do Teorema Fundamental do Cálculo: Teorema de Green, Teorema de Stokes e Teorema da Divergência.

16.1 Campos Vetoriais

Os vetores da Figura 1 representam os vetores velocidade do ar e indicam a rapidez, a direção e o sentido em pontos 10 m acima da superfície na área da baía de São Francisco. Dando uma olhada nas setas maiores da parte (a) vemos que a maior rapidez dos ventos naquele instante ocorre quando os ventos entram na baía através da ponte Golden Gate. A parte (b) mostra um aspecto bastante diferente em uma época posterior. Associado a cada ponto no ar podemos imaginar o vetor velocidade do vento. Esse é um exemplo de um *campo de vetores velocidade*.



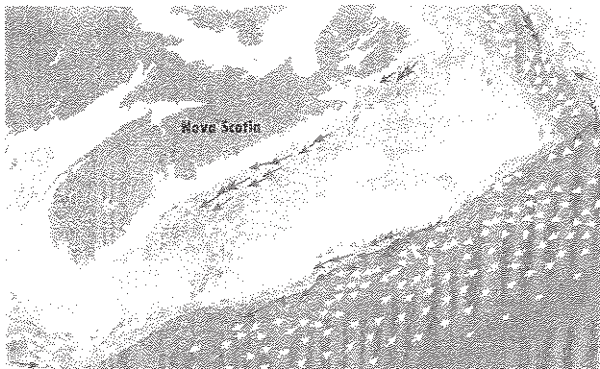
(a) 11 de junho de 2002, 12 horas



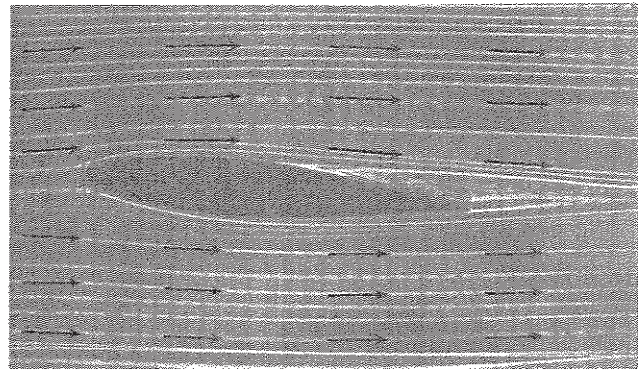
(b) 30 de junho de 2002, 16 horas

FIGURA 1 Campo de vetores velocidade mostrando aspectos do vento na baía de São Francisco

Outros exemplos de campos de vetores velocidade estão ilustrados na Figura 2: correntes oceânicas e o fluxo por um aerofólio.



(a) correntes oceânicas em frente à costa de Nova Scotia



(a) Fluxo do ar passando por um aerofólio inclinado

FIGURA 2
Campos de vetores velocidade

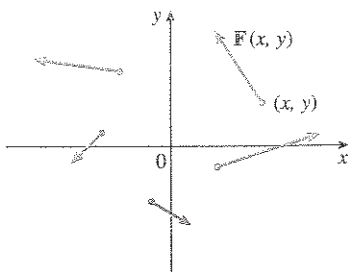


FIGURA 3
Campo vetorial no \mathbb{R}^2

Outro tipo de campo vetorial, chamado *campo de força*, associa um vetor força a cada ponto da região. Um exemplo é o campo de força gravitacional mostrado no Exemplo 4.

Geralmente um campo vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos do \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3) e cuja imagem é um conjunto de vetores em V_2 (ou V_3).

1 Definição Seja D um conjunto em \mathbb{R}^2 (uma região plana). Um **campo vetorial sobre \mathbb{R}^2** é uma função \mathbf{F} que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

A melhor maneira de enxergar um campo vetorial é desenhar setas representando os vetores $\mathbf{F}(x, y)$ começando em um ponto (x, y) . É claro que é impossível fazer isso para todos os pontos (x, y) , mas podemos visualizar \mathbf{F} fazendo isso para alguns pontos representativos em D , como na Figura 3. Como $\mathbf{F}(x, y)$ é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas **funções componentes** P e Q , como segue:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

ou, simplificando,

$$\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$$

Note que P e Q são funções escalares de duas variáveis e são chamadas, algumas vezes, **campos escalares**, para distinguir dos campos vetoriais.

2 Definição Seja E um subconjunto do \mathbb{R}^3 . Um **campo vetorial sobre o \mathbb{R}^3** é uma função \mathbf{F} que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

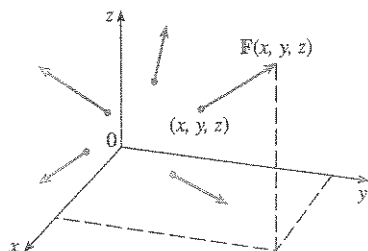


FIGURA 4
Campo vetorial no \mathbb{R}^3

Um campo vetorial \mathbf{F} sobre \mathbb{R}^3 está ilustrado na Figura 4. Podemos escrevê-lo em termos das funções componentes P , Q e R como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$$

Como para funções vetoriais na Seção 13.1, podemos definir continuidade de campos vetoriais e mostrar que \mathbf{F} é contínua se e somente se suas funções componentes P , Q e R são contínuas.

Às vezes identificamos o ponto (x, y, z) com seu vetor de posição $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ e escrevemos $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ em vez de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Então \mathbf{F} é uma função que associa um vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ao vetor \mathbf{x} .

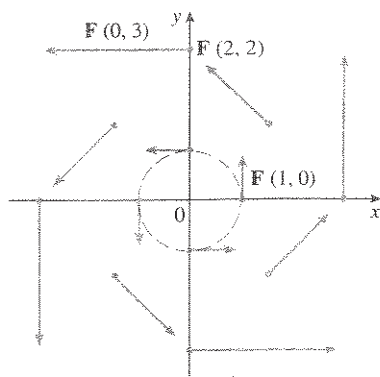


FIGURA 5
 $F(x, y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$

EXEMPLO 1 □ Um campo vetorial em \mathbb{R}^2 é definido por

$$F(x, y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$$

Descreva F desenhando alguns de seus vetores $F(x, y)$, como na Figura 3.

SOLUÇÃO Como $F(1, 0) = \mathbf{j}$, desenhamos o vetor $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ começando no ponto $(1, 0)$ na Figura 5. Como $F(0, 1) = -\mathbf{i}$, desenhamos o vetor $\langle -1, 0 \rangle$ iniciando no ponto $(0, 1)$. Continuamos desse modo desenhando um número significativo de vetores para representar o campo vetorial na Figura 5.

(x, y)	$F(x, y)$	(x, y)	$F(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1 \rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1 \rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2 \rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2 \rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3 \rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3 \rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0 \rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0 \rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2 \rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2 \rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0 \rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0 \rangle$

Na Figura 5 parece que cada seta é tangente a um círculo com centro na origem. Para confirmar isso, vamos tomar o produto escalar do vetor de posição $\mathbf{x} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ com o vetor $F(\mathbf{x}) = F(x, y)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot F(\mathbf{x}) &= (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) \cdot (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}) \\ &= -xy + yx = 0 \end{aligned}$$

Isso mostra que $F(x, y)$ é perpendicular ao vetor de posição $\langle x, y \rangle$ e portanto tangente ao círculo com centro na origem e raio $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Note também que

$$|F(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{x}|$$

e o comprimento do vetor $F(x, y)$ é igual ao raio do círculo. □

Alguns sistemas algébricos computacionais são capazes de plotar o campo vetorial em duas ou três dimensões. Eles fornecem melhor visualização do campo que aquela que fazemos manualmente, pois o computador pode desenhar grande número de vetores representativos. A Figura 6 apresenta uma saída de computador para o campo vetorial do Exemplo 1; as Figuras 7 e 8 mostram outros dois campos vetoriais. Note que o computador faz uma mudança de escala no comprimento do vetor de forma que ele não seja muito comprido, mantendo entretanto proporcionalidade com seu verdadeiro comprimento.

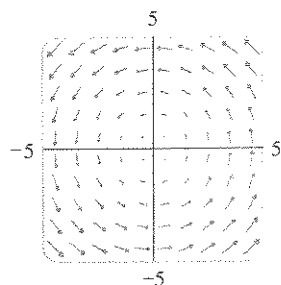


FIGURA 6
 $F(x, y) = \langle -y, x \rangle$

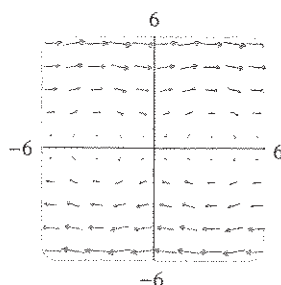


FIGURA 7
 $F(x, y) = \langle y, \text{sen } x \rangle$

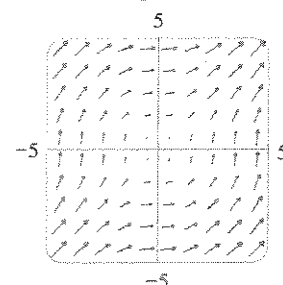


FIGURA 8
 $F(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2) \rangle$

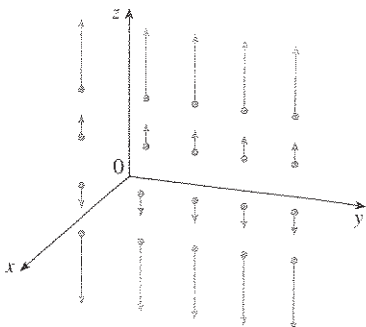


FIGURA 9
 $F(x, y, z) = z \mathbf{k}$

EXEMPLO 2 □ Desenhe o campo vetorial em \mathbb{R}^3 dado por $F(x, y, z) = z \mathbf{k}$.

SOLUÇÃO O desenho está mostrado na Figura 9. Note que todos os vetores são verticais apontando para cima, quando acima do plano xy , e para baixo, quando abaixo do plano xy . O comprimento aumenta à medida que nos distanciamos do plano xy .

Somos capazes de desenhar o campo vetorial do Exemplo 2 à mão, pois ele é especialmente simples. Entretanto, é impossível desenhar à mão a maioria dos campos vetoriais tridimensionais, e assim precisamos do auxílio de um sistema algébrico computacional. Exemplos estão ilustrados nas Figuras 10, 11 e 12. Note que os campos vetoriais das Figuras 10 e 11 têm fórmulas semelhantes, mas todos os vetores da Figura 11 apontam na direção negativa do eixo y , porque seu componente y vale -2 . Se o campo vetorial da Figura 12 representa um campo de velocidade, então uma partícula seria levada para cima em uma espiral em torno do eixo z na direção dos ponteiros do relógio quando visto de cima.

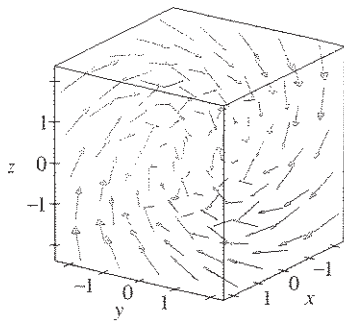


FIGURA 10
 $F(x, y, z) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$

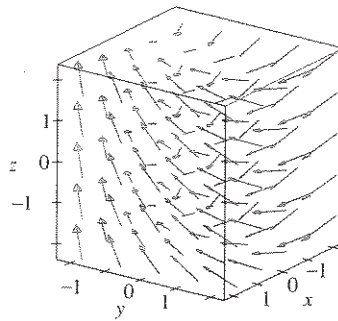


FIGURA 11
 $F(x, y, z) = y \mathbf{i} - 2 \mathbf{j} + x \mathbf{k}$

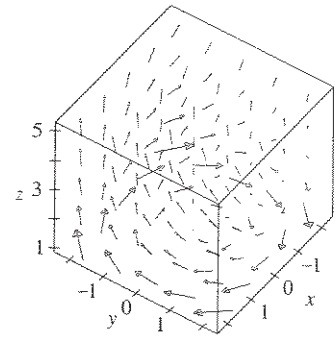


FIGURA 12
 $F(x, y, z) = \frac{y}{z} \mathbf{i} - \frac{x}{z} \mathbf{j} + \frac{z}{4} \mathbf{k}$

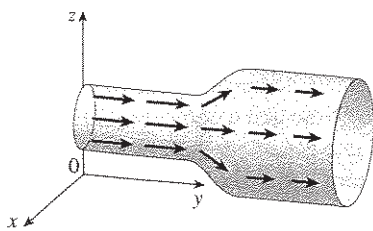


FIGURA 13
Campo de velocidade de escoamento de um líquido

EXEMPLO 3 □ Imagine um líquido fluindo uniformemente em um cano e seja $V(x, y, z)$ o vetor velocidade em um ponto (x, y, z) . Então V associa um vetor a cada ponto (x, y, z) de um certo domínio E (interior do cano), e assim V é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 chamado **campo de velocidade**. Um campo de velocidade possível está ilustrado na Figura 13. A rapidez em qualquer ponto é indicada pelo comprimento da seta.

Campos de velocidade ocorrem em outras áreas da física. Por exemplo: o campo vetorial do Exemplo 1 pode ser usado como o campo de velocidade descrevendo a rotação no sentido horário de uma roda. Vimos outros exemplos de campo de velocidade nas Figuras 1 e 2.

EXEMPLO 4 □ A Lei Gravitacional de Newton estabelece que a amplitude da força gravitacional entre dois objetos com massa m e M é

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde r é a distância entre os objetos e G é a constante gravitacional. (Esse é um exemplo de uma lei de um inverso ao quadrado.) Vamos admitir que o objeto com massa M esteja localizado na origem no \mathbb{R}^3 . (Por exemplo, M poderia ser a massa da Terra e a origem seria seu centro.) Seja $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ o vetor de posição do objeto com massa m . Então

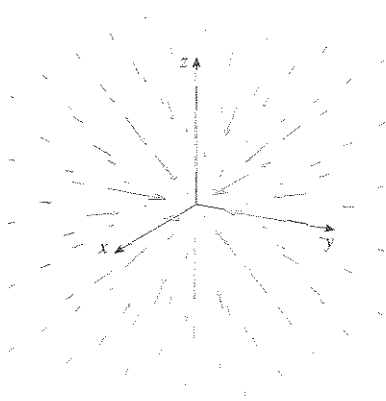


FIGURA 14
Campo gravitacional

$r = |\mathbf{x}|$ ou $r^2 = |\mathbf{x}|^2$. A força gravitacional exercida nesse segundo objeto age em direção à origem, e seu versor é

$$-\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\boxed{3} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

[Físicos freqüentemente utilizam a notação \mathbf{r} em vez de \mathbf{x} para o vetor posição, de modo que você possa conhecer a Fórmula 3 escrita como $\mathbf{F} = -(mMG/r^3)\mathbf{r}$.] A função dada pela Equação 3 é um exemplo de campo de velocidade, chamado **campo gravitacional**, porque associa um vetor [a força $\mathbf{F}(\mathbf{x})$] a todo ponto \mathbf{x} do espaço.

A Fórmula 3 é um modo compacto de escrever o campo gravitacional, mas podemos escrevê-lo em termos de suas funções componentes usando o fato de que $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

O campo gravitacional \mathbf{F} está ilustrado na Figura 14.

EXEMPLO 3 □ Suponha que uma carga elétrica Q esteja localizada na origem. Pela Lei de Coulomb, a força elétrica $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ exercida por essa carga sobre uma carga q localizada no ponto (x, y, z) com vetor posição $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\boxed{4} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon qQ}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

onde ε é uma constante (que depende da unidade usada). Para cargas iguais utilizamos $qQ > 0$ e a força é repulsiva; para cargas diferentes temos $qQ < 0$ e a força é atrativa. Note a semelhança entre as Fórmulas 3 e 4. Ambas são exemplos de **campos de força**.

Em vez de considerar a força elétrica \mathbf{F} , os físicos freqüentemente consideram a força por unidade de carga:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{q} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

Então \mathbf{E} é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 chamado **campo elétrico** de Q .

Campos Gradientes

Se f é uma função escalar de duas variáveis, sabemos da Seção 14.6 que seu gradiente ∇f (ou $\text{grad } f$) é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y) \mathbf{i} + f_y(x, y) \mathbf{j}$$

Portanto, ∇f é realmente um campo vetorial em \mathbb{R}^2 e é denominado **campo do vetor gradiente**. Da mesma forma, se f for uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \mathbf{i} + f_y(x, y, z) \mathbf{j} + f_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

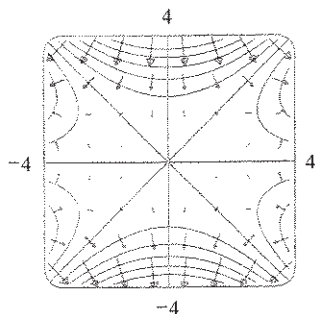


FIGURA 15

EXEMPLO 8 □ Determine o vetor gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Desenhe o campo de vetores gradientes juntamente com um mapa de contorno de f . Como estão relacionados?

SOLUÇÃO O campo de vetor gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = 2xy \mathbf{i} + (x^2 - 3y^2) \mathbf{j}$$

A Figura 15 mostra o mapa de contorno de f com o campo de vetor gradiente. Note que os vetores gradientes são perpendiculares às curvas de nível, como devíamos esperar da Seção 14.6. Note também que os vetores gradientes são mais longos onde as curvas de nível estão mais próximas umas das outras e mais curtos quando elas estão mais distantes entre si. Isso se deve ao fato de o comprimento do vetor gradiente ser o valor da derivada direcional de f e a proximidade das curvas de nível indicar uma grande inclinação do gráfico. □

Um campo vetorial \mathbf{F} é dito ser um **campo vetorial conservativo** se ele é o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existe uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Nessa situação f é dita ser uma **função potencial** de \mathbf{F} .

Nem todos os campos vetoriais são conservativos, mas aparecem frequentemente em física. Por exemplo: o campo gravitacional \mathbf{F} do Exemplo 4 é conservativo, pois, se definimos

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

então

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k} \\ &= \mathbf{F}(x, y, z) \end{aligned}$$

Nas Seções 16.3 e 16.5 aprenderemos a determinar se um campo vetorial é conservativo ou não.

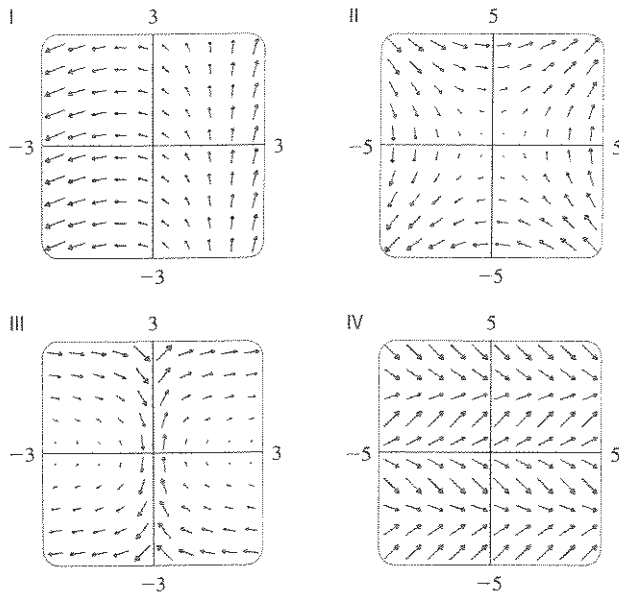
16.1 Exercícios

1-10 □ Esboce o campo vetorial F , desenhando um diagrama como o da Figura 5 ou da Figura 9.

1. $F(x, y) = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
2. $F(x, y) = \mathbf{i} + x\mathbf{j}$
3. $F(x, y) = y\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$
4. $F(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
5. $F(x, y) = \frac{y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
6. $F(x, y) = \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
7. $F(x, y, z) = \mathbf{j}$
8. $F(x, y, z) = z\mathbf{j}$
9. $F(x, y, z) = y\mathbf{j}$
10. $F(x, y, z) = \mathbf{j} - \mathbf{i}$

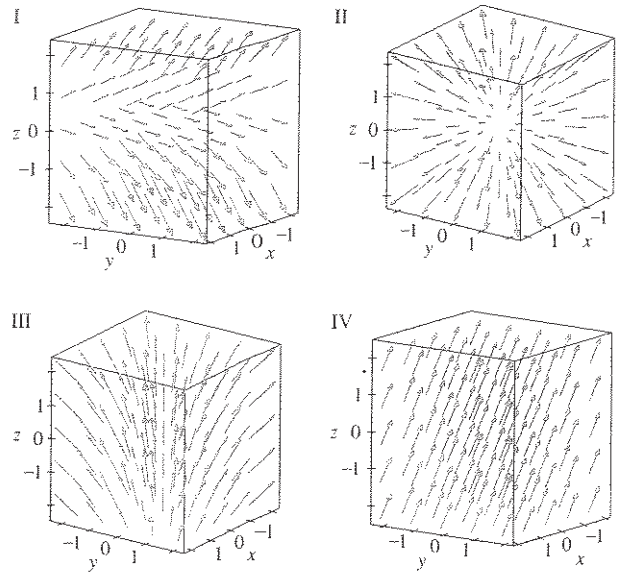
11-14 □ Case o campo vetorial F com a figura rotulada de I-IV. Dê razões para suas escolhas.

11. $F(x, y) = \langle y, x \rangle$
12. $F(x, y) = \langle 1, \text{sen } y \rangle$
13. $F(x, y) = \langle x - 2, x + 1 \rangle$
14. $F(x, y) = \langle y, 1/x \rangle$



15-18 □ Case o campo vetorial F em \mathbb{R}^3 com a figura rotulada de I-IV. Dê razões para suas escolhas.

15. $F(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
16. $F(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
17. $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
18. $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$



19. Se você dispõe de um CAS que plota campos vetoriais (o comando para fazê-lo no Maple é o "fieldplot" e no Mathematica é o "PlotVectorField"), use-o para plotar

$$F(x, y) = (y^2 - 2xy)\mathbf{i} + (3xy - 6x^2)\mathbf{j}$$

Explique sua aparência, determinando um conjunto de pontos (x, y) tal que $F(x, y) = \mathbf{0}$.

20. Seja $F(\mathbf{x}) = (r^2 - 2r)\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$ e $r = |\mathbf{x}|$. Use um CAS para plotar esse campo vetorial com vários domínios até conseguir ver o que está acontecendo. Descreva a aparência do desenho e explique-o, determinando os pontos onde $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

21-24 □ Determine o campo do vetor gradiente de f .

21. $f(x, y) = \ln(x + 2y)$
22. $f(x, y) = x^2 e^{-\beta x}$
23. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
24. $f(x, y, z) = x \cos(y/z)$

25-26 □ Determine o campo do vetor gradiente ∇f de f e o desenho.

25. $f(x, y) = xy - 2x$
26. $f(x, y) = \frac{1}{4}(x + y)^2$

27-28 □ Plote o campo do vetor gradiente de f junto com o mapa de contorno de f . Explique como eles estão relacionados.

27. $f(x, y) = \text{sen } x + \text{sen } y$
28. $f(x, y) = \text{sen}(x + y)$

2 Definição Se f é definida sobre uma curva lisa C dada pelas Equações 1, então a integral de linha de f sobre C é

$$\int_C f(x, y) \, ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

se esse limite existir.

Na Seção 10.3 achamos que o comprimento da curva C é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

Argumentação semelhante pode ser usada para mostrar que, se f é uma função contínua, então o limite na Definição 2 sempre existe e a fórmula seguinte pode ser empregada para calcular a integral de linha:

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

O valor da integral de linha não depende da parametrização da curva, desde que cada ponto da curva seja atingido uma única vez quando t cresce de a para b .

Se $s(t)$ é o comprimento de C entre $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$, então

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Um modo de guardar a Fórmula 3 é escrever tudo, em termos do parâmetro t . Usando a parametrização para exprimir x e y em termos de t , temos ds como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

No caso especial onde C é um segmento de reta unindo $(a, 0)$ a $(b, 0)$, tomando x como parâmetro, escrevemos as equações paramétricas de C assim: $x = x$, $y = 0$, $a \leq x \leq b$. A Fórmula 3 fica

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x, 0) \, dx$$

e nesse caso a integral de linha se reduz a uma integral de função de uma variável real.

Assim como para as integrais de funções de uma variável real, podemos interpretar a integral de linha de uma função *positiva* como uma área. De fato, se $f(x, y) \geq 0$, $\int_C f(x, y) \, ds$ representa a área de um lado da “cerca” ou “cortina” da Figura 2 cuja base é C e cuja altura acima do ponto (x, y) é $f(x, y)$.

EXEMPLO 1 □ Calcule $\int_C (2 + x^2y) \, ds$, onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

□ A função comprimento de arco s está ilustrada na Seção 13.3.

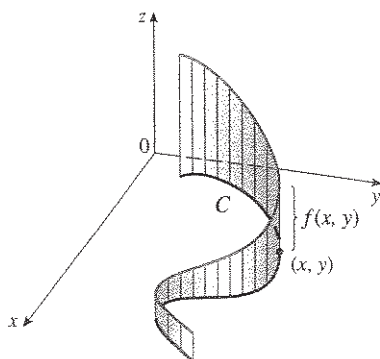


FIGURA 2

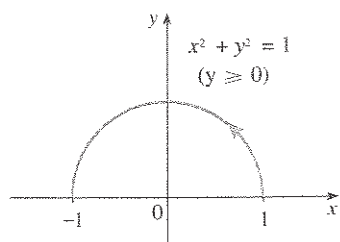


FIGURA 3

SOLUÇÃO Para usar a Fórmula 3 precisamos de equações paramétricas que representem a curva C . Como já vimos, o círculo unitário pode ser parametrizado por meio das equações

$$x = \cos t \quad y = \sin t$$

e a metade superior do círculo é descrita pelo intervalo do parâmetro $0 \leq t \leq \pi$ (veja a Figura 3). Logo, da Fórmula 3, temos

$$\begin{aligned} \int_C (2 + x^2y) \, ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \, dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \, dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi \\ &= 2\pi + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

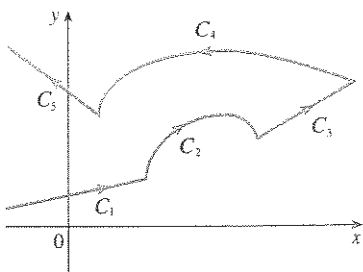


FIGURA 4
Curva lisa por trechos

Suponha agora que C seja uma **curva lisa por trechos**; ou seja, C é a união de um número finito de curvas lisas C_1, C_2, \dots, C_n , onde, como ilustrado na Figura 4, o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto terminal de C_i . Então, definimos a integral de f ao longo de C como a soma das integrais de f ao longo de cada trecho liso de C :

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_{C_1} f(x, y) \, ds + \int_{C_2} f(x, y) \, ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) \, ds$$

EXEMPLO 2 □ Calcule $\int_C 2x \, ds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.

SOLUÇÃO A curva C é mostrada na Figura 5. C_1 é o gráfico de uma função de x ; então podemos escolher x como parâmetro e as equações de C_1 se tornam

$$x = x \quad y = x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{C_1} 2x \, ds &= \int_0^1 2x \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx \\ &= \int_0^1 2x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} \end{aligned}$$

Em C_2 escolhemos y como parâmetro, e as equações de C_2 são

$$x = 1 \quad y = y \quad 1 \leq y \leq 2$$

e

$$\int_{C_2} 2x \, ds = \int_1^2 2(1) \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2} \, dy = \int_1^2 2 \, dy = 2$$

Então

$$\int_C 2x \, ds = \int_{C_1} 2x \, ds + \int_{C_2} 2x \, ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$

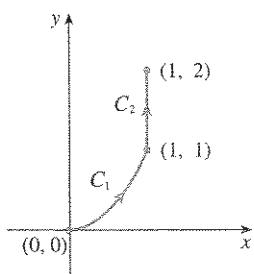


FIGURA 5
 $C = C_1 \cup C_2$

Qualquer interpretação física da integral de linha $\int_C f(x, y) ds$ depende da interpretação física da função f . Suponha que $\rho(x, y)$ represente a densidade linear num ponto (x, y) de um arame fino com o formato de uma curva C . A massa da parte do arame do ponto P_{i-1} até P_i na Figura 1 é aproximadamente $\rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$, e então a massa total do arame terá valor aproximado de $\sum \rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$. Tomando mais pontos sobre a curva, obtemos o valor da massa m do arame como o valor limite dessas aproximações:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i = \int_C \rho(x, y) ds$$

[Por exemplo: se $f(x, y) = 2 + x^2y$ representa a densidade de um arame semicircular, então a integral do Exemplo 1 representa a massa do arame.] O **centro de massa** do arame com função densidade ρ está localizado no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

$$\boxed{4} \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \rho(x, y) ds \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) ds$$

Outra interpretação física da integral de linha será discutida adiante neste capítulo.

EXEMPLO 3 □ Um arame com o formato de um semicírculo $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, é mais grosso perto da base do que perto do topo. Ache o centro de massa desse arame se a função densidade linear em qualquer ponto é proporcional à sua distância à reta $y = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 1, usamos a parametrização $x = \cos t, y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, e determinamos que $ds = dt$. A densidade linear é

$$\rho(x, y) = k(1 - y)$$

onde k é uma constante, e então a massa do arame é

$$\begin{aligned} m &= \int_C k(1 - y) ds = \int_0^\pi k(1 - \sin t) dt \\ &= k[t + \cos t]_0^\pi = k(\pi - 2) \end{aligned}$$

Das Equações 4, temos

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) ds = \frac{1}{k(\pi - 2)} \int_C yk(1 - y) ds \\ &= \frac{1}{\pi - 2} \int_0^\pi (\sin t - \sin^2 t) dt = \frac{1}{\pi - 2} \left[-\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^\pi \\ &= \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)} \end{aligned}$$

Por simetria vemos que $\bar{x} = 0$, e o centro de massa é

$$\left(0, \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)} \right) \approx (0, 0,38)$$

(Veja a Figura 6.) □

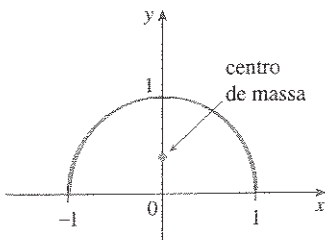


FIGURA 6

Duas outras integrais de linha são obtidas trocando-se Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ou $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ na Definição 2. Elas são chamadas **integrais de linha de f ao longo de C com relação a x e y** :

$$\boxed{5} \quad \int_C f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i$$

$$\boxed{6} \quad \int_C f(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i$$

Quando queremos distinguir a integral de linha original $\int_C f(x, y) ds$ das Equações 5 e 6, chamamos a mesma de **integral de linha com relação ao comprimento do arco**.

As fórmulas seguintes dizem que as integrais de linha com relação a x e y podem ser calculadas escrevendo-se tudo em termos de t : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$.

$$\boxed{7} \quad \int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t) dt$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t) dt$$

Freqüentemente ocorre de as integrais de linha com relação a x e y aparecerem juntas. Quando isso acontece, é costume abreviar escrevendo

$$\int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Quando estamos nos organizando para resolver uma integral de linha, às vezes o mais difícil é pensar em uma representação paramétrica para uma curva cuja descrição geométrica é dada. Em particular, freqüentemente precisamos parametrizar um segmento de reta, e portanto é útil lembrar que a representação vetorial do segmento de reta que inicia em \mathbf{r}_0 e termina em \mathbf{r}_1 é dada por

$$\boxed{8} \quad \mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Veja a Equação 12.5.4.)

EXEMPLO 4 □ Calcule $\int_C y^2 dx + x dy$, onde (a) $C = C_1$ é o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ e (b) $C = C_2$ é o arco de parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ (veja a Figura 7).

SOLUÇÃO

(a) A representação paramétrica para o segmento de reta é

$$x = 5t - 5 \quad y = 5t - 3 \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Use a Equação 8 com $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3 \rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2 \rangle$.) Assim $dx = 5 dt$, $dy = 5 dt$, e a Fórmula 7 nos dá

$$\begin{aligned} \int_{C_1} y^2 dx + x dy &= \int_0^1 (5t - 3)^2(5 dt) + (5t - 5)(5 dt) \\ &= 5 \int_0^1 (25t^2 - 25t + 4) dt \\ &= 5 \left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t \right]_0^1 = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

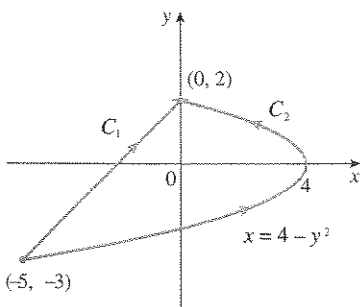


FIGURA 7

(b) Como a parábola é dada em função de y , vamos usar y como parâmetro e escrever C_2 como

$$x = 4 - y^2 \quad y = y \quad -3 \leq y \leq 2$$

Então $dx = -2y \, dy$, e pela Fórmula 7, temos

$$\begin{aligned} \int_{C_2} y^2 dx + x dy &= \int_{-3}^2 y^2(-2y) dy + (4 - y^2) dy \\ &= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4) dy \\ &= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y \right]_{-3}^2 = 40\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Note que as respostas para os itens (a) e (b) do Exemplo 4 são diferentes, apesar de as duas curvas terem as mesmas extremidades. Assim, em geral, o valor de uma integral de linha depende não somente dos pontos extremos da curva, como também da própria trajetória (veja a Seção 16.3 para condições nas quais a integral independe da trajetória).

Note também que as respostas do Exemplo 4 dependem da orientação ou sentido em que a curva é percorrida. Se $-C_1$ representa o segmento de reta que vai de $(0, 2)$ a $(-5, -3)$, você pode verificar, usando a parametrização

$$x = -5t \quad y = 2 - 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

que

$$\int_{-C_1} y^2 dx + x dy = \frac{5}{6}$$

Em geral, uma parametrização dada $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, determina uma **orientação** de uma curva C , com a orientação positiva correspondendo aos valores crescentes do parâmetro t (veja a Figura 8, onde o ponto inicial A corresponde ao valor do parâmetro a e o ponto terminal B corresponde a $t = b$).

Se $-C$ denota a curva constituída pelos mesmos pontos que C , mas com orientação contrária (do ponto inicial B para o ponto terminal A na Figura 8), então temos

$$\int_{-C} f(x, y) dx = -\int_C f(x, y) dx \quad \int_{-C} f(x, y) dy = -\int_C f(x, y) dy$$

Mas, se integramos em relação ao comprimento de arco, o valor da integral de linha não mudará quando revertermos a orientação da curva:

$$\int_{-C} f(x, y) ds = \int_C f(x, y) ds$$

Isso é porque Δs_i é sempre positivo, enquanto Δx_i e Δy_i mudam de sinal quando revertemos a orientação de C .

Integrais de Linha no Espaço

Suponhamos agora que C seja uma curva espacial lisa dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad a \leq t \leq b$$

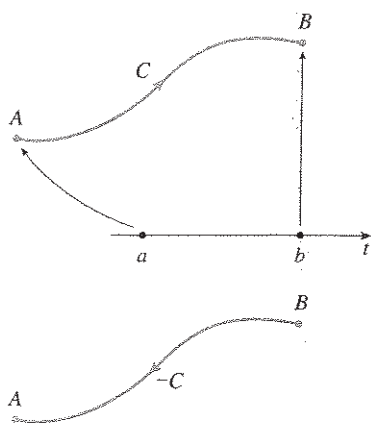


FIGURA 8

ou pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Se f é uma função de três variáveis que é contínua em alguma região contendo C , então definimos a **integral de linha de f ao longo de C** (com relação ao comprimento de arco) de modo semelhante ao feito para curvas planas:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta s_i$$

Calculamos essa integral utilizando uma fórmula análoga à Equação 3:

$$\boxed{9} \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Observe que as integrais das Equações 3 e 9 podem ser escritas de modo mais compacto com notação vetorial

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Para o caso especial quando $f(x, y, z) = 1$, temos

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = L$$

onde L é o comprimento da curva C (ver a Seção 13.3.3).

Também podemos definir integrais de linha ao longo de C com relação a x , y e z . Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta z_i \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt \end{aligned}$$

Portanto, como para as integrais de linha no plano podemos calcular integrais da forma

$$\boxed{10} \quad \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

escrevendo tudo (x, y, z, dx, dy, dz) em termos do parâmetro t .

EXEMPLO 5 □ Calcule $\int_C y \sin z ds$, onde C é a hélice circular dada pelas equações $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (veja a Figura 9).

SOLUÇÃO A Fórmula 9 nos dá

$$\begin{aligned} \int_C y \sin z ds &= \int_0^{2\pi} (\sin t) \sin t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2} [t - \frac{1}{2} \sin 2t]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

EXEMPLO 6 □ Calcule $\int_C y dx + z dy + x dz$, onde C consiste no segmento de reta C_1 que une $(2, 0, 0)$ a $(3, 4, 5)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(3, 4, 5)$ a $(3, 4, 0)$.

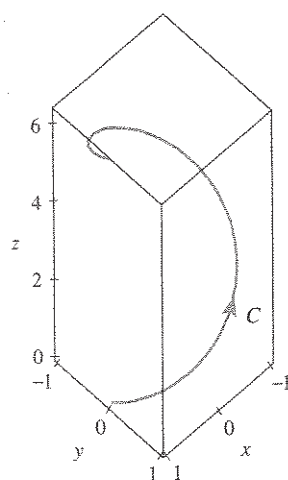


FIGURA 9

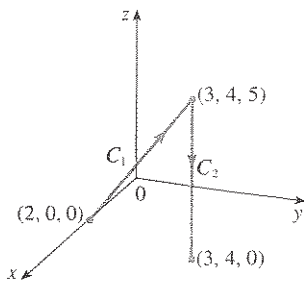


FIGURA 10

SOLUÇÃO A Figura 10 mostra a curva C . Usando a Equação 8, escrevemos C_1 como

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 2, 0, 0 \rangle + t\langle 3, 4, 5 \rangle = \langle 2 + t, 4t, 5t \rangle$$

ou, na forma paramétrica, como

$$x = 2 + t \quad y = 4t \quad z = 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{C_1} y \, dx + z \, dy + x \, dz &= \int_0^1 (4t) \, dt + (5t)4 \, dt + (2 + t)5 \, dt \\ &= \int_0^1 (10 + 29t) \, dt = 10t + 29 \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 24,5 \end{aligned}$$

Da mesma maneira, C_2 pode ser escrito na forma

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 3, 4, 5 \rangle + t\langle 3, 4, 0 \rangle = \langle 3, 4, 5 - 5t \rangle$$

ou
$$x = 3 \quad y = 4 \quad z = 5 - 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Então $dx = 0 = dy$, logo

$$\int_{C_2} y \, dx + z \, dy + x \, dz = \int_0^1 3(-5) \, dt = -15$$

Somando os valores das integrais, obtemos

$$\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz = 24,5 - 15 = 9,5$$

Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Lembre-se da Seção 6.4 do Volume I em que o trabalho feito por uma força $f(x)$ que move uma partícula de a até b ao longo do eixo x é $W = \int_a^b f(x) \, dx$. Depois, na Seção 12.3, achamos que o trabalho feito por uma força constante \mathbf{F} para mover um objeto de um ponto P para outro ponto Q do espaço é $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, onde $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ é o vetor deslocamento.

Suponha agora que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo de força contínuo no \mathbb{R}^3 , tal como o campo gravitacional do Exemplo 4 da Seção 16.1 ou o campo de força elétrica do Exemplo 5 da Seção 16.1. (Um campo de força em \mathbb{R}^2 pode ser visto como um caso especial onde $R = 0$ e P e Q dependem só de x e y .) Queremos calcular o trabalho exercido por essa força movimentando uma partícula ao longo de uma curva lisa C .

Dividimos C em subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimentos Δs_i , dividindo o intervalo do parâmetro $[a, b]$ em subintervalos de mesmo tamanho (veja a Figura 1 para o caso bidimensional ou a Figura 11 para o caso tridimensional). Escolha $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ no i -ésimo subarco correspondendo ao valor do parâmetro t_i^* . Se Δs_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i na curva se processa aproximadamente na direção de $\mathbf{T}(t_i^*)$, vetor tangente a P_i^* . Então, o trabalho feito pela força \mathbf{F} para mover a partícula de P_{i-1} para P_i é aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \Delta s_i$$

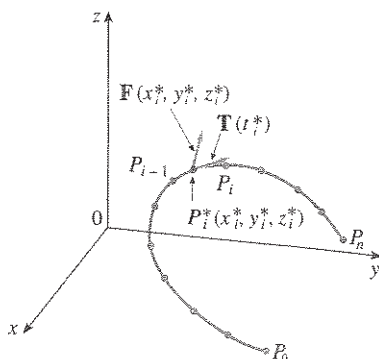


FIGURA 11

e o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta s_i$$

onde $\mathbf{T}(x, y, z)$ é o versor tangente ao ponto (x, y, z) sobre C . Intuitivamente podemos ver que essas aproximações devem ficar melhores quando n aumenta muito. Portanto definimos o **trabalho** W feito por um campo de força \mathbf{F} como o limite da soma de Riemann dada por (11), ou seja,

$$(12) \quad W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) \, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

A Equação 12 nos diz que o *trabalho é a integral em relação ao comprimento do arco da componente tangencial da força*.

Se a curva C é dada pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, então $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$, e da Equação 9 podemos reescrever a Equação 12 como

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| \, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt$$

Essa última integral é freqüentemente abreviada como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e ocorre também em outras áreas da física. Portanto podemos definir a integral de linha para um campo vetorial contínuo qualquer.

(13) **Definição** Seja \mathbf{F} um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva lisa C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Então a **integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C** é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

Quando usamos a Definição 13, devemos nos lembrar de que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ é uma abreviação para $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$, e calculamos $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ tomando $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ na expressão de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Note também que podemos formalmente escrever que $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) \, dt$

□ A Figura 12 mostra o campo de força e a curva do Exemplo 7. O trabalho realizado é negativo porque o campo impede o movimento ao longo da curva.

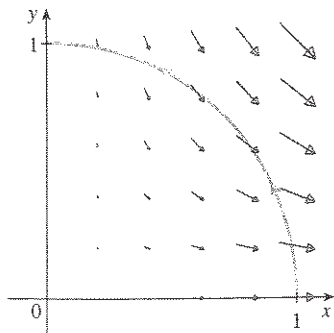


FIGURA 12

EXEMPLO 7 □ Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$ para mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

SOLUÇÃO Como $x = \cos t$ e $y = \sin t$, temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t \mathbf{i} - \cos t \sin t \mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Portanto o trabalho realizado é

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_0^{\pi/2} (-2 \cos^2 t \sin t) \, dt \\ &= 2 \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

□

NOTA □ Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ e as integrais em relação ao comprimento do arco não trocaram de sinal quando a orientação do caminho é invertida, é verdade que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

porque o vetor tangente \mathbf{T} é substituído por seu negativo quando C é trocado por $-C$.

□ A Figura 13 mostra a cúbica torcida C do Exemplo 8 e alguns vetores típicos agindo em três pontos de C .

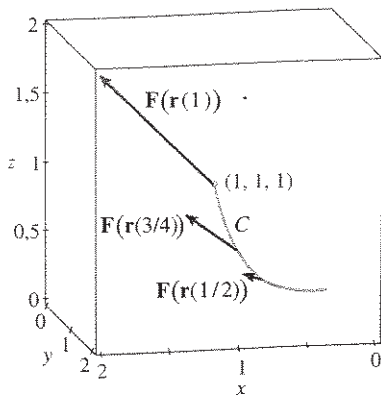


FIGURA 13

EXEMPLO 8 □ Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$ e C é a cúbica retorcida dada por

$$x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3 \quad 0 \leq t \leq 1$$

SOLUÇÃO Temos

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3 \mathbf{i} + t^5 \mathbf{j} + t^4 \mathbf{k}$$

Então

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^1 (t^3 + 5t^6) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7} \right]_0^1 = \frac{27}{28} \end{aligned}$$

Finalmente, notamos a relação entre as integrais de linha de campos vetoriais e as integrais de linha de campos escalares. Suponha que um campo vetorial \mathbf{F} em \mathbb{R}^3 seja dado sob a forma de componentes pela equação $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$. Usamos a Definição 13 para calcular sua integral de linha ao longo de C :

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b (P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}) \cdot (x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} + z'(t) \mathbf{k}) dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \end{aligned}$$

Mas essa última integral é precisamente a integral de linha de (10). Portanto, temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz \quad \text{onde } \mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$$

Por exemplo: a integral $\int_C y dx + z dy + x dz$ do Exemplo 6 poderia ser expressa como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ onde

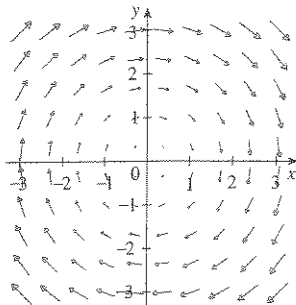
$$\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$$

16.2 Exercícios

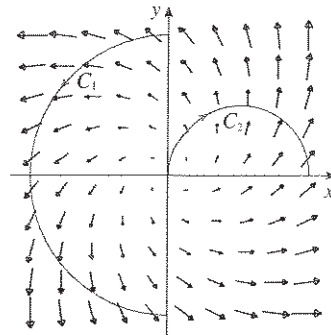
1-16 □ Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

1. $\int_C y \, ds$, $C: x = t^2, y = t, 0 \leq t \leq 2$
2. $\int_C (y/x) \, ds$, $C: x = t^4, y = t^3, \frac{1}{2} \leq t \leq 1$
3. $\int_C xy^4 \, ds$, C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$
4. $\int_C ye^x \, ds$, C é o segmento de reta que liga $(1, 2)$ a $(4, 7)$
5. $\int_C (xy + \ln x) \, dy$,
 C é o arco de parábola $y = x^2$ de $(1, 1)$ a $(3, 9)$
6. $\int_C xe^y \, dx$,
 C é o arco de curva $x = e^y$ de $(1, 0)$ a $(e, 1)$
7. $\int_C xy \, dx + (x - y) \, dy$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$.
8. $\int_C \sin x \, dx + \cos y \, dy$, C consiste na metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$ e o segmento de reta de $(-1, 0)$ a $(-2, 3)$.
9. $\int_C xy^3 \, ds$, $C: x = 4 \sin t, y = 4 \cos t, z = 3t, 0 \leq t \leq \pi/2$
10. $\int_C x^2z \, ds$, C é o segmento de reta de $(0, 6, -1)$ a $(4, 1, 5)$
11. $\int_C xe^{yz} \, ds$, C é o segmento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$
12. $\int_C (2x + 9z) \, ds$, $C: x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$
13. $\int_C x^2y\sqrt{z} \, dz$, $C: x = t^3, y = t, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$
14. $\int_C z \, dx + x \, dy + y \, dz$, $C: x = t^2, y = t^3, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$
15. $\int_C (x + yz) \, dx + 2x \, dy + xyz \, dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(1, 0, 1)$ a $(2, 3, 1)$ e de $(2, 3, 1)$ a $(2, 5, 2)$
16. $\int_C x^2 \, dx + y^2 \, dy + z^2 \, dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, -1)$, e de $(1, 2, -1)$ a $(3, 2, 0)$

17. Seja \mathbf{F} o campo vetorial mostrado na figura.
 - (a) Se C_1 é o segmento de reta vertical de $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$, determine se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero.
 - (b) Se C_2 é o círculo de raio 3 e centro na origem percorrido no sentido anti-horário, determine se $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero.



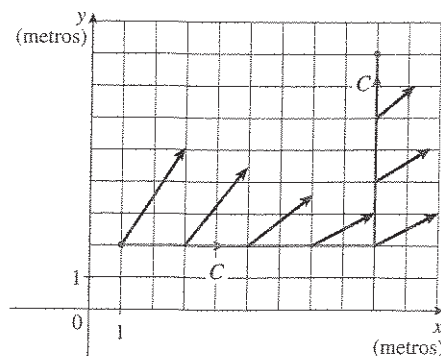
18. A figura mostra um campo vetorial \mathbf{F} e duas curvas, C_1 e C_2 . As integrais de linha de \mathbf{F} sobre C_1 e C_2 são positivas, negativas ou nulas? Explique.



19-22 □ Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y^3 \mathbf{i} - y\sqrt{x} \mathbf{j}$,
 $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} - t^3 \mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$
 20. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$,
 $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$
 21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin x \mathbf{i} + \cos y \mathbf{j} + xz \mathbf{k}$,
 $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} - t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$
 22. $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} - x \mathbf{k}$,
 $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq \pi$
- 23-24 □ Use um gráfico do campo vetorial \mathbf{F} e a curva C para dizer se a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Em seguida calcule a integral.
23. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y) \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$, C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrido no sentido anti-horário de $(2, 0)$ a $(0, -2)$
 24. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}$, C é a parábola de $(-1, 2)$ a $(1, 2)$
25. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = e^{x-1} \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$.
(b) Ilustre a parte (a) utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = 0, 1/\sqrt{2}$ e 1 (como na Figura 13).
 26. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} - z \mathbf{j} + y \mathbf{k}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = 2t \mathbf{i} + 3t \mathbf{j} - t^2 \mathbf{k}, -1 \leq t \leq 1$.
(b) Ilustre a parte (a) utilizando um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = \pm 1$ e $\pm \frac{1}{2}$ (como na Figura 13).

27. Determine o valor exato de $\int_C x^3 y^5 ds$, onde C é a parte da astróide $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ no primeiro quadrante.
28. Determine o valor exato de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4 e^y \mathbf{i} + \ln z \mathbf{j} + \sqrt{y^2 + z^2} \mathbf{k}$ e C é o segmento de reta entre $(1, 2, 1)$ a $(6, 4, 5)$.
29. Se C é a curva com equações paramétricas $x = \ln t$, $y = e^{-t}$, $1 \leq t \leq 2$, use uma calculadora ou CAS para calcular a integral de linha $\int_C x \sin y ds$ com precisão até a terceira casa decimal.
30. (a) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ no sentido anti-horário.
(b) Utilize um sistema algébrico computacional para desenhar o campo de força e o círculo na mesma tela. Use essa figura para explicar sua resposta da parte (a).
31. Um arame fino é entortado no formato de uma semicircunferência $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$. Se a densidade linear for uma constante k , determine a massa e o centro de massa do arame.
32. Determine a massa e o centro de massa de um arame fino no formato de um quarto de círculo $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, se a função densidade for $\rho(x, y) = x + y$.
33. (a) Escreva fórmulas semelhantes à Equação 4 para o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de um arame fino com função densidade $\rho(x, y, z)$ e forma da curva espacial C .
(b) Determine o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = 2 \sin t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, se a densidade for uma constante k .
34. Determine a massa e o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = t$, $y = \cos t$, $z = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, se a densidade em qualquer ponto for igual ao quadrado da distância do ponto à origem.
35. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y)$ está sobre uma curva plana C , seu **momento de inércia** em relação aos eixos x e y são definidos como
- $$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y) ds \quad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y) ds$$
- Determine os momentos de inércia do arame do Exemplo 3.
36. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y, z)$ está sobre uma curva espacial C , seu **momento de inércia** em relação aos eixos x , y e z são definidos como
- $$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$
- $$I_y = \int_C (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$
- $$I_z = \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds$$
- Determine os momentos de inércia do arame do Exemplo 33.
37. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x \mathbf{i} + (y + 2) \mathbf{j}$ para movimentar um objeto sobre um arco da cicloide $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t) \mathbf{i} + (1 - \cos t) \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
38. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x \sin y \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ para movimentar um objeto sobre a parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ a $(2, 4)$.
39. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y + z, x + z, x + y \rangle$ sobre uma partícula que se move ao longo do segmento de reta $(1, 0, 0)$ a $(3, 4, 2)$.
40. A força exercida pela carga elétrica colocada na origem sobre uma partícula carregada em um ponto (x, y, z) com vetor posição $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ é $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, onde K é uma constante (veja o Exemplo 5 da Seção 16.1). Determine o trabalho realizado quando a partícula se move sobre o segmento de reta de $(2, 0, 0)$ a $(2, 1, 5)$.
41. Um homem pesando 160 lb carrega uma lata de pintura de 25 lb por uma escada helicoidal em torno de um silo com raio de 20 pés. Se o silo tem 90 pés de altura e o homem dá três voltas completas em torno do silo, quanto trabalho é feito pelo homem contra a gravidade para chegar ao topo?
42. Suponha que haja um furo na lata de pintura do Exercício 41 e 9 lb de tinta vazam da lata de modo contínuo durante a subida do homem. Quanto trabalho é realizado?
43. (a) Mostre que um campo de força constante realiza um trabalho nulo sobre uma partícula que dá uma única volta completa uniformemente na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
(b) Isso também é verdadeiro para um campo de força, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ onde k é uma constante e $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$?
44. A base de uma cerca de raio 10 m é dada por $x = 10 \cos t$, $y = 10 \sin t$. A altura da cerca na posição (x, y) é dada pela função $h(x, y) = 4 + 0,01(x^2 - y^2)$, portanto a altura varia de 3 m a 5 m. Suponha que 1 L de tinta cubra 100 m². Faça um esboço da cerca e determine quanto de tinta você necessitará para pintar os dois lados da cerca.
45. Um objeto se move sobre a curva C mostrada na figura de $(1, 2)$ a $(9, 8)$. Os comprimentos dos vetores do campo de força \mathbf{F} são medidos em newtons pela escala dos eixos. Estime o trabalho realizado por \mathbf{F} sobre o objeto.

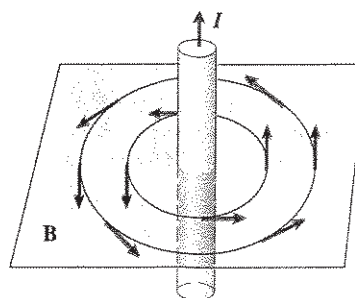


46. Experimentos mostram que uma corrente contínua I em um fio comprido produz um campo magnético \mathbf{B} que é tangente a qualquer círculo em um plano perpendicular ao fio e cujo centro seja o eixo do fio (como na figura). A Lei de Ampère relaciona a corrente elétrica ao campo magnético criado e estabelece que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

onde I é a corrente que passa por qualquer superfície limitada por uma curva fechada C e μ_0 é uma constante chamada permeabilidade do espaço livre. Tomando C como um círculo com raio r , mostre que a amplitude $B = |\mathbf{B}|$ do campo magnético à distância r do centro do fio é

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



16.3 Teorema Fundamental para as Integrais de Linha

Lembre-se da Seção 5.3 do Volume I em que a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrita como

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

onde F' é contínua em $[a, b]$. A Equação 1 também é chamada Teorema da Variação Total: a integral da taxa de variação é a variação total.

Se consideramos o vetor gradiente ∇f da função f de duas ou três variáveis como uma espécie de derivada de f , então o teorema seguinte pode ser considerado uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha.

[2] Teorema Seja C uma curva lisa dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C . Então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

NOTA □ O Teorema 2 nos diz que podemos calcular a integral de linha de um campo vetorial conservativo (o campo vetorial gradiente da função potencial f) sabendo apenas o valor de f nos pontos terminais de C . De fato, o Teorema 2 diz que a integral de linha de ∇f é a variação total de f . Se f é uma função de duas variáveis e C , uma curva plana com início em $A(x_1, y_1)$ e término em $B(x_2, y_2)$, como na Figura 1, o Teorema 2 fica

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Se f é uma função de três variáveis e C , uma curva espacial ligando o ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ ao ponto $B(x_2, y_2, z_2)$, então temos

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Vamos provar o Teorema 2 nesse caso.

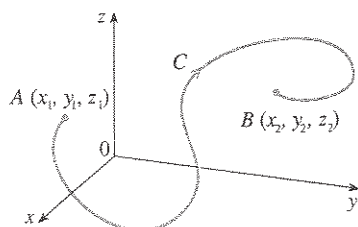
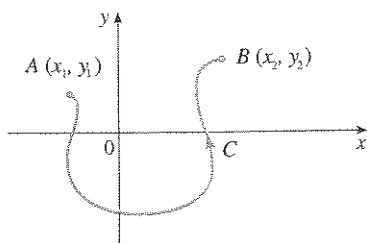


FIGURA 1

Prova do Teorema 2 Usando a Definição 16.2.13, temos

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) dt && \text{(pela Regra da Cadeia)} \\ &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))\end{aligned}$$

O último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo (Equação 1).

Apesar de termos provado o Teorema 2 para curvas lisas, ele também vale para curvas lisa por trecho. Isso pode ser visto subdividindo-se C em um número finito de curvas lisas e somando as integrais resultantes.

EXEMPLO 1 ■ Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

ao mover uma partícula com massa m do ponto $(3, 4, 12)$ para o ponto $(2, 2, 0)$ ao longo da curva lisa por trechos C (veja o Exemplo 4 da Seção 16.1).

SOLUÇÃO Da Seção 16.1 sabemos que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo e, de fato, $\mathbf{F} = \nabla f$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Portanto, pelo Teorema 2, o trabalho realizado é

$$\begin{aligned}W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\ &= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13} \right)\end{aligned}$$

■ Independência do Caminho

Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas lisas por trecho (chamadas **caminhos**) que têm o mesmo ponto inicial A e o mesmo ponto terminal B . Sabemos do Exemplo 4 da Seção 16.2 que, em geral, $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Mas uma decorrência do Teorema 2 é que

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

sempre que ∇f for contínuo. Em outras palavras, a integral de linha de um campo vetorial *conservativo* depende somente dos pontos extremos da curva.

Em geral, se \mathbf{F} for um campo vetorial contínuo com domínio D , dizemos que a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é **independente do caminho** se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para quaisquer



FIGURA 2
Um curva fechada

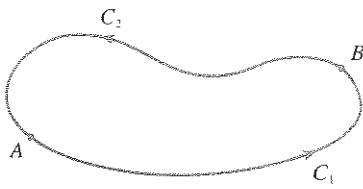


FIGURA 3

dois caminhos C_1 e C_2 em D que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Com essa terminologia, podemos dizer que *as integrais de linha de campos vetoriais conservativos são independentes do caminho*.

Uma curva é dita **fechada** se seu ponto terminal coincide com seu ponto inicial, ou seja, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$ (veja a Figura 2). Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D e C é uma curva fechada em D , podemos escolher quaisquer dois pontos A e B sobre C e olhar C como composta por um caminho C_1 de A a B seguido de um caminho C_2 de B a A (veja a Figura 3). Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

já que C_1 e $-C_2$ têm os mesmos pontos iniciais e finais.

Por outro lado, se é verdade que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ sempre que C for um caminho fechado em D , podemos demonstrar a independência do caminho, como segue. Tome quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 de A a B em D e defina C como a curva constituída por C_1 seguida por $-C_2$. Então

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

e $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Assim, provamos o seguinte teorema.

3 Teorema $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D se e somente se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C em D .

Como sabemos que a integral de linha de qualquer campo vetorial conservativo \mathbf{F} é independente do caminho, segue-se que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer caminho fechado. A interpretação física é que o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo (tal como o campo gravitacional ou o campo elétrico da Seção 16.1) para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

O teorema a seguir fala que *somente* campos vetoriais independentes do caminho são conservativos. Ele está estabelecido e provado para curvas planas, mas existe uma versão espacial desse teorema. Admitiremos que D seja **aberto**, o que significa que para todo ponto P em D existe uma bola aberta com centro em P inteiramente contida em D . (Portanto D não tem nenhum ponto de sua fronteira.) Além disso, admitiremos que D seja **conexo**. Isso significa que quaisquer dois pontos de D podem ser ligados por um caminho inteiramente contido em D .

4 Teorema Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial contínuo sobre uma região aberta conexa D . Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ for independente do caminho em D , então \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo, ou seja, existe uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Prova Seja $A(a, b)$ um ponto fixo em D . Vamos construir a função potencial f desejada definindo

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para qualquer ponto (x, y) em D . Como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, não interessa qual o caminho de integração utilizado entre (a, b) e (x, y) para definir $f(x, y)$. Como D é aberto, existe uma bola aberta contida em D com centro em (x, y) . Escolha qualquer ponto (x_1, y) na bola aberta com $x_1 < x$ e considere C como qualquer caminho C_1 de (a, b) a (x_1, y) seguido pelo segmento de reta horizontal C_2 de (x_1, y) a (x, y) (veja a Figura 4). Então

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

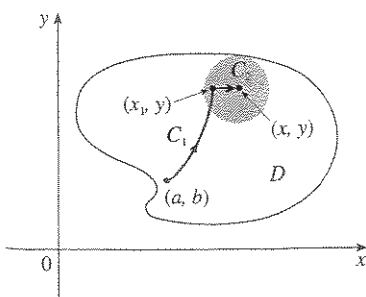


FIGURA 4

Note que a primeira dessas integrais não depende de x , e assim

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Se escrevermos $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$, então

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} P dx + Q dy$$

Sobre C_2 , y é constante, $dy = 0$. Usando t como parâmetro, onde $x_1 \leq t \leq x$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P dx + Q dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x P(t, y) dt = P(x, y)$$

pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (veja a Seção 5.3 no Volume I). Uma argumentação semelhante, usando um segmento de reta vertical (veja a Figura 5), mostra que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_1} P dx + Q dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^y Q(x, t) dt = Q(x, y)$$

Então
$$\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = \nabla f$$

que mostra que \mathbf{F} é conservativo. □

Uma questão permanece: como é possível saber se um campo vetorial é conservativo ou não? Suponha que saibamos que $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$ seja conservativo, onde P e Q tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então existe uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, ou seja,

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Portanto, pelo Teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

[5] Teorema Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$ é um campo vetorial conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre um domínio D , então em todos os pontos de D temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

O recíproco do Teorema 5 só é verdadeiro para um tipo especial de região. Para explicar isso precisamos do conceito de **curva simples**, que é uma curva que não se intercepta em nenhum ponto entre os pontos terminais. [Veja a Figura 6; $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ para uma curva simples fechada, mas $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ quando $a < t_1 < t_2 < b$.]

No Teorema 4 precisamos de região conexa. Para o próximo teorema precisaremos de uma condição mais forte. Uma **região simplesmente conexa** em um plano é uma região

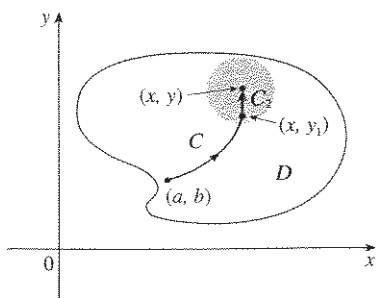


FIGURA 5

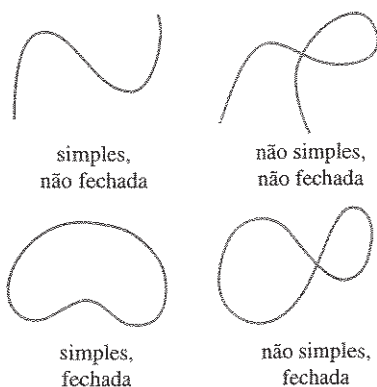


FIGURA 6
Tipos de curvas

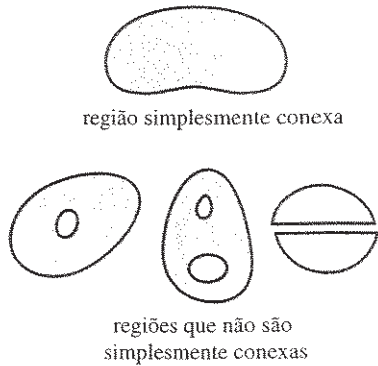


FIGURA 7

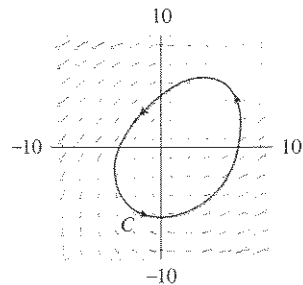


FIGURA 8

□ As Figuras 8 e 9 mostram os campos vetoriais dos Exemplos 2 e 3, respectivamente. Os vetores da Figura 8 que começam na curva fechada C parecem apontar basicamente para a mesma direção que C . Assim parece que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$ e portanto \mathbf{F} não é conservativo. Os cálculos no Exemplo 2 confirmam essa impressão. Alguns dos vetores perto das curvas C_1 e C_2 na Figura 9 apontam aproximadamente para a mesma direção que as curvas, enquanto outros apontam para a direção oposta. Portanto parece razoável que as integrais de linha sobre toda curva fechada sejam 0. O Exemplo 3 mostra que de fato \mathbf{F} é conservativo.

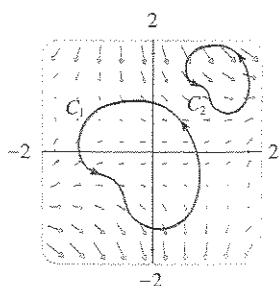


FIGURA 9

conexa D tal que toda curva simples fechada em D contorna somente pontos que estão em D . Note que, da Figura 7, intuitivamente falando, uma região simplesmente conexa não contém buracos nem é constituída por dois pedaços separados.

Para regiões simplesmente conexas podemos estabelecer o recíproco do Teorema 5, que fornece um processo conveniente para verificar se um campo vetorial em \mathbb{R}^2 é conservativo. A demonstração será esboçada na próxima seção como consequência do Teorema de Greens.

Teorema Seja $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ um campo vetorial sobre uma região D aberta e simplesmente conexa. Suponha que P e Q tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{por toda a região } D$$

Então \mathbf{F} é conservativo.

EXEMPLO 2 □ Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x - 2)\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Seja $P(x, y) = x - y$ e $Q(x, y) = x - 2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, pelo Teorema 5, \mathbf{F} não é conservativo.

EXEMPLO 3 □ Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Seja $P(x, y) = 3 + 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Além disso, o domínio de \mathbf{F} é o plano inteiro ($D = \mathbb{R}^2$), que é aberto e simplesmente conexo. Portanto podemos aplicar o Teorema 6 e concluir que \mathbf{F} é conservativo. □

No Exemplo 3, o Teorema 6 diz que \mathbf{F} é conservativo, mas não mostra como encontrar a função (potencial) f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. A prova do Teorema 4 dá indícios de como encontrar f . Usamos “integração parcial”, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 □

(a) Se $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por $\mathbf{r}(t) = e^t \sin t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.

SOLUÇÃO

(a) Do Exemplo 3 sabemos que \mathbf{F} é conservativo, e assim existe uma função f com $\nabla f = \mathbf{F}$, ou seja,

$$\boxed{7} \quad f_x(x, y) = 3 + 2xy$$

$$\boxed{8} \quad f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Integrando (7) com relação a x , obtemos

$$\boxed{9} \quad f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Note que a constante de integração é uma constante em relação a x , ou seja, uma função de y , que chamamos $g(y)$. Em seguida diferenciamos ambos os lados de (9) em relação a y :

$$\boxed{10} \quad f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$$

Comparando (8) e (10), vemos que

$$g'(y) = -3y^2$$

Integrando com relação a y , obtemos

$$g(y) = -y^3 + K$$

onde K é uma constante. Substituindo em (9), temos

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$$

como a função potencial desejada.

(b) Para aplicar o Teorema 2 devemos conhecer os pontos inicial e final de C , ou seja, $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$ e $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^\pi)$. Na expressão para $f(x, y)$ da parte (a), qualquer valor da constante K serve. Então tomemos $K = 0$. Assim temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(0, -e^\pi) - f(0, 1) \\ &= e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1 \end{aligned}$$

Esse método é mais curto que o método direto de cálculo para as integrais de linha que aprendemos na Seção 16.2.

Um critério para determinar se um campo vetorial \mathbf{F} em \mathbb{R}^3 é ou não conservativo será dado na Seção 16.5. Enquanto isso, o próximo exemplo mostra que a técnica para achar funções potenciais é muito semelhante à utilizada para campos vetoriais em \mathbb{R}^2 .

EXEMPLO 5 □ Se $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \mathbf{i} + (2xy + e^{3z}) \mathbf{j} + 3ye^{3z} \mathbf{k}$, determine uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

SOLUÇÃO Se existe tal função f , então

$$\boxed{11} \quad f_x(x, y, z) = y^2$$

$$\boxed{12} \quad f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z}$$

$$\boxed{13} \quad f_z(x, y, z) = 3ye^{3z}$$

Integrando (11) em relação a x , obtemos

$$(14) \quad f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z)$$

onde $g(y, z)$ é uma constante em relação a x . Então, diferenciando (14) em relação a y , temos

$$f_y(x, y, z) = 2xy + g_y(y, z)$$

e, comparando com (12), vem

$$g_y(y, z) = e^{3z}$$

Então, $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ e reescrevemos (14) como

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Finalmente, diferenciando em relação a z e comparando com (13), obtemos $h'(z) = 0$ e, portanto, $h(z) = K$, uma constante. A função desejada é

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

É fácil verificar que $\nabla f = \mathbf{F}$. □

Conservação de Energia

Vamos aplicar as idéias deste capítulo para um campo de forças contínuo \mathbf{F} que move um objeto ao longo de uma trajetória C dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, onde $\mathbf{r}(a) = A$ é o ponto inicial e $\mathbf{r}(b) = B$ é o ponto terminal de C . Pela Segunda Lei do Movimento de Newton (veja a Seção 13.4), a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ em um ponto de C está relacionada com a aceleração $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ pela equação

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$$

Assim o trabalho realizado pela força sobre o objeto é

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)] dt && \text{(Teorema 13.2.3, Fórmula 4)} \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2 dt \\ &= \frac{m}{2} [|\mathbf{r}'(t)|^2]_a^b && \text{(Teorema Fundamental do Cálculo)} \\ &= \frac{m}{2} (|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2) \end{aligned}$$

Portanto

$$(15) \quad W = \frac{1}{2}m |\mathbf{v}(b)|^2 - \frac{1}{2}m |\mathbf{v}(a)|^2$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ é a velocidade.

A quantidade $\frac{1}{2}m |\mathbf{v}(t)|^2$, ou seja, metade da massa vezes o quadrado da rapidez, é chamada **energia cinética** do objeto. Portanto podemos reescrever a Equação 15 como

$$(16) \quad W = K(B) - K(A)$$

que diz que o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é igual à variação da energia cinética nos pontos terminais de C .

Agora vamos admitir que \mathbf{F} seja um campo de forças conservativo; ou seja, podemos escrever $\mathbf{F} = \nabla f$. Em física, a **energia potencial** de um objeto no ponto (x, y, z) é definida como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, e temos $\mathbf{F} = -\nabla P$. Então, pelo Teorema 2, temos

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} \\ &= -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] \\ &= P(A) - P(B) \end{aligned}$$

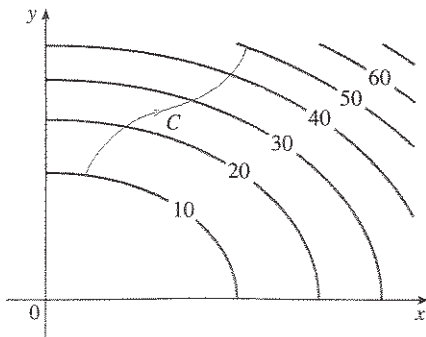
Comparando essa equação com a Equação 16, vemos que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

que diz que, se um objeto se move de um ponto A para outro B sob a influência de um campo de forças conservativo, então a soma de sua energia potencial e energia cinética permanece constante. Essa é a chamada **Lei de Conservação de Energia** e é a razão pela qual o campo vetorial é denominado *conservativo*.

16.3 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C e um mapa de contorno de uma função f cujo gradiente é contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



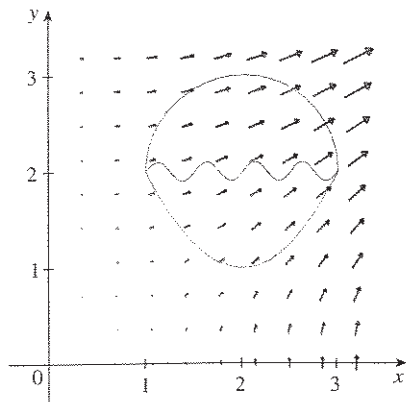
2. É dada uma tabela de valores de uma função f com gradiente contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, onde C tem equações paramétricas $x = t^2 + 1, y = t^3 + t, 0 \leq t \leq 1$.

$x \backslash y$	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

- 3-10 □ Determine se \mathbf{F} é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (6x + 5y)\mathbf{i} + (5x + 4y)\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + 4xy)\mathbf{i} + (4xy - y^3)\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = xe^y\mathbf{i} + ye^x\mathbf{j}$
6. $\mathbf{F}(x, y) = e^y\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j}$
7. $\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y - y \cos x)\mathbf{i} + (-x^2 \sin y - \sin x)\mathbf{j}$
8. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + 2xy + \ln x)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

9. $F(x, y) = (ye^x + \sen y) \mathbf{i} + (e^x + x \cos y) \mathbf{j}$
 10. $F(x, y) = (xy \cosh xy + \sinh xy) \mathbf{i} + (x^2 \cosh xy) \mathbf{j}$
 11. A figura mostra o campo vetorial $F(x, y) = \langle 2xy, x^2 \rangle$ e três curvas que começam em (1, 2) e terminam em (3, 2).
 (a) Explique por que $\int_C F \cdot dr$ tem o mesmo valor para as três curvas.
 (b) Qual é esse valor comum?



12-18 □ (a) Determine uma função f tal que $F = \nabla f$ e (b) use a parte (a) para calcular $\int_C F \cdot dr$ sobre a curva C dada.

12. $F(x, y) = y \mathbf{i} + (x + 2y) \mathbf{j}$, C é a semicircunferência superior que começa em (0, 1) e termina em (2, 1)
 13. $F(x, y) = x^3 y^4 \mathbf{i} + x^4 y^3 \mathbf{j}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = \sqrt{t} \mathbf{i} + (1 + t^2) \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$
 14. $F(x, y) = \frac{y^2}{1 + x^2} \mathbf{i} + 2y \arctg x \mathbf{j}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$
 15. $F(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 2z) \mathbf{k}$,
 C é o segmento de reta de (1, 0, -2) a (4, 6, 3)
 16. $F(x, y, z) = (2xz + y^2) \mathbf{i} + 2xy \mathbf{j} + (x^2 + 3z^2) \mathbf{k}$,
 $C: x = t^2, y = t + 1, z = 2t - 1$, $0 \leq t \leq 1$
 17. $F(x, y, z) = y^2 \cos z \mathbf{i} + 2xy \cos z \mathbf{j} - xy^2 \sen z \mathbf{k}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + \sen t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi$
 18. $F(x, y, z) = e^y \mathbf{i} + xe^y \mathbf{j} + (z + 1)e^z \mathbf{k}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

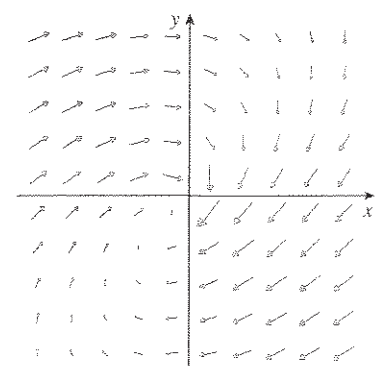
19-28 □ Mostre que a integral de linha é independente do caminho e calcule a integral.

19. $\int_C \tg y \, dx + x \sec^2 y \, dy$, C é qualquer caminho de (1, 0) a (2, $\pi/4$)
 20. $\int_C (1 - ye^{-x}) \, dx + e^{-x} \, dy$, C é qualquer caminho de (0, 1) a (1, 2)

21-28 □ Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial de força F movendo um objeto de P a Q .

21. $F(x, y) = 2y^{3/2} \mathbf{i} + 3x\sqrt{y} \mathbf{j}$; $P(1, 1)$, $Q(2, 4)$

22. $F(x, y) = (y^2/x^2) \mathbf{i} - (2y/x) \mathbf{j}$; $P(1, 1)$, $Q(4, -2)$
 23. O campo vetorial mostrado na figura é conservativo? Explique.



24-25 □ A partir do gráfico de F você diria que ele é conservativo? Verifique se seu palpite estava correto.

24. $F(x, y) = (2xy + \sen y) \mathbf{i} + (x^2 + x \cos y) \mathbf{j}$
 25. $F(x, y) = \frac{(x - 2y) \mathbf{i} + (x - 2) \mathbf{j}}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

26. Seja $F = \nabla f$, onde $f(x, y) = \sen(x - 2y)$. Determine as curvas C_1 e C_2 que não sejam fechadas e satisfaçam a equação.

(a) $\int_{C_1} F \cdot dr = 0$ (b) $\int_{C_2} F \cdot dr = 1$

27. Mostre que, se um campo vetorial $F = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$ é conservativo e P, Q, R têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

28. Use o Exercício 27 para mostrar que a integral de linha $\int_C y \, dx + x \, dy + xyz \, dz$ não é independente do caminho.

29-32 □ Determine se o conjunto dado é ou não: (a) aberto, (b) conexo e (c) simplesmente conexo.

29. $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$
 30. $\{(x, y) \mid x \neq 0\}$
 31. $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$
 32. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ou } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

33. Seja $F(x, y) = \frac{-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

- (a) Mostre que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.
 (b) Mostre que $\int_C F \cdot dr$ não é independente do caminho. [Dica: Calcule $\int_{C_1} F \cdot dr$ e $\int_{C_2} F \cdot dr$, onde C_1 e C_2 são as metades superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ de (1, 0) a (-1, 0).] Isso contraria o Teorema 6?

34. (a) Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial quadrado inverso, ou seja,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

para alguma constante c , onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determine o trabalho realizado por \mathbf{F} ao mover um objeto de um ponto P_1 por um caminho para um ponto P_2 em termos da distância d_1 e d_2 desses pontos à origem.

- (b) Um exemplo de um campo quadrado inverso é o campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 4 da Seção 16.1. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo gravitacional quando a Terra se move

do afélio (em uma distância máxima em relação ao Sol de $1,52 \times 10^8$ km) ao periélio (em uma distância mínima

de $1,47 \times 10^8$ km). (Use os valores $m = 5,97 \times 10^{24}$ kg, $M = 1,99 \times 10^{30}$ kg, e $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².)

- (c) Outro exemplo de um campo quadrado inverso é o campo elétrico $\mathbf{E} = \epsilon q Q \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 5 da Seção 16.1. Suponha que um elétron com carga de $-1,6 \times 10^{-19}$ C esteja localizado na origem. Uma carga positiva unitária é colocada à distância de 10^{-12} m do elétron e se move para uma posição que está à metade da distância original do elétron. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo elétrico. (Use o valor $\epsilon = 8,985 \times 10^{10}$.)

16.4 Teorema de Green

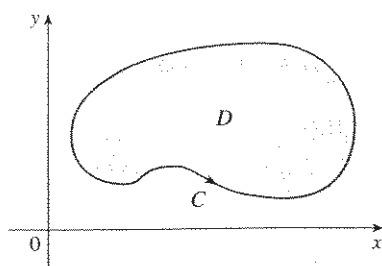


FIGURA 1

O Teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região D do plano cercada por C . (Veja a Figura 1. Admitiremos que D consiste em todos os pontos dentro de C além dos pontos sobre C .) Para enunciar o Teorema de Green usaremos a convenção de que a **orientação positiva** de uma curva fechada simples C se refere a percorrer C no *sentido anti-horário* apenas uma vez. Assim, se C for dado como uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, então a região D está à esquerda quando o ponto $\mathbf{r}(t)$ percorrer C (veja a Figura 2).

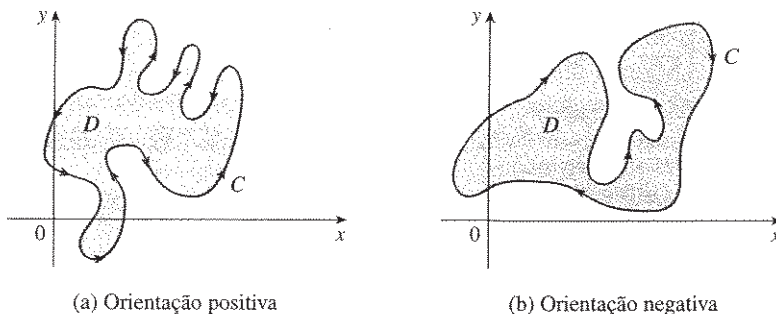


FIGURA 2

□ Recorde-se de que o lado esquerdo desta equação é outra forma de escrever $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

Teorema de Green Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

NOTA □ A notação

$$\oint_C P dx + Q dy \quad \text{ou} \quad \oint_C^+ P dx + Q dy$$

é usada algumas vezes para indicar que a integral de linha é calculada usando-se a orientação positiva da curva fechada C . Outra notação da orientação positiva da curva fronteira de

D é ∂D , assim a equação no Teorema de Green pode ser escrita como

$$\boxed{1} \quad \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P dx + Q dy$$

O Teorema de Green pode ser olhado como a contrapartida do Teorema Fundamental do Cálculo para de integrais duplas. Compare a Equação 1 com o estabelecido pelo Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2, na seguinte equação:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

Em ambos os casos existe uma integral envolvendo as derivadas (F' , $\partial Q/\partial x$ e $\partial P/\partial y$) do lado esquerdo da equação. E em ambos os casos o lado direito envolve valores da função original (F , Q e P) somente sobre a *fronteira* da região. (No caso unidimensional, a região é um intervalo $[a, b]$ cuja fronteira é constituída apenas pelos dois pontos a e b .)

O Teorema de Green não é fácil de provar no caso geral apresentado no Teorema 1, mas faremos uma prova para o caso especial onde a região é tipo I ou tipo II (veja a Seção 15.3). A essas regiões, vamos chamar **regiões simples**.

Prova do Teorema de Green no Caso Onde D É uma Região Simples Note que o Teorema de Green estará provado se mostrarmos que

$$\boxed{2} \quad \int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

e

$$\boxed{3} \quad \int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$

Vamos provar a Equação 2 exprimindo D como uma região do tipo I:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são funções contínuas. Isso nos permite calcular a integral dupla do lado direito da Equação 2, como segue:

$$\boxed{4} \quad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} (x, y) dy dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx$$

onde o último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

Vamos agora calcular o lado esquerdo da Equação 2, quebrando C como a união de quatro curvas C_1 , C_2 , C_3 e C_4 mostradas na Figura 3. Sobre C_1 tomamos como parâmetro x e escrevemos as equações paramétricas como $x = x$, $y = g_1(x)$, $a \leq x \leq b$. Assim

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx$$

Observe que C_3 vai da direita para a esquerda, mas $-C_3$ vai da esquerda para a direita, e podemos escrever as equações paramétricas de $-C_3$ como $x = x$, $y = g_2(x)$, $a \leq x \leq b$. Portanto

$$\int_{C_3} P(x, y) dx = - \int_{-C_3} P(x, y) dx = - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

□ O Teorema de Green recebeu esse nome em homenagem ao cientista inglês autodidata George Green (1793-1841), que trabalhava período integral na padaria do pai desde os 9 anos e aprendeu matemática em livros de biblioteca. Em 1828, Green publicou *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, contudo, somente foram impressas 100 cópias, a maioria presenteada a seus amigos. Esse panfleto continha um teorema equivalente ao que conhecemos como Teorema de Green hoje, mas não se tornou conhecido na época. Finalmente, com 40 anos, Green entrou para a Universidade de Cambridge como aluno de graduação, porém morreu quatro anos após ter se formado. Em 1846, William Thompson (lorde Kelvin) localizou uma cópia dos ensaios de Green, compreendeu sua importância e os reimprimiu. Green foi a primeira pessoa a tentar formular uma teoria matemática da eletricidade e do magnetismo. Seu trabalho serviu de base para os trabalhos de teoria do eletromagnetismo subseqüentes de Thomson, Stokes, Rayleigh e Maxwell.

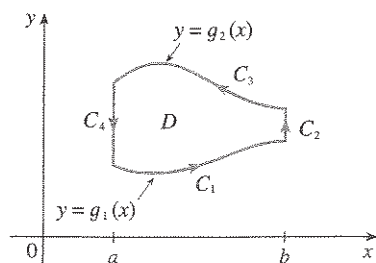


FIGURA 3

Sobre C_2 ou C_4 (qualquer uma delas pode se reduzir a um único ponto), x é constante, e assim $dx = 0$ e

$$\int_{C_2} P(x, y) dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y) dx$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dx &= \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \end{aligned}$$

Comparando essa expressão com a da Equação 4, vemos que

$$\int_C P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

A Equação 3 pode ser provada de forma semelhante, exprimindo D como região do tipo II (veja o Exercício 28). Então, somando as Equações 2 e 3, obtemos o Teorema de Green.

EXEMPLO 1 □ Calcule $\int_C x^4 dx + xy dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

SOLUÇÃO Apesar de essa integral poder ser calculada pelos métodos usuais da Seção 16.2, o que envolveria estabelecer três integrais separadas sobre os três lados do triângulo, vamos, em vez disso, usar o Teorema de Green. Note que a região D cercada por C é simples e C tem orientação positiva (veja a Figura 4). Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\begin{aligned} \int_C x^4 dx + xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{6} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 □ Calcule $\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUÇÃO A região D delimitada por C é o círculo $x^2 + y^2 \leq 9$, então vamos mudar para coordenadas polares depois de aplicar o Teorema de Green:

$$\begin{aligned} \oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (7x + \sqrt{y^4 + 1}) - \frac{\partial}{\partial y} (3y - e^{\operatorname{sen} x}) \right] dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3) r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r dr = 36\pi \end{aligned}$$

□ Em vez de utilizarmos as coordenadas polares, podemos simplesmente usar o fato de que D é um círculo de raio 3 e escrever

$$\iint_D 4 dA = 4 \cdot \pi(3)^2 = 36\pi$$

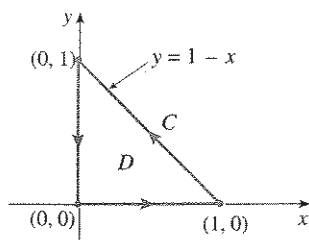


FIGURA 4

Nos Exemplos 1 e 2 consideramos que a integral dupla era mais facilmente calculada como uma integral de linha. (Tente escrever a integral de linha do Exemplo 2 e você ficará convencido rapidamente!) Mas às vezes é mais simples calcular a integral de linha, e, nesse caso, usamos o Teorema de Green na ordem inversa. Por exemplo: se sabemos que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ sobre uma curva C , então o Teorema de Green nos dá

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P dx + Q dy = 0$$

não interessando os valores das funções P e Q em D .

Outra aplicação da direção reversa do Teorema de Green está no cálculo de áreas. Como a área de uma região D é $\iint_D 1 dA$, desejamos escolher P e Q de modo que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Existem várias possibilidades:

$$\begin{array}{lll} P(x, y) = 0 & P(x, y) = -y & P(x, y) = -\frac{1}{2}y \\ Q(x, y) = x & Q(x, y) = 0 & Q(x, y) = \frac{1}{2}x \end{array}$$

Então, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de D :

$$\boxed{5} \quad A = \oint_C x dy = -\oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

EXEMPLO 3 □ Determine a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUÇÃO A elipse tem equações paramétricas $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando a terceira fórmula da Equação 5 temos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t) dt - (b \sin t)(-a \sin t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab \end{aligned}$$

Apesar de termos provado o Teorema de Green somente no caso particular onde D é simples, podemos estendê-lo agora para o caso em que D é a união finita de regiões simples. Por exemplo: se D é uma região como mostrado na Figura 5, então podemos escrever $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 são ambas simples. A fronteira de D_1 é $C_1 \cup C_3$ e a fronteira de D_2 é $C_2 \cup (-C_3)$. Assim, aplicando o Teorema de Green para D_1 e D_2 separadamente, obtemos

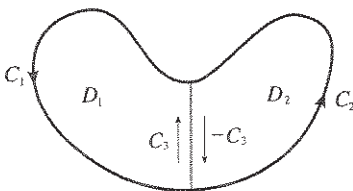


FIGURA 5

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_3} P dx + Q dy &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ \int_{C_2 \cup (-C_3)} P dx + Q dy &= \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$

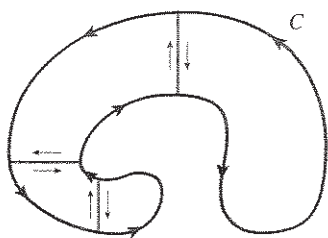


FIGURA 6

Se somarmos essas duas equações, a integral de linha sobre C_3 e $-C_3$ se cancelam e obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_2} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

que é o Teorema de Green para $D = D_1 \cup D_2$, uma vez que sua fronteira é $C = C_1 \cup C_2$.

O mesmo tipo de argumentação nos permite estabelecer o Teorema de Green para qualquer união finita de regiões simples (veja a Figura 6).

EXEMPLO 4 □ Calcule $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$, onde C é a fronteira da região semi-anular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO Note que, apesar de D não ser simples, o eixo y divide-a em duas regiões simples (veja a Figura 7). Com coordenadas polares, podemos escrever

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Portanto o Teorema de Green fornece

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + 3xy dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (3xy) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2) \right] dA \\ &= \iint_D y dA = \int_0^\pi \int_1^2 (r \operatorname{sen} \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta \int_1^2 r^2 dr = [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_1^2 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

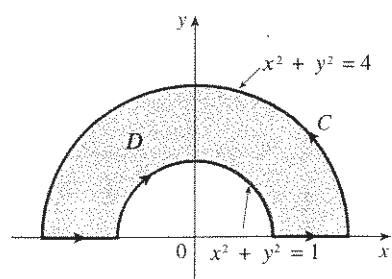


FIGURA 7

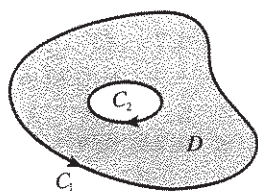


FIGURA 8

O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas. Observe que a fronteira C da região D na Figura 8 é constituída por duas curvas fechadas simples C_1 e C_2 . Admitiremos que essas curvas fronteiras são orientadas de modo que a região D esteja à esquerda quando percorremos a curva C . Então a orientação positiva é anti-horária na curva externa C_1 mas é horária na curva interna C_2 . Se dividirmos D em duas regiões D' e D'' pela introdução das retas mostradas na Figura 9 e então aplicarmos o Teorema de Green a cada uma das regiões D' e D'' , obteremos

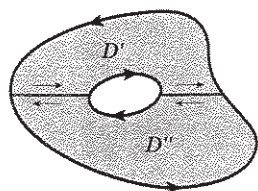


FIGURA 9

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_{\partial D'} P dx + Q dy + \int_{\partial D''} P dx + Q dy \end{aligned}$$

Como a integral de linha sobre a fronteira comum são em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy$$

que é o Teorema de Green para a região D .

EXEMPLO 5 □ Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}) / (x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

SOLUÇÃO Como C é um caminho fechado arbitrário contendo a origem em seu interior, é difícil calcular a integral dada diretamente. Vamos então considerar um círculo,

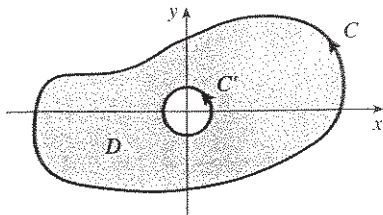


FIGURA 10

percorrido no sentido anti-horário C' com centro na origem e raio a , onde a é escolhido pequeno o suficiente para que C' esteja inteiramente contido em C (veja a Figura 10). Seja D a região limitada por C e C' . Então a orientação positiva da fronteira é $C \cup (-C')$ e, aplicando a versão geral do Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy + \int_{-C'} P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto
$$\int_C P dx + Q dy = \int_{C'} P dx + Q dy$$

ou seja,
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Agora podemos calcular facilmente essa última integral usando a parametrização dada por $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Então

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

Terminaremos esta seção utilizando o Teorema de Green para discutir um resultado que foi afirmado na seção anterior.

Esboço da Prova do Teorema 16.3.6 Estamos admitindo que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ é um campo vetorial em uma região simplesmente conexa D , que P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{em todo o } D$$

Se C é um caminho fechado simples qualquer em D e R é a região envolvida por C , o Teorema de Green nos dá

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R 0 dA = 0$$

Uma curva que não seja simples se intercepta em um ou mais pontos e pode ser quebrada em um certo número de curvas fechadas simples. Mostramos que as integrais de linha de \mathbf{F} sobre essas curvas simples são todas 0, e somando essas integrais podemos ver que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C . Portanto, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D pelo Teorema 16.3.3. Segue-se então que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo.

16.4 Exercícios

1-4 □ Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) diretamente e (b) utilizando o Teorema de Green.

1. $\oint_C xy^2 dx + x^3 dy$,
 C é o retângulo com vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 3)$ e $(0, 3)$

2. $\oint_C y dx - x dy$,
 C é o círculo com centro na origem e raio 1

3. $\oint_C xy dx + x^2 y^3 dy$,
 C é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$

4. $\oint_C x dx + y dy$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 1)$ a $(0, 0)$ e de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ e na parábola $y = 1 - x^2$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$

5-6 □ Verifique o Teorema de Green, usando um sistema algébrico computacional para calcular tanto a integral de linha como a integral dupla.

5. $P(x, y) = x^4 y^5$, $Q(x, y) = -x^7 y^6$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$

6. $P(x, y) = y^2 \sin x$, $Q(x, y) = x^2 \sin y$,
 C é formado pelo arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido do segmento de reta de $(1, 1)$ a $(0, 0)$

7-12 □ Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

7. $\int_C e^y dx + 2xe^y dy$,
 C é o quadrado de lados $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$

8. $\int_C x^2 y^2 dx + 4xy^3 dy$,
 C é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$ e $(0, 3)$

9. $\int_C (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy$,
 C é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

10. $\int_C xe^{-2x} dx + (x^4 + 2x^2 y^2) dy$,
 C é a fronteira da região entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

11. $\int_C y^3 dx - x^3 dy$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$

12. $\int_C \sin y dx + x \cos y dy$, C é a elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$

13-16 □ Use o teorema de Green para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y} \rangle$,
 C consiste no arco de curva $y = \sin x$ de $(0, 0)$ a $(\pi, 0)$ e do segmento de reta $(\pi, 0)$ a $(0, 0)$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y^2 \cos x, x^2 + 2y \sin x \rangle$,
 C é o triângulo de $(0, 0)$ a $(2, 6)$ a $(2, 0)$ a $(0, 0)$

15. $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^x + x^2 y, e^y - xy^2 \rangle$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$ orientada no sentido horário

16. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \ln(x^2 + y^2), 2 \operatorname{tg}^{-1}(y/x) \rangle$, C é a circunferência $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ orientada no sentido anti-horário

17. Use o Teorema de Green para achar o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y) \mathbf{i} + xy^2 \mathbf{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x até $(1, 0)$, em seguida ao longo de um segmento de reta até $(0, 1)$, e então de volta à origem ao longo do eixo y .

18. Uma partícula inicialmente no ponto $(-2, 0)$ se move ao longo do eixo x até $(2, 0)$, e então ao longo da semicircunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial. Utilize o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, x^3 + 3xy^2 \rangle$.

19. Use uma das fórmulas em (5) para achar a área sob um arco da cicloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

20. Se uma circunferência C de raio 1 rola ao longo do interior da circunferência $x^2 + y^2 = 16$, um ponto fixo P de C descreve uma curva chamada epicycloide, com equações paramétricas $x = 5 \cos t - \cos 5t$, $y = 5 \sin t - \sin 5t$. Faça o gráfico da epicycloide e use (5) para calcular a área da região que ela envolve.

21. (a) Se C é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2) , mostre que

$$\int_C x dy - y dx = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(b) Se os vértices de um polígono, na ordem anti-horária, são (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , \dots , (x_n, y_n) , mostre que a área do polígono é

$$A = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)]$$

(c) Determine a área do pentágono com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$ e $(-1, 1)$.

22. Seja D a região limitada por um caminho simples fechado C no plano xy . Utilize o Teorema de Green para provar que as coordenadas do centróide (\bar{x}, \bar{y}) de D são

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \int_C x^2 dy \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \int_C y^2 dx$$

onde A é a área de D .

23. Utilize o Exercício 22 para achar o centróide do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

24. Utilize o Exercício 22 para achar o centróide de uma região semicircular de raio a .

25. Uma lâmina plana com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa uma região do plano xy limitada por um caminho fechado simples C . Mostre que seus momentos de inércia em relação aos eixos são

$$I_x = -\frac{\rho}{3} \int_C y^3 dx \quad I_y = \frac{\rho}{3} \int_C x^3 dy$$

26. Utilize o Exercício 25 para achar o momento de inércia de um círculo de raio a com densidade constante ρ em relação a um diâmetro. (Compare com o Exemplo 4 da Seção 15.5.)
27. Se \mathbf{F} é o campo vetorial do Exemplo 5, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado simples que não passa nem contém a origem.
28. Complete a prova do Teorema de Green provando a Equação 3.
29. Utilize o Teorema de Green para provar a fórmula de mudança de variáveis para as integrais duplas (Fórmula 15.9.9) para o

caso onde $f(x, y) = 1$:

$$\iint_R dx dy = \iint_S \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Aqui R é a região do plano xy que corresponde à região S do plano uv sob a transformação dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$.

[Dica: note que o lado esquerdo é $A(R)$ e aplique a primeira parte da Equação 5. Converta a integral de linha sobre ∂R para uma integral sobre ∂S e aplique o Teorema de Green no plano uv .]

16.5 Rotacional e Divergência

Nesta seção definimos duas operações que podem ser realizadas com campos vetoriais que são básicas nas aplicações de cálculo vetorial à mecânica dos fluidos e à eletricidade e magnetismo. Cada operação lembra uma diferenciação, mas uma produz um campo vetorial enquanto a outra gera um campo escalar.

Rotacional

Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais de P , Q e R existem, então o **rotacional** de \mathbf{F} é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 definido por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Como ajuda à nossa memória, vamos reescrever a Equação 1, usando notação de operador. Introduziremos o operador diferencial vetorial ∇ ("del") como

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Ele tem a propriedade de, quando operando sobre uma função escalar, produzir o gradiente de f :

$$\nabla f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Se pensarmos em ∇ como um vetor com componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ e $\partial/\partial z$, podemos considerar o produto vetorial formal de ∇ pelo campo vetorial \mathbf{F} , como segue:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \text{rot } \mathbf{F} \end{aligned}$$

Assim, o modo mais fácil de lembrar a Definição 1 é pela expressão simbólica

2

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

EXEMPLO 1 □ Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} - y^2 \mathbf{k}$, determine o rotacional de \mathbf{F} .

SOLUÇÃO Usando a Equação 2, temos

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz) \right] \mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz) \right] \mathbf{k} \\ &= (-2y - xy) \mathbf{i} - (0 - x) \mathbf{j} + (yz - 0) \mathbf{k} \\ &= -y(2 + x) \mathbf{i} + x \mathbf{j} + yz \mathbf{k} \end{aligned}$$

□ A maioria dos sistemas algébricos computacionais tem um comando para calcular rotacional e divergente de campos vetoriais. Se você tem acesso a um CAS, use esses comandos para verificar as respostas dos exemplos e exercícios desta seção.

Lembre-se de que o gradiente de uma função f de três variáveis é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 de modo que podemos calcular seu rotacional. O próximo teorema diz que o rotacional do gradiente de um campo vetorial é $\mathbf{0}$.

3 Teorema Se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{rot } (\nabla f) = \mathbf{0}$$

Prova Temos

$$\begin{aligned} \text{rot } (\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} \\ &= 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

□ Note a semelhança com o que sabemos da Seção 12.4: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para todo vetor tridimensional \mathbf{a} .

pele Teorema de Clairaut. □

Como um campo vetorial conservativo é tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, o Teorema 3 pode ser reescrito como segue:

Se \mathbf{F} conservativo, então $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

E acabamos de obter um modo de verificar se um campo vetorial é conservativo ou não.

□ Compare isso com o Exercício 27 da Seção 16.3.

EXEMPLO 2 □ Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} - y^2 \mathbf{k}$ não é conservativo.

SOLUÇÃO No Exemplo 1 mostramos que

$$\text{rot } \mathbf{F} = -y(2 + x) \mathbf{i} + x \mathbf{j} + yz \mathbf{k}$$

Isso mostra que $\text{rot } \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ e portanto, pelo Teorema 3, \mathbf{F} não é conservativo. □

Em geral, o recíproco do Teorema 3 não é verdadeiro, mas o próximo teorema estabelece que, se \mathbf{F} for definido em todo o espaço, o recíproco vale. (Mais especificamente, o recíproco vale se o domínio é simplesmente conexo, ou seja, “não apresenta furos”.) O Teorema 4 é a versão tridimensional do Teorema 16.3.6. Sua prova requer o Teorema de Stokes, e um esboço dela será apresentado no final da Seção 16.8.

4 Teorema Se \mathbf{F} é um campo vetorial definido sobre todo \mathbb{R}^3 cujas funções componentes têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, então \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo.

EXEMPLO 3 □

- (a) Mostre que $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + 3xy^2z^2 \mathbf{k}$ é um campo vetorial conservativo.
 (b) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

SOLUÇÃO

- (a) Calculemos o rotacional de \mathbf{F} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix} \\ &= (6xyz^2 - 6xyz^2) \mathbf{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2) \mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Como $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ e o domínio de \mathbf{F} é \mathbb{R}^3 , \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo pelo Teorema 4.

- (b) A técnica para achar f foi dada na Seção 16.3. Temos

5 $f_x(x, y, z) = y^2z^3$

6 $f_y(x, y, z) = 2xyz^3$

7 $f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2$

Integrando (5) em relação a x , obtemos

8 $f(x, y, z) = xy^2z^3 + g(y, z)$

Diferenciando (8) em relação a y obtemos $f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z)$, e comparando com (6) temos $g_y(y, z) = 0$. Então, $g(y, z) = h(z)$ e

$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$

Então, de (7) temos $h'(z) = 0$. Portanto

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$$

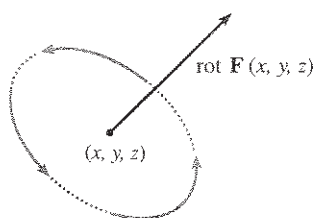


FIGURA 1

A razão para o nome *rotacional* é que o vetor rotacional está associado com rotações. Uma conexão está explicada no Exercício 35. Outra ocorre quando \mathbf{F} representa um campo de velocidade em mecânica dos fluidos (ver Exemplo 3 na Seção 16.1). Partículas perto (x, y, z) no fluido tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção de $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z)$, e o comprimento do vetor rotacional é a medida de quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo (veja a Figura 1). Se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ no ponto P , então o fluido não gira em P e \mathbf{F} é chamado **irrotacional** em P . Em outras palavras, não existe redemoinho ou sorvedouro em P . Se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, uma pequena roda com pás deslizaria com o fluido, mas não rodaria em redor de seu eixo. Se $\text{rot } \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, a roda com pás giraria em torno de seu eixo. Damos mais detalhes dessa explicação na Seção 16.8 como consequência do Teorema de Stokes.

■ Divergência

Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e existem $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ e $\partial R/\partial z$, então a **divergência de \mathbf{F}** é a função de três variáveis definida por

9

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Observe que $\text{rot } \mathbf{F}$ é um campo vetorial, mas $\text{div } \mathbf{F}$ é um campo escalar. Em termos do operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\mathbf{k}$, a divergência de \mathbf{F} pode ser escrita simbolicamente como o produto escalar de ∇ e \mathbf{F} :

10

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

EXEMPLO 4 □ Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$, ache $\text{div } \mathbf{F}$.

SOLUÇÃO Pela definição de divergência (Equação 9 ou 10), temos

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) \\ &= z + xz \end{aligned}$$

Se \mathbf{F} é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 , então $\text{rot } \mathbf{F}$ também é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 . Como tal, podemos calcular sua divergência. O próximo teorema mostra que o resultado é 0.

11 Teorema Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 e P , Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{div } \text{rot } \mathbf{F} = 0$$

□ Note a analogia com o produto misto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

Prova Usando as definições de divergência e rotacional temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

porque os termos se cancelam aos pares pelo Teorema de Clairaut. □

EXEMPLO 5 □ Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} - y^3 \mathbf{k}$ não pode ser escrito como o rotacional de outro campo vetorial, ou seja, $\mathbf{F} \neq \operatorname{rot} \mathbf{G}$.

SOLUÇÃO No Exemplo 4 mostramos que

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = z + xz$$

e portanto $\operatorname{div} \mathbf{F} \neq 0$. Se fosse verdade que $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$, pelo Teorema 11, teríamos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{G} = 0$$

que contradiz $\operatorname{div} \mathbf{F} \neq 0$. Portanto \mathbf{F} não é o rotacional de outro campo vetorial. □

□ A razão para essa interpretação de $\operatorname{div} \mathbf{F}$ será explicada no final da Seção 16.9 como consequência do Teorema da Divergência.

Novamente, a razão para o nome *divergência* pode ser entendida no contexto da mecânica dos fluidos. Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ é a velocidade de um líquido (ou gás), então $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)$ representa a taxa líquida de variação (com relação ao tempo) da massa do líquido (ou gás) fluindo no ponto (x, y, z) por unidade de volume. Em outras palavras, $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)$ mede a tendência de o fluido diferir do ponto (x, y, z) . Se $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, então \mathbf{F} é dito **incompressível**.

Outro operador diferencial aparece quando calculamos a divergência do gradiente de um campo vetorial ∇f . Se f é uma função de três variáveis, temos

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

e essa expressão aparece tão freqüentemente que vamos abreviá-la como $\nabla^2 f$. Esse operador

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

é chamado **operador de Laplace** ou laplaciano, por sua relação com a **equação de Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Podemos também aplicar o laplaciano ∇^2 a um campo vetorial

$$\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$$

em termos de seus componentes:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 P \mathbf{i} + \nabla^2 Q \mathbf{j} + \nabla^2 R \mathbf{k}$$

Formas Vetoriais do Teorema de Green

Os operadores divergência e rotacional nos permitem escrever o Teorema de Green em uma versão que será útil em nosso trabalho. Suponha uma região plana D , sua curva fronteira C e as funções P e Q que satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green. Então podemos considerar o campo vetorial $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$. Sua integral de linha é

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy$$

e seu rotacional é

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Portanto
$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

e podemos reescrever a equação do Teorema de Green na forma vetorial

$$\boxed{12} \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA$$

A Equação 12 expressa a integral de linha do componente tangencial de \mathbf{F} ao longo de C como uma integral dupla do componente vertical de $\text{rot } \mathbf{F}$ sobre a região D delimitada por C . Vamos derivar agora uma fórmula semelhante, envolvendo o componente *normal* de \mathbf{F} .

Se C é dado pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} \quad a \leq t \leq b$$

então o versor tangente (veja a Seção 13.2) é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{j}$$

Você pode verificar que o versor normal a C é dado por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{j}$$

(Veja a Figura 2.) Então, da Equação 16.2.3, temos

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t) |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t))y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t))y'(t) dt - Q(x(t), y(t))x'(t) dt \\ &= \int_C P dy - Q dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$

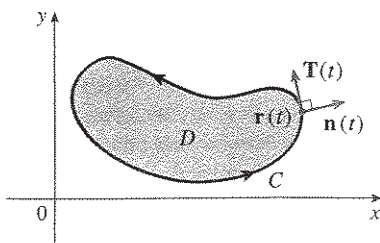


FIGURA 2

pelo Teorema de Green. Mas o integrando na integral dupla é a divergência de \mathbf{F} . Logo, temos uma segunda forma vetorial do Teorema de Green:

13

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) \, dA$$

Essa versão diz que a integral de linha do componente normal de \mathbf{F} ao longo de C é igual à integral dupla da divergência de \mathbf{F} sobre a região D delimitada por C .

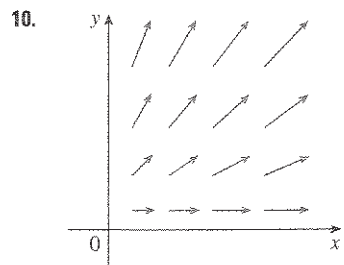
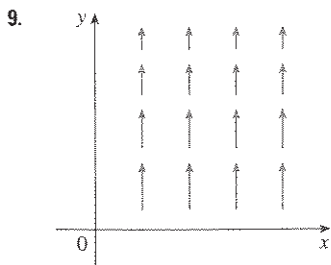
16.5 Exercícios

1-8 □ Determine (a) o rotacional e (b) a divergência do campo vetorial.

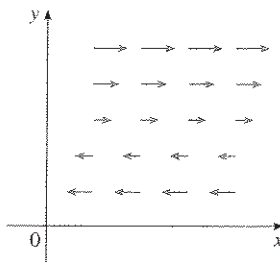
1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz \mathbf{i} - x^2y \mathbf{k}$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz \mathbf{i} + xy^2z \mathbf{j} + xyz^2 \mathbf{k}$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + (x + yz) \mathbf{j} + (xy - \sqrt{z}) \mathbf{k}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos xz \mathbf{j} - \sin xy \mathbf{k}$
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y \mathbf{i} + e^x \cos y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{j} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{k}$
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle \ln x, \ln(xy), \ln(xyz) \rangle$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle xe^{-y}, xz, ze^y \rangle$

9-11 □ O campo vetorial \mathbf{F} é mostrado no plano xy e é o mesmo em todos os planos horizontais. (Em outras palavras, \mathbf{F} é independente de z e seu componente z é 0.)

- (a) O $\operatorname{div} \mathbf{F}$ será positivo, negativo ou nulo? Explique.
- (b) Determine se o $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Se não, em que direção $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ aponta?



11.



12. Seja f um campo escalar e \mathbf{F} um campo vetorial. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.
- | | |
|--|---|
| (a) $\operatorname{rot} f$ | (b) $\operatorname{grad} f$ |
| (c) $\operatorname{div} \mathbf{F}$ | (d) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$ |
| (e) $\operatorname{grad} \mathbf{F}$ | (f) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{F})$ |
| (g) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ | (h) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} f)$ |
| (i) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F})$ | (j) $\operatorname{div}(\operatorname{div} \mathbf{F})$ |
| (k) $(\operatorname{grad} f) \times (\operatorname{div} \mathbf{F})$ | (l) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f))$ |

13-18 □ Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se conservativo, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3z^2 \mathbf{i} + \cos y \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k}$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy \mathbf{i} + (x^2 + 2yz) \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k}$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \mathbf{i} + \mathbf{j} + xe^x \mathbf{k}$
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = ye^{-x} \mathbf{i} + e^{-x} \mathbf{j} + 2z \mathbf{k}$
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \cos xy \mathbf{i} + x \cos xy \mathbf{j} - \operatorname{sen} z \mathbf{k}$

19. Existe um campo vetorial \mathbf{G} em \mathbb{R}^3 tal que $\operatorname{rot} \mathbf{G} = xy^2 \mathbf{i} + yz^2 \mathbf{j} + zx^2 \mathbf{k}$? Explique.

20. Existe um campo vetorial \mathbf{G} em \mathbb{R}^3 tal que $\operatorname{rot} \mathbf{G} = yz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$? Explique.

21. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x) \mathbf{i} + g(y) \mathbf{j} + h(z) \mathbf{k}$$

onde f, g e h são diferenciáveis, é irrotacional.

22. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z) \mathbf{i} + g(x, z) \mathbf{j} + h(x, y) \mathbf{k}$$

é incompressível.

23–29 □ Prove a identidade, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existam e sejam contínuas. Se f for um campo escalar e \mathbf{F}, \mathbf{G} forem campos vetoriais, então $f\mathbf{F}, \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ e $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ são definidos por

$$(f\mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{F}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{G}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \times \mathbf{G}(x, y, z)$$

23. $\text{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{div } \mathbf{F} + \text{div } \mathbf{G}$

24. $\text{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{rot } \mathbf{F} + \text{rot } \mathbf{G}$

25. $\text{div}(f\mathbf{F}) = f \text{div } \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

26. $\text{rot}(f\mathbf{F}) = f \text{rot } \mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

27. $\text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \text{rot } \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{G}$

28. $\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

29. $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{F}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$

30–32 □ Seja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $r = |\mathbf{r}|$.

30. Verifique as identidades.

- (a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$
- (b) $\nabla \cdot (r\mathbf{r}) = 4r$
- (c) $\nabla^2 r^3 = 12r$

31. Verifique as identidades.

- (a) $\nabla r = \mathbf{r}/r$
- (b) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$
- (c) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$
- (d) $\nabla \ln r = \mathbf{r}/r^2$

32. Se $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^p$, ache $\text{div } \mathbf{F}$. Existe um valor de p para o qual $\text{div } \mathbf{F} = 0$?

33. Use o Teorema de Green na forma da Equação 13 para provar a primeira identidade de Green:

$$\iint_D f \nabla^2 g \, dA = \oint_C f(\nabla g) \cdot \mathbf{n} \, ds - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g \, dA$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas. (A quantidade $\nabla g \cdot \mathbf{n} = D_n g$ aparece na integral de linha. Essa é a derivada direcional na direção do vetor normal \mathbf{n} e é chamada derivada normal de g .)

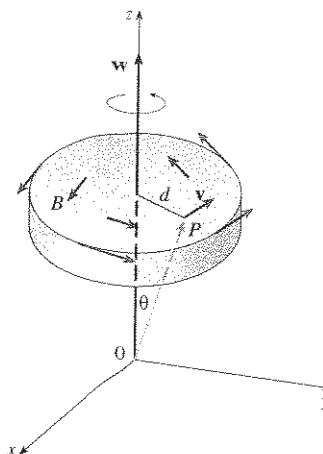
34. Use a primeira identidade de Green (Exercício 33) para provar a segunda identidade de Green:

$$\iint_D (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dA = \oint_C (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, ds$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas.

35. Este exercício demonstra a conexão entre vetor rotacional e rotações. Seja B um corpo rígido girando em torno do eixo z . A rotação pode ser descrita pelo vetor $\mathbf{w} = \omega \mathbf{k}$, onde ω é a rapidez angular de B , ou seja, a rapidez tangencial de qualquer ponto P em B dividido pela distância d do eixo de rotação. Seja $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ o vetor posição de P .

- (a) Considerando o ângulo θ da figura, mostre que o campo de velocidade de B é dado por $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$.
- (b) Mostre que $\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$.
- (c) Mostre que $\text{rot } \mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.



36. As equações de Maxwell relacionam o campo elétrico \mathbf{E} e o campo magnético \mathbf{H} quando eles variam com o tempo em uma região que não contenha carga nem corrente, como segue:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= 0 & \text{div } \mathbf{H} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

onde c é a rapidez da luz. Use essas equações para provar o seguinte:

- (a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$
- (b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$
- (c) $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ [Dica: Use o Exercício 29.]
- (d) $\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

37. Temos visto que todos os campos de vetores da forma $\mathbf{F} = \nabla g$ satisfazem a equação $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ e que todos os campos de vetores da forma $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$ satisfazem a equação $\text{div } \mathbf{F} = 0$ (supondo a continuidade das correspondentes derivadas parciais). Isso sugere a pergunta: existem algumas equações que todas as funções da forma $f = \text{div } \mathbf{G}$ devem satisfazer? Mostre que a resposta para essa pergunta é “não”, provando que toda função contínua f em \mathbb{R}^3 é o divergente de algum campo de vetores. [Dica: Tome $\mathbf{G}(x, y, z) = \langle g(x, y, z), 0, 0 \rangle$, onde $g(x, y, z) = \int_0^x f(t, y, z) \, dt$.]

16.6 Superfícies Paramétricas e Suas Áreas

Na Seção 8.2 (Volume I), descobrimos como calcular a área de uma superfície de revolução, e na Seção 15.6 determinamos a área de uma superfície com equação $z = f(x, y)$. Aqui discutiremos superfícies mais gerais, chamadas *superfícies paramétricas*, e calcularemos suas áreas.

Superfícies Paramétricas

De modo muito semelhante à nossa descrição de curvas espaciais por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ de um parâmetro único t , podemos descrever uma superfície por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ de dois parâmetros u e v . Suponhamos que

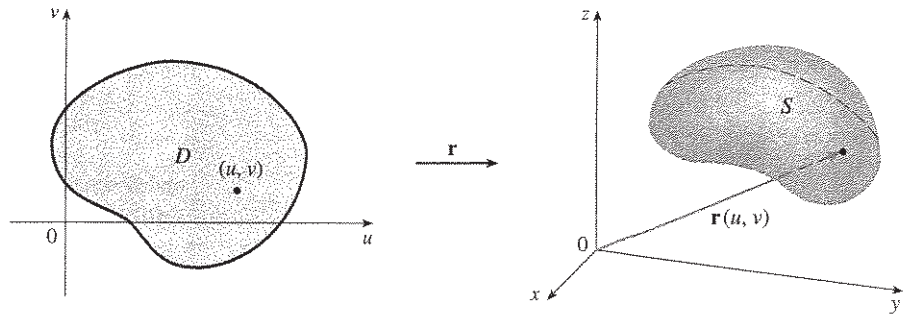
$$[1] \quad \mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$$

seja uma função com valor vetorial definida sobre uma região D do plano uv . Então x, y e z , componentes de \mathbf{r} , são funções das duas variáveis u e v com domínio D . O conjunto de todos os pontos (x, y, z) em \mathbb{R}^3 tais que

$$[2] \quad x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v)$$

e (u, v) variando sobre D , é denominado **superfície paramétrica** S , e as Equações 2 são chamadas **equações paramétricas** de S . Cada escolha de u e v dá um ponto sobre S ; ao fazermos todas as escolhas, obtemos todo o S . Em outras palavras, a superfície S é traçada pela ponta do vetor posição $\mathbf{r}(u, v)$ quando (u, v) se move na região D (veja a Figura 1).

FIGURA 1
Uma superfície paramétrica



EXEMPLO 1 □ Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + 2 \sin u \mathbf{k}$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas para essa superfície são

$$x = 2 \cos u \quad y = v \quad z = 2 \sin u$$

Para qualquer ponto (x, y, z) da superfície, temos

$$x^2 + z^2 = 4 \cos^2 u + 4 \sin^2 u = 4$$

Isso significa que todas as seções transversais paralelas ao plano xz (isto é, com y constante) são circunferências de raio 2. Como $y = v$ e não existe restrição ao valor de v , a superfície é um cilindro circular de raio 2 cujo eixo é o eixo y (veja a Figura 2). □

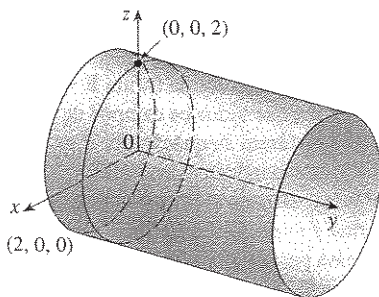


FIGURA 2

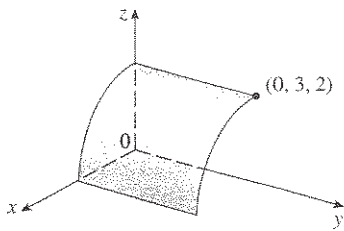


FIGURA 3

No Exemplo 1 não existiam restrições sobre os parâmetros u e v , e assim obtivemos o cilindro inteiro. Se, por exemplo, restringíssemos u e v , escrevendo o domínio dos parâmetros como

$$0 \leq u \leq \pi/2 \quad 0 \leq v \leq 3$$

então $x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq 3$, e obteríamos o quarto do cilindro de comprimento 3 ilustrado na Figura 3.

Se uma superfície paramétrica S é dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então existem duas famílias de curvas úteis contidas em S , uma família com u constante e outra com v constante. Essas famílias correspondem a retas verticais e horizontais no plano uv . Se mantivermos u constante impondo $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ se torna uma função vetorial com um único parâmetro v que define uma curva C_1 sobre S (veja a Figura 4).

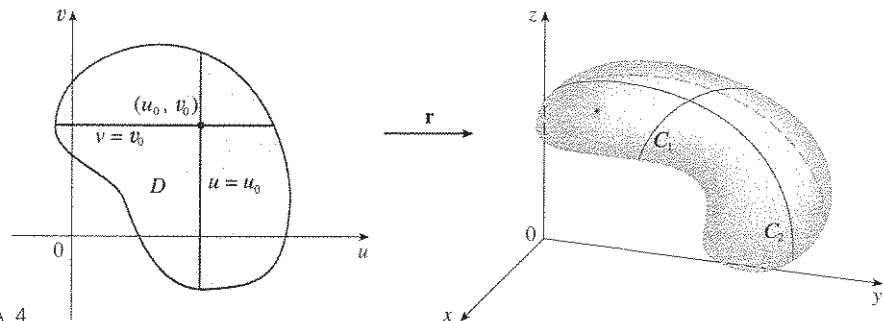


FIGURA 4

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos a curva C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ contida em S . A essa curva chamaremos **curva da grade**. (No Exemplo 1, as curvas da grade obtidas tomando u constante são retas horizontais, enquanto as curvas da grade obtidas com v constante são circunferências.) De fato, quando um computador traça o gráfico de uma superfície paramétrica, ele geralmente retrata a superfície plotando essas curvas da grade, como veremos no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 □ Use um sistema algébrico computacional para traçar o gráfico da superfície

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \sen v) \cos u, (2 + \sen v) \sen u, u + \cos v \rangle$$

Quais são as curvas da grade com u constante? E com v constante?

SOLUÇÃO Traçamos o gráfico do pedaço da superfície correspondente à janela de inspeção com os parâmetros delimitados por $0 \leq u \leq 4\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$, na Figura 5. Esse gráfico tem a aparência de um tubo espiral. Para identificar as curvas da grade, escrevemos as equações paramétricas correspondentes:

$$x = (2 + \sen v) \cos u \quad y = (2 + \sen v) \sen u \quad z = u + \cos v$$

Se v é constante, então $\sen v$ e $\cos v$ são constantes, e as equações paramétricas lembram as da hélice do Exemplo 4 da Seção 13.1. Assim as curvas da grade com v constante são as curvas espirais da Figura 5. Deduzimos que as curvas da grade com u constante precisam ser aquelas que parecem circunferência na figura. Maior evidência dessa afirmação é que, se mantivermos u fixo, $u = u_0$, então as equações $z = u_0 + \cos v$ mostram que os valores de z variam de $u_0 - 1$ até $u_0 + 1$. □

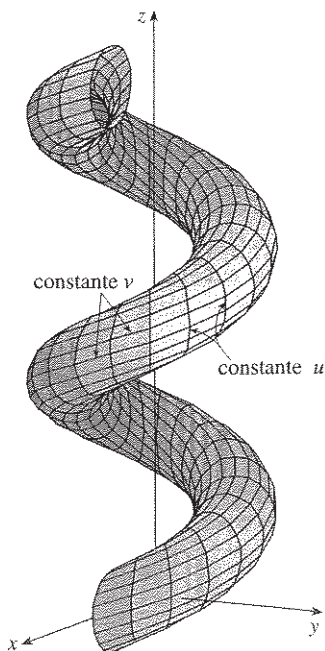


FIGURA 5

Nos Exemplos 1 e 2 nos foi dada uma equação vetorial e pedido o gráfico da superfície paramétrica correspondente. Nos exemplos seguintes, entretanto, teremos o problema mais desafiante de achar a função vetorial que representa uma superfície dada. No restante deste capítulo, com frequência teremos de fazer exatamente isso.

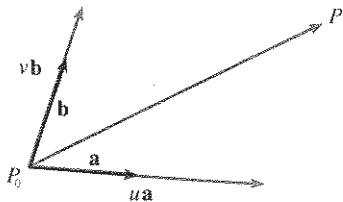


FIGURA 6

EXEMPLO 3 □ Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição \mathbf{r}_0 e que contenha dois vetores não paralelos \mathbf{a} e \mathbf{b} .

SOLUÇÃO Se P é um ponto qualquer do plano, podemos ir de P_0 até P andando uma distância orientada na direção do vetor \mathbf{a} e outra distância orientada na direção do \mathbf{b} . Portanto existem escalares u e v tais que $\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. (A Figura 6 ilustra como isso acontece, por meio da Regra do Paralelogramo, para o caso em que u e v são positivos. Veja também o Exercício 38 da Seção 12.2). Se \mathbf{r} é o vetor de posição de P , então

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

A equação vetorial do plano pode ser escrita como

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

onde u e v são números reais.

Se escrevermos $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, podemos escrever as equações paramétricas do plano através do ponto (x_0, y_0, z_0) como segue:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \quad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \quad z = z_0 + ua_3 + vb_3 \quad \square$$

□ Um dos usos de superfícies paramétricas está em fazer gráficos com computador. A Figura 7 mostra o resultado de tentar grafar a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ resolvendo a equação separadamente para z e grafando o topo e a base do hemisfério separadamente. Parte da esfera parece estar perdida por causa do sistema retangular de grades usado pelo computador. A Figura 8, muito melhor, foi produzida por um computador que usa as equações paramétricas encontradas no Exemplo 4.

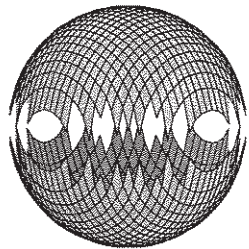


FIGURA 7

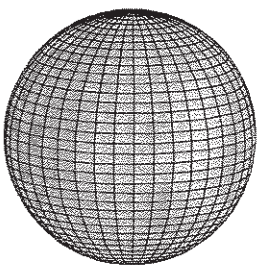


FIGURA 8

EXEMPLO 4 □ Determine uma representação paramétrica da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

SOLUÇÃO A esfera tem uma representação simples $\rho = a$ em coordenadas esféricas, e então vamos escolher ângulos ϕ e θ em coordenadas esféricas como parâmetros (veja a Seção 12.7). Tomando $\rho = a$ nas equações para conversão de coordenadas esféricas para coordenadas retangulares (Equação 12.7.3), obtemos

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \quad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad z = a \cos \phi$$

como equações paramétricas da esfera. A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}$$

Temos $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, de modo que o domínio dos parâmetros é o retângulo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. As curvas da grade com ϕ constante são as circunferências de latitude constante (incluindo o equador). As curvas da grade com θ constante são os meridianos (semicircunferências), que ligam os pólos norte e sul. □

EXEMPLO 5 □ Determine uma representação paramétrica do cilindro

$$x^2 + y^2 = 4 \quad 0 \leq z \leq 1$$

SOLUÇÃO O cilindro tem representação $r = 2$ em coordenadas cilíndricas; assim escolhemos como parâmetros θ e z em coordenadas cilíndricas. Então as equações paramétricas do cilindro são

$$x = 2 \cos \theta \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta \quad z = z$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 1$. □

EXEMPLO 6 □ Determine uma função vetorial que represente o parabolóide elíptico $z = x^2 + 2y^2$.

SOLUÇÃO Se olharmos para x e y como parâmetros, as equações paramétricas ficam simplesmente

$$x = x \quad y = y \quad z = x^2 + 2y^2$$

e a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (x^2 + 2y^2) \mathbf{k}$$

Em geral, uma superfície dada como o gráfico de uma função de x e y , ou seja, com equação da forma $z = f(x, y)$, pode sempre ser olhada como uma superfície paramétrica tomando x e y como parâmetros e escrevendo as equações paramétricas como

$$x = x \quad y = y \quad z = f(x, y)$$

Representações paramétricas (também chamadas parametrizações) de superfícies não são únicas. O próximo exemplo mostra dois modos de parametrizar um cone.

EXEMPLO 7 □ Determine uma representação paramétrica para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

SOLUÇÃO 1 Uma possível representação é obtida escolhendo-se x e y como parâmetros:

$$x = x \quad y = y \quad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim, a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{k}$$

SOLUÇÃO 2 Outra representação resulta da escolha como parâmetro das coordenadas polares r e θ . Um ponto (x, y, z) sobre o cone satisfaz $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, e $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$. Assim uma equação vetorial para o cone é

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + 2r \mathbf{k}$$

onde $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

□ Para alguns propósitos as representações paramétricas das Soluções 1 e 2 são igualmente boas, mas a Solução 2 pode ser preferível em certas situações. Se estivermos interessados somente na parte do cone que está abaixo do plano $z = 1$, por exemplo, tudo que devemos fazer na Solução 2 é mudar o domínio do parâmetro para

$$0 \leq r \leq \frac{1}{2} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

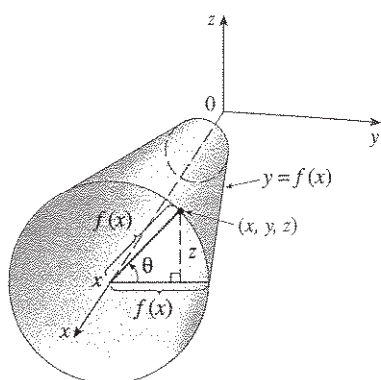


FIGURA 9

Superfícies de Revolução

Superfícies de revolução podem ser representadas na forma paramétrica e seus gráficos podem então ser desenhados, usando-se um computador. Por exemplo: vamos considerar a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x , onde $f(x) \geq 0$. Seja θ o ângulo de rotação, como mostrado na Figura 9. Se (x, y, z) é um ponto de S , então

$$\boxed{3} \quad x = x \quad y = f(x) \cos \theta \quad z = f(x) \sin \theta$$

Portanto, tomamos x e θ como parâmetros e olhamos as Equações 3 como equações paramétricas de S . O domínio do parâmetro é dado por $a \leq x \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

EXEMPLO 8 □ Determine as equações paramétricas para a superfície gerada pela rotação da curva $y = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, em torno do eixo x . Use essas equações para traçar o gráfico da superfície de revolução.

SOLUÇÃO Das Equações 3, as equações paramétricas são

$$x = x \quad y = \sin x \cos \theta \quad z = \sin x \sin \theta$$

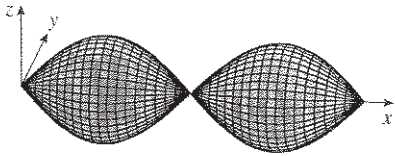


FIGURA 10

e o domínio do parâmetro é $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Usando um computador para plotar essas equações e girar a imagem, obtemos o gráfico da Figura 10.

Podemos adaptar as Equações 3 para representar uma superfície obtida pela revolução em torno do eixo x ou do eixo y (veja o Exercício 28).

Planos Tangentes

Agora vamos determinar o plano tangente a uma superfície paramétrica S traçada por uma função vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$$

em um ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Se mantivermos u constante tomando $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ se torna uma função vetorial de um único parâmetro v e define uma curva da grade C_1 sobre S (veja a Figura 11). O vetor tangente a C_1 em P_0 é obtido tomando-se a derivada parcial de \mathbf{r} em relação a v :

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{k}$$

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos a curva da grade C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está sobre S , e cujo vetor tangente em P_0 é

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \mathbf{k}$$

Se $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ não é $\mathbf{0}$, então a superfície S é dita **lisa** (sem “bicos”). Para uma superfície lisa, o **plano tangente** é o que contém os vetores tangentes \mathbf{r}_u e \mathbf{r}_v , e o vetor $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ é normal ao plano tangente.

EXEMPLO 9 □ Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas $x = u^2, y = v^2, z = u + 2v$ no ponto $(1, 1, 3)$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos calcular os vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} = 2u \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k} = 2v \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$$

Assim, o vetor normal ao plano tangente é

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v \mathbf{i} - 4u \mathbf{j} + 4uv \mathbf{k}$$

Note que o ponto $(1, 1, 3)$ corresponde ao valor dos parâmetros $u = 1$ e $v = 1$. Assim o vetor normal lá é

$$-2 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}$$

Portanto uma equação do plano tangente em $(1, 1, 3)$ é

$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

ou
$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

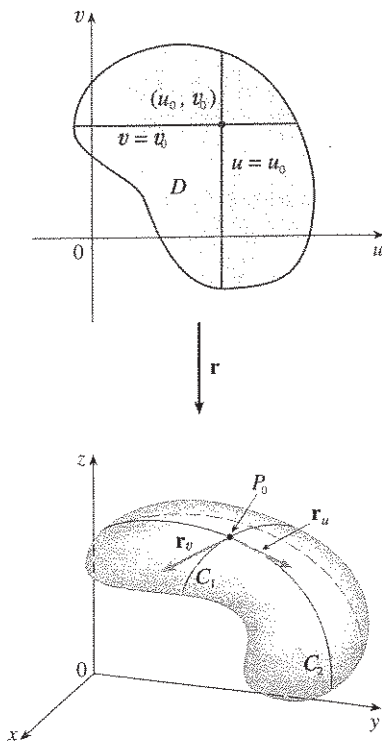


FIGURA 11

□ A Figura 12 mostra a superfície que se auto-intercepta do Exemplo 9 e seu plano tangente em $(1, 1, 3)$.

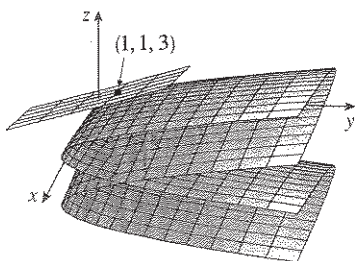


FIGURA 12

Área de Superfície

Definiremos agora a área de superfície de uma superfície paramétrica genérica dada pela Equação 1. Para simplificar, vamos considerar inicialmente uma superfície cujo domínio dos parâmetros D é um retângulo, que dividiremos em sub-retângulos R_{ij} . Vamos escolher (u_i^*, v_j^*) como o canto inferior esquerdo do retângulo R_{ij} (veja a Figura 13). O pedaço S_{ij} da superfície S que corresponde a R_{ij} é chamado de *retalho* e tem um ponto P_{ij} com vetor posição $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$ como um de seus cantos. Seja

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

os vetores tangentes em P_{ij} calculados pelas Equações 5 e 4.

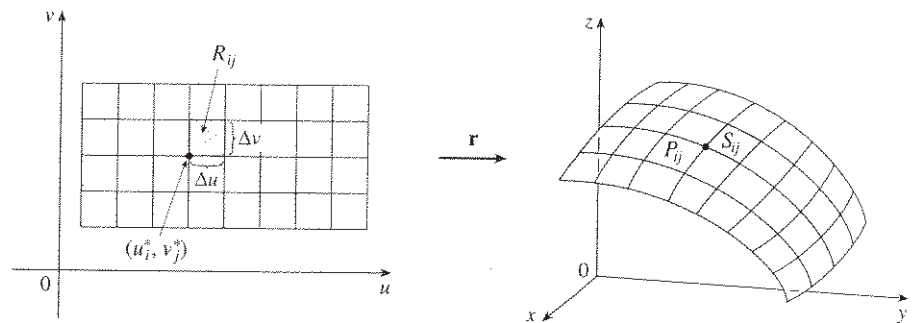
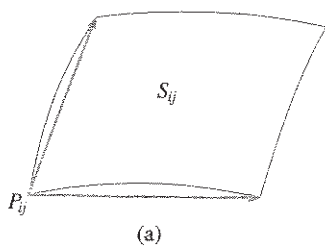
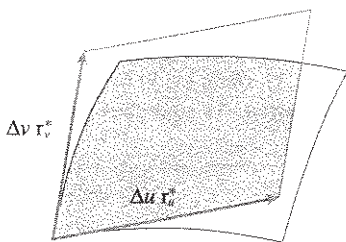


FIGURA 13
A imagem do sub-retângulo R_{ij} é o retalho S_{ij}



(a)



(b)

FIGURA 14
Aproximando um retalho por um paralelogramo

A Figura 14(a) mostra como os dois lados do retalho que se encontram em P_{ij} podem ser aproximados por vetores. Esses vetores, por sua vez, podem ser aproximados pelos vetores $\Delta u \mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v \mathbf{r}_v^*$ porque as derivadas parciais podem ser aproximadas pelos quocientes de diferenças. Assim, aproximamos S_{ij} pelo paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u \mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v \mathbf{r}_v^*$. Esse paralelogramo está representado na Figura 14(b) e está contido no plano tangente a S em P_{ij} . A área desse paralelogramo é

$$|(\Delta u \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v \mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| \Delta u \Delta v$$

e então uma aproximação da área de S é

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| \Delta u \Delta v$$

Nossa intuição nos diz que essa aproximação fica melhor quando aumentamos o número de sub-retângulos e reconhecemos a soma dupla como a soma de Riemann para a integral dupla $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$. Isso motiva a definição seguinte:

Definição Se uma superfície paramétrica lisa S é dada pela equação

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k} \quad (u, v) \in D$$

e S é coberto uma única vez quando (u, v) varre todo o domínio D dos parâmetros, então a **área de superfície** de S é

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

onde $\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$ $\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$

EXEMPLO 10 □ Determine a área de superfície da esfera de raio a .

SOLUÇÃO No Exemplo 4 achamos a representação paramétrica

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \quad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad z = a \cos \phi$$

onde o domínio dos parâmetros é

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Vamos calcular o produto vetorial dos vetores tangentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \operatorname{sen} \theta & -a \operatorname{sen} \phi \\ -a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & a \operatorname{sen} \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \mathbf{k} \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| &= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4 \phi \cos^2 \theta + a^4 \operatorname{sen}^4 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + a^4 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \phi} \\ &= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4 \phi + a^4 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \phi} = a^2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \phi} = a^2 \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

uma vez que $\operatorname{sen} \phi \geq 0$ para $0 \leq \phi \leq \pi$. Portanto, pela Definição 6, a área da esfera é

$$\begin{aligned} A &= \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \operatorname{sen} \phi d\phi d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi d\phi = a^2(2\pi)2 = 4\pi a^2 \end{aligned}$$

Área de Superfície do Gráfico de uma Função

Para o caso especial de uma superfície S com equação $z = f(x, y)$, onde (x, y) está em D e f tem derivadas parciais contínuas, tomamos x e y como parâmetros. As equações paramétricas são

$$x = x \quad y = y \quad z = f(x, y)$$

logo
$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \mathbf{k} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathbf{k}$$

e

$$\boxed{7} \quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Então, temos

$$\boxed{8} \quad |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

e a fórmula de área de superfície na Definição 6 fica

$$\boxed{9} \quad A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

□ Note a semelhança entre a fórmula da área da superfície da Equação 9 e a fórmula do comprimento do arco

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

da Seção 8.1 do Volume I.

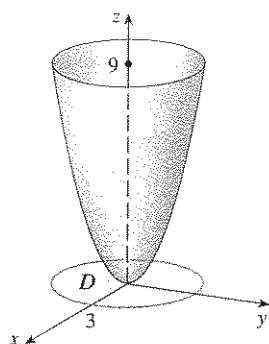


FIGURA 15

EXEMPLO 11 □ Determine a área da parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

SOLUÇÃO O plano intercepta o parabolóide na circunferência $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Portanto a superfície dada está acima do disco D com centro na origem e raio 3 (veja a Figura 15). Usando a Fórmula 9, temos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA \end{aligned}$$

Convertendo para as coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r \sqrt{1 + 4r^2} dr \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1) \end{aligned}$$

Precisamos ainda verificar se nossa definição da área de superfície (6) é coerente com a fórmula da área de superfície obtida no cálculo com uma única variável (8.2.4).

Consideremos a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x , onde $f(x) \geq 0$ e f' é contínua. Da Equação 3, sabemos que as equações paramétricas de S são

$$x = x \quad y = f(x) \cos \theta \quad z = f(x) \sin \theta \quad a \leq x \leq b \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Para calcular a área da superfície S , precisamos dos vetores tangentes

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f'(x) \cos \theta \mathbf{j} + f'(x) \sin \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -f(x) \sin \theta \mathbf{j} + f(x) \cos \theta \mathbf{k}$$

Então

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x) \cos \theta & f'(x) \sin \theta \\ 0 & -f(x) \sin \theta & f(x) \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= f(x)f'(x) \mathbf{i} - f(x) \cos \theta \mathbf{j} - f(x) \sin \theta \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e então} \quad |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| &= \sqrt{[f(x)]^2 [f'(x)]^2 + [f(x)]^2 \cos^2 \theta + [f(x)]^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{[f(x)]^2 [1 + (f'(x))^2]} = f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \end{aligned}$$

porque $f(x) \geq 0$. Portanto, a área de S é

$$\begin{aligned} A &= \iint_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| \, dA = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \, d\theta \\ &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \end{aligned}$$

Isso é precisamente a fórmula que foi usada para definir a área de uma superfície de revolução no cálculo com uma única variável (8.2.4).

16.6 Exercícios

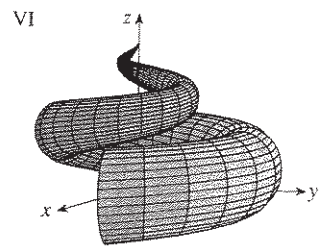
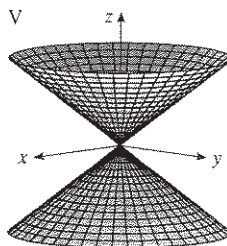
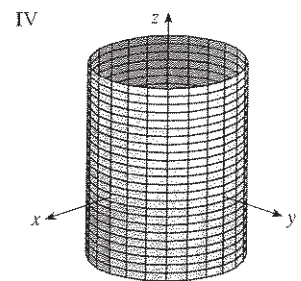
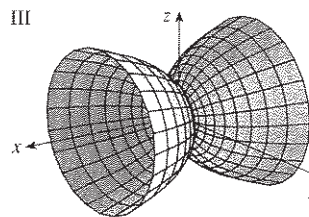
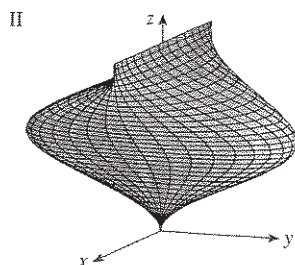
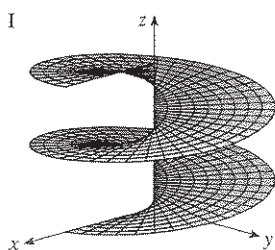
1-4 □ Identifique a superfície com equação vetorial dada.

1. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}$
2. $\mathbf{r}(u, v) = (1 + 2u) \mathbf{i} + (-u + 3v) \mathbf{j} + (2 + 4u + 5v) \mathbf{k}$
3. $\mathbf{r}(x, \theta) = \langle x, \cos \theta, \sin \theta \rangle$
4. $\mathbf{r}(x, \theta) = \langle x, x \cos \theta, x \sin \theta \rangle$

5-10 □ Use um computador para traçar o gráfico da superfície paramétrica. Imprima o resultado e indique sobre ele quais são as curvas da grade que têm u constante e quais têm v constante.

5. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^2 + 1, v^3 + 1, u + v \rangle, \quad -1 \leq u \leq 1, \quad -1 \leq v \leq 1$
6. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u^2, v^2 \rangle, \quad -1 \leq u \leq 1, \quad -1 \leq v \leq 1$
7. $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \sin^3 u \cos^3 v, \sin^3 v \rangle, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
8. $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v + \ln \operatorname{tg}(v/2) \rangle, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0,1 \leq v \leq 6,2$
9. $x = \cos u \sin 2v, \quad y = \sin u \sin 2v, \quad z = \sin v$
10. $x = u \sin u \cos v, \quad y = u \cos u \cos v, \quad z = u \sin v$

11-16 □ Case as equações com os gráficos identificados por I-VI e dê razões para sua resposta. Determine quais famílias de curvas da grade têm u constante e quais têm v constante.



11. $\mathbf{r}(u, v) = \cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$
12. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$
13. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$
14. $x = u^3, \quad y = u \sin v, \quad z = u \cos v$
15. $x = (u - \sin u) \cos v, \quad y = (1 - \cos u) \sin v, \quad z = u$
16. $x = (1 - u)(3 + \cos v) \cos 4\pi u,$
 $y = (1 - u)(3 + \cos v) \sin 4\pi u,$
 $z = 3u + (1 - u) \sin v$

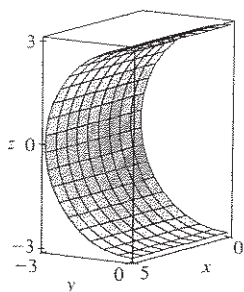
17-24 □ Determine uma representação paramétrica para a superfície.

17. O plano que passa pelo ponto $(1, 2, -3)$ e contém os vetores $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
18. A metade inferior $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

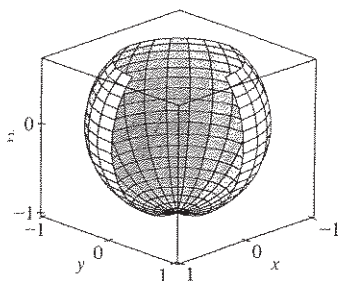
19. A parte do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que está à direita do plano xz
20. A parte do parabolóide elíptico $x + y^2 + 2z^2 = 4$ que está em frente ao plano $x = 0$
21. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
22. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está entre os planos $z = -2$ e $z = 2$
23. A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 5$
24. A parte do plano $z = x + 3$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

25–26 Use um sistema algébrico computacional para produzir um gráfico que se pareça com o que está dado.

25.



26.



27. Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva $y = e^{-x}$, $0 \leq x \leq 3$, em torno do eixo x e use-as para traçar o gráfico da superfície.
28. Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva $x = 4y^2 - y^4$, $-2 \leq y \leq 2$, em torno do eixo y e use-as para traçar o gráfico da superfície.
29. (a) O que acontecerá com o tubo espiral do Exemplo 2 (veja a Figura 5) se substituirmos $\cos u$ por $\sin u$ e $\sin u$ por $\cos u$?
(b) O que acontecerá se substituirmos $\cos u$ por $\cos 2u$ e $\sin u$ por $\sin 2u$?
30. A superfície com as equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos \theta + r \cos(\theta/2) \\ y &= 2 \sin \theta + r \cos(\theta/2) \\ z &= r \sin(\theta/2) \end{aligned}$$

onde $-\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é chamada **Tira de Möbius**. Trace o gráfico dessa superfície com vários pontos de vista. O que há de estranho nela?

31–34 □ Determine uma equação do plano tangente à superfície paramétrica dada no ponto específico. Se você tiver um programa que trace o gráfico de superfícies paramétricas, use um computador para traçar a superfície e o plano tangente.

31. $x = u + v$, $y = 3u^2$, $z = u - v$; $(2, 3, 0)$
32. $x = u^2$, $y = v^2$, $z = uv$; $u = 1, v = 1$
33. $\mathbf{r}(u, v) = u^2 \mathbf{i} + 2u \sin v \mathbf{j} + u \cos v \mathbf{k}$; $u = 1, v = 0$
34. $\mathbf{r}(u, v) = uv \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \cos u \mathbf{k}$; $u = 0, v = \pi$

35–45 □ Determine a área da superfície.

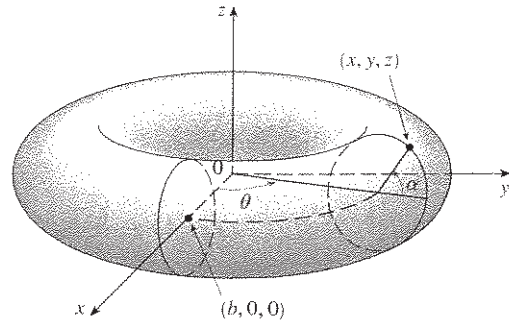
35. A parte do plano $x + 2y + z = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$
36. A parte do plano com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle 1 + v, u - 2v, 3 - 5u + v \rangle$ que é dada por $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$
37. A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$
38. A parte da superfície $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, e $(2, 1)$
39. A parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$
40. A parte do parabolóide $x = y^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $y^2 + z^2 = 9$
41. A parte da superfície $y = 4x + z^2$ que está entre os planos $x = 0, x = 1, z = 0$ e $z = 1$
42. A parte do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$
43. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$
44. A helicóide (ou rampa espiral) com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$
45. A superfície com equações paramétricas $x = uv$, $y = u + v$, $z = u - v$, $u^2 + v^2 \leq 1$

46–47 □ Encontre a área da superfície com precisão de quatro casas decimais, expressando-a em termos de uma integral de função de uma variável real e usando sua calculadora para estimar a integral.

46. A parte da superfície $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
47. A parte da superfície $z = e^{-x^2 - y^2}$ que está acima do círculo $x^2 + y^2 \leq 4$

48. Determine, com precisão até a quarta casa decimal, a área da parte da superfície $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está acima do quadrado $|x| + |y| \leq 1$. Ilustre, traçando o gráfico dessa porção de superfície.

49. (a) Use a Regra do Ponto Médio para as integrais duplas (veja a Seção 15.1) com quatro quadrados para estimar a área de superfície da parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está acima do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.
 (b) Use um sistema algébrico computacional para aproximar a área de superfície da parte (a) até a quarta casa decimal. Compare com sua resposta da parte (a).
50. Determine a área da superfície de equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \sin^3 u \cos^3 v, \sin^3 v \rangle$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Estabeleça sua resposta com precisão de quatro casas decimais.
51. Determine com exatidão a área da superfície $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 1$.
52. (a) Estabeleça, mas não calcule, a integral dupla da área da superfície com as equações paramétricas $x = au \cos v$, $y = bu \sin v$, $z = u^2$, $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
 (b) Elimine os parâmetros para mostrar que a superfície é um parabolóide elíptico e estabeleça outra integral dupla que fornece sua área.
 (c) Use as equações paramétricas da parte (a) com $a = 2$ e $b = 3$ para traçar o gráfico da superfície.
 (d) Para o caso $a = 2$, $b = 3$, use um sistema algébrico computacional para achar a área de superfície com precisão até a quarta casa decimal.
53. (a) Mostre que as equações paramétricas $x = a \sin u \cos v$, $y = b \sin u \sin v$, $z = c \cos u$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$, representam um elipsóide.
 (b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do elipsóide para o caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
 (c) Estabeleça, mas não calcule, a integral dupla que dá a área de superfície da parte do elipsóide da parte (b).
54. (a) Mostre que as equações paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \sin v$, $z = c \sinh u$, representam um hiperbolóide de uma folha.
 (b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do hiperbolóide para o caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
 (c) Estabeleça, mas não calcule, a integral dupla que dá a área de superfície da porção do hiperbolóide da parte (b) que está entre os planos $z = -3$ e $z = 3$.
55. Determine a área da superfície do Exercício 7 com precisão até a quarta casa decimal.
56. (a) Determine a representação paramétrica do toro obtido girando em torno do eixo z o círculo do plano xz com centro em $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$. [Dica: tome como parâmetros os ângulos θ e α mostrados na figura.]
 (b) Use as equações paramétricas achadas na parte (a) para traçar o gráfico do toro para diversos valores de a e b .
 (c) Use a representação paramétrica da parte (a) para achar a área de superfície do toro.



16.7 Integrais de Superfície

A relação entre integral de superfície e área de superfície é semelhante àquela entre a integral de linha e o comprimento de arco. Suponha que f seja uma função de três variáveis cujo domínio inclui uma superfície S . Dividimos S em retalhos S_{ij} com área ΔS_{ij} . Calculamos f em um ponto P_{ij}^* de cada retalho, multiplicamos por ΔS_{ij} e formamos a soma

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$$

Então tomamos o limite quando o tamanho dos retalhos se aproxima de 0 e definimos a **integral de superfície de f sobre a superfície S** como

$$\boxed{1} \quad \iint_S f(x, y, z) \, dS = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$$

Note a analogia com a definição de integral de linha (16.2.2) e também a analogia com a definição da integral dupla (15.1.5).

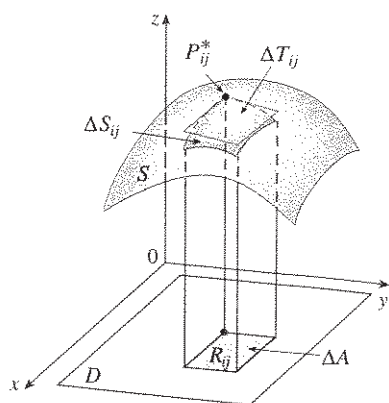


FIGURA 1

Para calcular a integral de superfície da Equação 1 aproximamos a área do retalho ΔS_{ij} pela área ΔT_{ij} de um paralelogramo aproximante no plano tangente, e o limite é a integral dupla. Explicaremos agora detalhes para dois tipos de superfícies: gráficos e superfícies paramétricas.

Gráficos Se a superfície S é o gráfico de uma função de duas variáveis, então ela tem uma equação da forma $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, ilustrada na Figura 1. Vamos inicialmente assumir que o domínio dos parâmetros D seja um retângulo e vamos dividir esse retângulo em sub-retângulos pequenos R_{ij} todos com o mesmo tamanho. O retalho S_{ij} está diretamente acima do retângulo R_{ij} , e o ponto P_{ij}^* de S_{ij} é da forma $(x_i^*, y_j^*, g(x_i^*, y_j^*))$. Como para a área de superfície na Seção 15.6, aproximamos

$$\Delta S_{ij} \approx \Delta T_{ij} = \sqrt{[g_x(x_i, y_j)]^2 + [g_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \Delta A$$

De fato, pode ser provado que, se f é contínua sobre S e g tem derivadas parciais contínuas, então a Definição 1 fica

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i^*, y_j^*, g(x_i^*, y_j^*)) \sqrt{[g_x(x_i, y_j)]^2 + [g_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \Delta A \\ &= \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{[g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2 + 1} dA \end{aligned}$$

Essa fórmula, válida mesmo quando D não é retangular, é geralmente escrita da seguinte maneira:

$$\boxed{2} \quad \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

Fórmulas semelhantes se aplicam quando é mais conveniente projetar S sobre o plano yz ou o plano xz . Por exemplo, se S for uma superfície com equação $y = h(x, z)$ e D for sua projeção no plano xz , então

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, h(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1} dA$$

EXEMPLO 1 □ Calcule $\iint_S y dS$, onde S é a superfície $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ (veja a Figura 2).

SOLUÇÃO Como $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$
a Fórmula 2 dá

$$\begin{aligned} \iint_S y dS &= \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA \\ &= \int_0^1 \int_0^2 y \sqrt{1 + 1 + 4y^2} dy dx \\ &= \int_0^1 dx \sqrt{2} \int_0^2 y \sqrt{1 + 2y^2} dy \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{4}\right) \left[(1 + 2y^2)^{3/2} \right]_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

As integrais de superfície têm aplicações semelhantes àquelas das integrais consideradas previamente. Por exemplo: se uma folha fina (digamos, uma folha de alumínio) tem o formato de uma superfície S e a densidade (massa por unidade de área) em um ponto (x, y, z) for $\rho(x, y, z)$, então a massa total da folha será

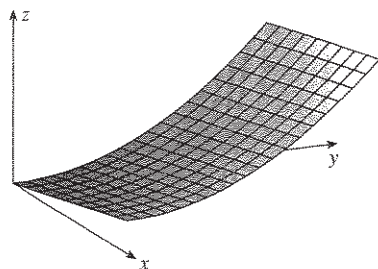


FIGURA 2

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) \, dS$$

e o centro de massa será $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x\rho(x, y, z) \, dS \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y\rho(x, y, z) \, dS \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z\rho(x, y, z) \, dS$$

Momentos de inércia também podem ser definidos como anteriormente (veja o Exercício 37).

▣ **Superfícies Paramétricas** Suponha que a superfície S tenha equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k} \quad (u, v) \in D$$

Vamos admitir inicialmente que o domínio dos parâmetros D seja um retângulo e vamos dividi-lo em sub-retângulos R_{ij} com dimensões Δu e Δv . Então a superfície ficará dividida em retalhos correspondentes S_{ij} com áreas ΔS_{ij} , como na Figura 3.

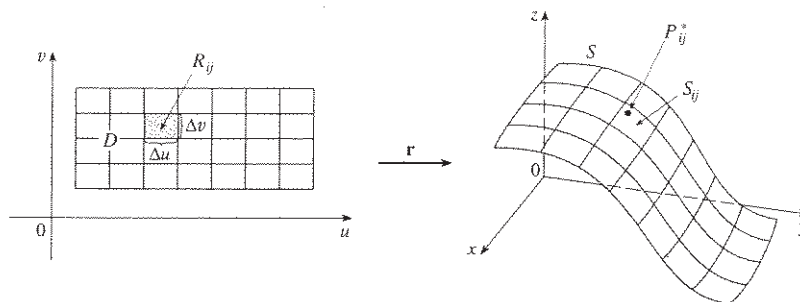


FIGURA 3

Em nossa discussão sobre a área de superfície na Seção 16.6, fizemos a aproximação

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

onde
$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

são os vetores tangentes em um canto de S_{ij} . Se os componentes são contínuos e \mathbf{r}_u e \mathbf{r}_v são não nulos e não paralelos no interior de D , pode ser mostrado da Definição 1, mesmo quando D não seja retangular, que

3

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA$$

Isso deve ser comparado com a fórmula para a integral de linha:

$$\int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| \, dt$$

Observe também que

$$\iint_S 1 \, dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA = A(S)$$

A Fórmula 3 nos permite calcular a integral de superfície, convertendo-a em uma integral dupla sobre o domínio dos parâmetros D . Quando usamos essa fórmula, precisamos lembrar que $f(\mathbf{r}(u, v))$ deve ser calculada escrevendo-se $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ na fórmula de $f(x, y, z)$.

Admitimos que a superfície é coberta somente uma vez quando (u, v) varia em D . O valor da integral de superfície não depende da parametrização usada.

Qualquer superfície S com equação $z = g(x, y)$ pode ser olhada como uma superfície paramétrica com equações paramétricas

$$x = x \quad y = y \quad z = g(x, y)$$

e da Equação 16.6.8 temos

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Portanto, nesse caso, a Fórmula 3 se transforma na Fórmula 2.

EXEMPLO 2 □ Calcule a integral de superfície $\iint_S x^2 dS$, onde S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 4 da Seção 16.6, utilizamos a representação paramétrica

$$x = \text{sen } \phi \cos \theta \quad y = \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \quad z = \cos \phi \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ou seja, $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \text{sen } \phi \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$

Como no Exemplo 10 da Seção 16.6, podemos obter

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \text{sen } \phi$$

Portanto, pela Fórmula 3,

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 dS &= \iint_D (\text{sen } \phi \cos \theta)^2 |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}^2 \phi \cos^2 \theta \text{sen } \phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^\pi \text{sen}^3 \phi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta \int_0^\pi (\text{sen } \phi - \text{sen } \phi \cos^2 \phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2}[\theta + \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta]_0^{2\pi} \left[-\cos \phi + \frac{1}{3} \cos^3 \phi\right]_0^\pi = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Se S é uma superfície lisa por trechos, ou seja, uma união finita de superfícies lisas S_1, S_2, \dots, S_n que se interceptam somente ao longo de suas fronteiras, então a integral de superfície de f sobre S é definida por

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \dots + \iint_{S_n} f(x, y, z) dS$$

EXEMPLO 3 □ Calcule $\iint_S z dS$, onde S é a superfície cujo lado S_1 é dado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, cujo fundo S_2 é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ no plano $z = 0$, e cujo topo S_3 é a parte do plano $z = 1 + x$ que está acima de S_2 .

SOLUÇÃO A superfície S é mostrada na Figura 4. (Trocamos a posição usual dos eixos para enxergar melhor S .) Para S_1 usamos como parâmetros θ e z (veja o Exemplo 5 da Seção 16.6) e escrevemos suas equações paramétricas como

$$x = \cos \theta \quad y = \text{sen } \theta \quad z = z$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 1 + x = 1 + \cos \theta$

Portanto

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \theta \mathbf{j}$$

$$e \quad |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta} = 1$$

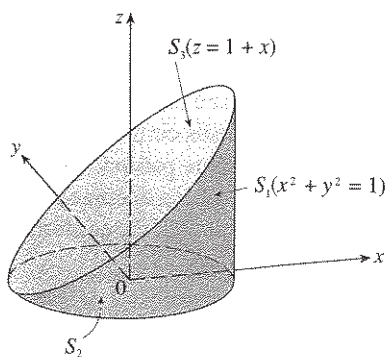


FIGURA 4

Então, a integral de superfície sobre S_1 é

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} z \, dS &= \iint_D z |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} z \, dz \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)^2 \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)] \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Como S_2 está no plano $z = 0$, temos

$$\iint_{S_2} z \, dS = \iint_{S_2} 0 \, dS = 0$$

A superfície do topo S_3 está acima do círculo D e é parte do plano $z = 1 + x$. Portanto, tomando $g(x, y) = 1 + x$ na Fórmula 2 e transformando para coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} z \, dS &= \iint_D (1 + x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r \cos\theta) \sqrt{1 + 1 + 0} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r + r^2 \cos\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos\theta\right) \, d\theta = \sqrt{2} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \iint_S z \, dS &= \iint_{S_1} z \, dS + \iint_{S_2} z \, dS + \iint_{S_3} z \, dS \\ &= \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2}\pi = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi \end{aligned}$$

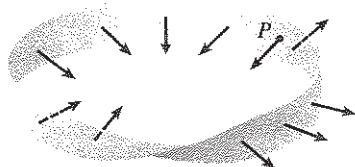


FIGURA 5
Uma faixa de Möbius

Superfícies Orientadas

Para definir as integrais de superfície de campos de vetores, precisamos desconsiderar as superfícies não-orientáveis, tais como a faixa de Möbius mostrada na Figura 5. [Ela recebeu esse nome em homenagem ao geômetra alemão August Möbius (1790-1868).] Você pode construir uma faixa sozinho, tomando uma tira de papel retangular e comprida, dando uma meia-volta (em uma de suas extremidades) e grudando os lados mais curtos, como na Figura 6. Se uma formiga resolvesse caminhar sobre a faixa de Möbius partindo de um ponto P , ela terminaria sobre o “outro lado” da faixa (isto é, com sua cabeça apontando na direção oposta à de sua partida). E, mais ainda, se prosseguisse sua caminhada, conforme

B
A

C
D

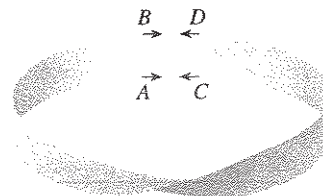


FIGURA 6
Construção de uma faixa de Möbius

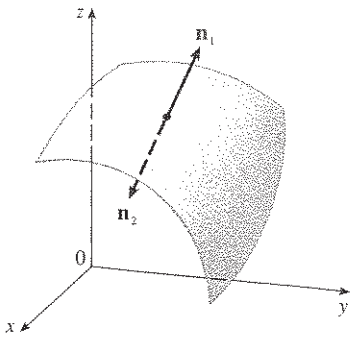


FIGURA 7

iniciara, ela retornaria ao mesmo ponto P sem nunca ter cruzado uma borda. (Se você construir uma faixa de Möbius, tente traçar com um lápis um caminho passando pelo meio dela.) Portanto, uma faixa de Möbius realmente tem um lado só. Você pode fazer o gráfico da faixa de Möbius usando as equações paramétricas do Exercício 30 da Seção 16.6.

Daqui para a frente consideraremos somente as superfícies orientáveis (com dois lados). Começaremos com uma superfície S que tenha um plano tangente em todos os pontos (x, y, z) sobre S (exceto nos pontos da fronteira). Em cada ponto (x, y, z) existem dois versores normais \mathbf{n}_1 e $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ (veja a Figura 7). Se for possível escolher um versor normal \mathbf{n} em cada ponto (x, y, z) de modo que \mathbf{n} varie continuamente sobre S , então S é chamada **superfície orientada**, e a escolha dada de \mathbf{n} fornece a S uma **orientação**. Existem duas possíveis orientações para qualquer superfície orientada (veja a Figura 8).

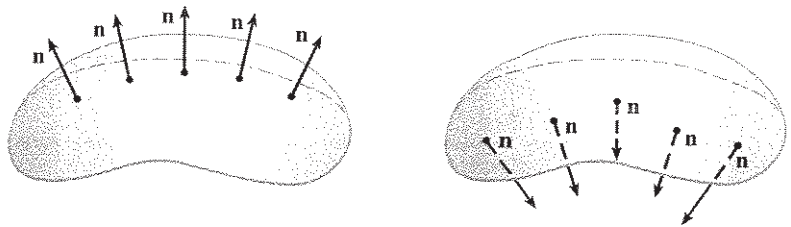


FIGURA 8

As duas orientações de uma superfície orientada

Para uma superfície $z = g(x, y)$ dada como o gráfico de g , usamos a Equação 16.6.7 e vemos que a orientação induzida é dada pelo versor normal

$$\boxed{4} \quad \mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

Como a componente na direção de \mathbf{k} é positiva, isso fornece a orientação *para cima* da superfície.

Se S for uma superfície orientada lisa dada na forma paramétrica pela equação vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então ela está automaticamente suprida com a orientação do versor normal.

$$\boxed{5} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

e a orientação oposta é dada por $-\mathbf{n}$. Por exemplo: no Exemplo 4 da Seção 16.6 encontramos a representação paramétrica

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}$$

para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Então no Exemplo 10 da Seção 16.6 achamos que

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + a^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

e

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \sin \phi$$

Assim a orientação induzida por $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ é definida pelo versor normal

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} = \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k} = \frac{1}{a} \mathbf{r}(\phi, \theta)$$

Observe que \mathbf{n} aponta na mesma direção que o vetor posição, ou seja, para fora da esfera (veja a Figura 9). A orientação oposta (para dentro) podia ser obtida (veja a Figura 10) se tivéssemos trocado a ordem dos parâmetros, porque $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$.

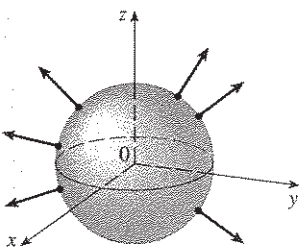


FIGURA 9

Orientação positiva

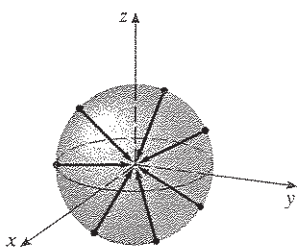


FIGURA 10

Orientação negativa

Para uma **superfície fechada**, isto é, uma superfície que seja a fronteira de uma região sólida E , a convenção é que a **orientação positiva** é aquela para a qual os vetores normais *apontam para fora* de E , e os vetores normais que apontam para dentro correspondem à orientação negativa (vejam as Figuras 9 e 10).

Integrais de Superfície de Campos Vetoriais

Suponha que S seja uma superfície orientada com vetor normal \mathbf{n} , e imagine um fluido com densidade $\rho(x, y, z)$ e campo de velocidade $\mathbf{v}(x, y, z)$ fluindo através de S . (Pense em S sendo uma superfície imaginária que não impeça a passagem do líquido, como uma rede de pesca em uma corrente de água.) Então a taxa de vazão (massa por unidade de tempo) por unidade de área é $\rho\mathbf{v}$. Se dividirmos S em pequenos retalhos S_{ij} , como na Figura 11 (compare com as Figuras 1 e 3), então S_{ij} é aproximadamente plana, de modo que podemos aproximar a massa de fluido que passa por S_{ij} na direção da normal \mathbf{n} por unidade de tempo pela quantidade

$$(\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A(S_{ij})$$

onde ρ , \mathbf{v} e \mathbf{n} são calculados em algum ponto de S_{ij} . (Lembre-se de que o componente do vetor $\rho\mathbf{v}$ na direção do vetor \mathbf{n} é $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.) Somando essas quantidades e tomando o limite, obtemos, de acordo com a Definição 1, a integral de superfície da função $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ sobre S :

$$\boxed{5} \quad \iint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, dS$$

e é interpretada fisicamente como a taxa de vazão através de S .

Se escrevermos $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, então \mathbf{F} é também um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e a integral da Equação 6 fica

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Uma integral de superfície dessa forma aparece freqüentemente em física, mesmo quando \mathbf{F} não é $\rho\mathbf{v}$, e é denominada *integral de superfície* (ou *integral de fluxo*) de \mathbf{F} sobre S .

7 Definição Se \mathbf{F} for um campo vetorial contínua definido sobre uma superfície orientada S com vetor normal \mathbf{n} , então a **integral de superfície de \mathbf{F} sobre S** é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Essa integral é também chamada **fluxo** de \mathbf{F} através de S .

Em palavras, a Definição 7 diz que a integral de superfície de um campo vetorial sobre S é igual à integral de superfície de seu componente normal sobre S (como definido previamente).

Gráficos No caso da superfície S ser dada por um gráfico $z = g(x, y)$, podemos determinar \mathbf{n} notando que S também é a superfície de nível $f(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$. Sabemos que o gradiente $\nabla f(x, y, z)$ é normal a essa superfície em (x, y, z) e assim o vetor normal é

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|} = \frac{-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2 + 1}}$$

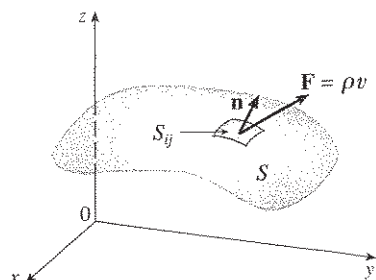


FIGURA 11

Como o componente na direção \mathbf{k} é positivo, o vetor normal aponta para cima. Se usarmos agora a Fórmula 2 para calcular a integral de superfície (7) com

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$$

obteremos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_D (P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}) \cdot \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}} \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dA \end{aligned}$$

ou

$$\boxed{8} \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

Para um vetor normal apontando para baixo, multiplicamos por -1 . Fórmulas semelhantes podem ser obtidas se S for dada por $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$ (veja os Exercícios 33 e 34).

EXEMPLO 4 □ Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ e S é a fronteira da região sólida E contida pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.

SOLUÇÃO A superfície S é constituída pela superfície parabólica do topo S_1 e pela superfície circular do fundo S_2 (veja a Figura 12). Como S é uma superfície fechada, usamos a convenção de orientação positiva (para fora). Isso significa que S_1 é orientada para cima e podemos usar a Equação 8 com D sendo a projeção de S_1 sobre o plano xy , ou seja, o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Como

$$P(x, y, z) = y \quad Q(x, y, z) = x \quad R(x, y, z) = z = 1 - x^2 - y^2$$

$$\text{sobre } S_1 \text{ e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -2x \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -2y$$

temos

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA \\ &= \iint_D [-y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2] dA \\ &= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4r^2 \cos \theta \sin \theta - r^2) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3 + 4r^3 \cos \theta \sin \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \cos \theta \sin \theta \right) d\theta = \frac{1}{4}(2\pi) + 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

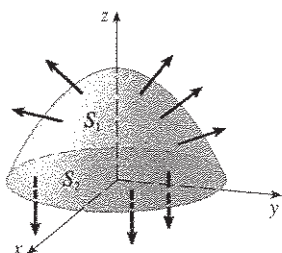


FIGURA 12

O círculo S_2 é orientado para baixo, então seu vetor normal é $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ e temos

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) dS = \iint_D (-z) dA = \iint_D 0 dA = 0$$

já que $z = 0$ sobre S_2 . Finalmente, calculamos, pela definição, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como a soma das integrais de superfície de \mathbf{F} sobre S_1 e S_2 :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

☐ **Superfícies Paramétricas** Se S é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então \mathbf{n} é dada pela Equação 5, e da Definição 7 e Equação 3, temos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} dS \\ &= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \right] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA \end{aligned}$$

onde D é o domínio dos parâmetros. Então, temos

☐ Compare a Equação 9 com a expressão semelhante para o cálculo da integral de linha de campos vetoriais da Definição 16.2.13:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA$$

Note que, em vista da Equação 16.6.7, temos

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

e a Fórmula 8 é um caso especial da Fórmula 9.

EXEMPLO 5 ☐ Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Usando a representação paramétrica

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \text{sen } \phi \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \phi \text{sen } \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k} \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos \phi \mathbf{i} + \text{sen } \phi \text{sen } \theta \mathbf{j} + \text{sen } \phi \cos \theta \mathbf{k}$$

e, do Exemplo 10 da Seção 16.6,

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \text{sen}^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen}^2 \phi \text{sen } \theta \mathbf{j} + \text{sen } \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

Portanto

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = \cos \phi \text{sen}^2 \phi \cos \theta + \text{sen}^3 \phi \text{sen}^2 \theta + \text{sen}^2 \phi \cos \phi \cos \theta$$

☐ A Figura 13 mostra o campo vetorial \mathbf{F} do Exemplo 5 em pontos da esfera unitária.

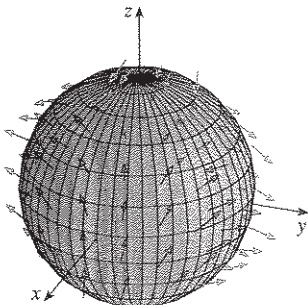


FIGURA 13

e, pela Fórmula 9, o fluxo é

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta + \sin^3 \phi \sin^2 \theta) d\phi d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \sin^2 \phi \cos \phi d\phi \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= 0 + \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

pelos mesmos cálculos que no Exemplo 2.

Se, por exemplo, o campo vetorial do Exemplo 5 é um campo de velocidade descrevendo o fluxo de um fluido de densidade 1, então a resposta $4\pi/3$ representa a taxa de vazão através da esfera unitária em unidade de massa por unidade de tempo.

Embora tenhamos usado como motivação para a integral de superfície de um campo de vetores o exemplo de mecânica dos fluidos, esse conceito também aparece em outras situações físicas. Por exemplo: se \mathbf{E} é um campo elétrico (veja o Exemplo 5 da Seção 16.1), então a integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

é chamada **fluxo elétrico** de \mathbf{E} através da superfície S . Uma importante lei de eletrostática é a **Lei de Gauss**, que diz que a carga contida por uma superfície S é

$$Q = \epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

onde ϵ_0 é uma constante (denominada permissividade do espaço livre) que depende das unidades usadas. (No sistema SI, $\epsilon_0 \approx 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$.) Portanto, se o campo vetorial \mathbf{F} do Exemplo 5 representa um campo elétrico, podemos concluir que a carga envolvida por S é $Q = 4\pi\epsilon_0/3$.

Outra aplicação de integrais de superfície ocorre no estudo de fluxo de calor. Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) em um corpo seja $u(x, y, z)$. Então o **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K \nabla u$$

onde K é uma constante determinada experimentalmente, chamada **condutividade** da substância. A taxa de fluxo de calor através da superfície S no corpo é então dada pela integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$

EXEMPLO 6 = A temperatura u em uma bola metálica é proporcional ao quadrado da distância do centro da bola. Determine a taxa de fluxo de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

SOLUÇÃO Tomando o centro da bola como a origem, temos

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

onde C é a constante de proporcionalidade. Então o fluxo de calor é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K \nabla u = -KC(2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k})$$

onde K é a condutividade do metal. Em vez de usar a parametrização usual da esfera dada no Exemplo 5, observamos que o vetor normal para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que aponta para fora no ponto (x, y, z) é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

e então

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Mas sobre S temos $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2aKC$. Portanto, a taxa de fluxo de calor através de S é

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = -2aKC \iint_S dS \\ &= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3 \end{aligned}$$

16.7

Exercícios

- Seja S o cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Aproxime $\iint_S \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \, dS$ usando as somas de Riemann como na Definição 1, tomando os retalhos S_{ij} como os quadrados que são as faces do cubo e os centros desses quadrados como os pontos P_{ij}^* .
- Uma superfície S é formada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leq z \leq 1$, e por círculos no fundo e no topo. Suponha que você saiba que f é uma função contínua com $f(\pm 1, 0, 0) = 2$, $f(0, \pm 1, 0) = 3$ e $f(0, 0, \pm 1) = 4$. Estime o valor de $\iint_S f(x, y, z) \, dS$ usando a soma de Riemann, tomando retalhos S_{ij} como os círculos do fundo e do topo, e a lateral dividida em quatro partes.
- Seja H o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $z \geq 0$, e suponha que f seja uma função contínua com $f(3, 4, 5) = 7$, $f(3, -4, 5) = 8$, $f(-3, 4, 5) = 9$ e $f(-3, -4, 5) = 12$. Dividindo H em quatro retalhos, estime o valor de $\iint_H f(x, y, z) \, dS$.
- Suponha que $f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, onde g é uma função de uma variável tal que $g(2) = -5$. Calcule $\iint_S f(x, y, z) \, dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- Calcule a integral de superfície.
- $\iint_S x^2 yz \, dS$,
 S é a parte do plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está acima do retângulo $[0, 3] \times [0, 2]$.
- $\iint_S xy \, dS$,
 S é a região triangular com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 2)$.
- $\iint_S yz \, dS$,
 S é a parte do plano $x + y + z = 1$ que está no primeiro octante.
- $\iint_S y \, dS$,
 S é a superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
- $\iint_S x^2 z^2 \, dS$,
 S é a parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$.
- $\iint_S z \, dS$,
 S é a superfície $x = y + 2z^2$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
- $\iint_S y \, dS$,
 S é a parte do parabolóide $y = x^2 + z^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + z^2 = 4$.
- $\iint_S xy \, dS$,
 S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$.

13. $\iint_S (x^2z + y^2z) dS$,
 S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$
14. $\iint_S xyz dS$,
 S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
15. $\iint_S (x^2 + y^2) dS$,
 S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre os planos $z = 0$ e $z = 2$
16. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$,
 S é formada pelo cilindro do Exercício 15, além dos círculos que compõem o fundo e o topo.
17. $\iint_S yz dS$,
 S é a superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = u \cos v$, $z = u \sin v$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi/2$
18. $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS$,
 S é o helicóide com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi$
- 19–28 □ Calcule a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para o campo vetorial \mathbf{F} e superfície orientada S . Em outras palavras, determine o fluxo de \mathbf{F} através de S . Para superfícies fechadas, use a orientação (para fora) positiva.
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$, S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, com orientação para cima.
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + 4x^2 \mathbf{j} + yz \mathbf{k}$, S é a superfície $z = xe^y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, com orientação para cima
21. $\mathbf{F}(x, y, z) = xze^y \mathbf{i} - xze^y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$,
 S é a parte do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante, com orientação para baixo
22. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z^4 \mathbf{k}$,
 S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ abaixo do plano $z = 1$ com orientação para baixo
23. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} - z \mathbf{j} + y \mathbf{k}$,
 S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante com orientação para a origem.
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y \mathbf{k}$ S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y \geq 0$, orientado na direção do eixo y positivo
25. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{j} - z \mathbf{k}$,
 S é formado pelo parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$, e pelo círculo $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$
26. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 5 \mathbf{k}$, S é a superfície do Exercício 12.
27. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 3z \mathbf{k}$,
 S é o cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$
28. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$,
 S é o helicóide do Exercício 18, com orientação para cima
29. Calcule $\iint_S xyz dS$ preciso até a quarta casa decimal, onde S é a superfície $z = xy$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
30. Determine o valor exato de $\iint_S x^2 yz dS$, onde S é a superfície do Exercício 29.
31. Determine o valor de $\iint_S x^2 y^2 z^2 dS$ correto até a quarta casa decimal, onde S é a parte do parabolóide $z = 3 - 2x^2 - y^2$ que está acima do plano xy .
32. Determine o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin(xyz) \mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} + z^2 e^{y/z} \mathbf{k}$ através da parte do cilindro $4y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano xy e entre os planos $x = -2$ e $x = 2$ com orientação para cima. Ilustre, usando um sistema algébrico computacional para desenhar o cilindro e o campo vetorial na mesma tela.
33. Determine a fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 8 para o caso onde S é dada por $y = h(x, z)$ e \mathbf{n} é o vetor normal que aponta para a esquerda.
34. Determine a fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 8 para o caso onde S é dada por $x = k(y, z)$ e \mathbf{n} é o vetor normal que aponta para a frente (ou seja, para o observador, quando os eixos estão desenhados na posição usual).
35. Determine o centro de massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, se ele tiver densidade constante.
36. Determine a massa de um funil fino com o formato do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 4$, se sua função densidade é $\rho(x, y, z) = 10 - z$.
37. (a) Dê uma expressão integral para o momento de inércia I_z em torno do eixo z de uma folha fina no formato da superfície S , se a função densidade é ρ .
 (b) Determine o momento de inércia em torno do eixo z do funil do Exercício 36.
38. A superfície cônica $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq a$ tem densidade constante k . Determine (a) o centro de massa e (b) o momento de inércia em torno do eixo z .
39. Um fluido com densidade 1200 flui com velocidade $\mathbf{v} = y \mathbf{i} + \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. Determine a taxa de vazão do fluido através do parabolóide $z = 9 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 \leq 36$.
40. Um fluido com densidade 1500 e campo de velocidade $\mathbf{v} = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + 2z \mathbf{k}$. Determine a taxa de vazão do fluido saindo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.
41. Use a Lei de Gauss para achar a carga contida no hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, se o campo elétrico é $\mathbf{E}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k}$.
42. Use a Lei de Gauss para achar a carga dentro de um cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ se o campo elétrico é $\mathbf{E}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$.
43. A temperatura em um ponto (x, y, z) em uma substância com condutividade $K = 6,5$ é $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Determine a taxa de transmissão de calor nessa substância através da superfície cilíndrica $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leq x \leq 4$.
44. A temperatura em um ponto de uma bola com condutividade K é inversamente proporcional à distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

16.8 O Teorema de Stokes

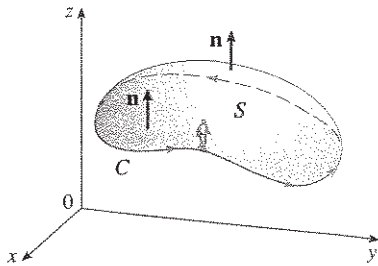


FIGURA 1

□ O Teorema de Stokes tem seu nome em homenagem ao físico matemático irlandês sir George Stokes (1819-1903). Stokes era professor na Universidade de Cambridge (de fato ele tinha a mesma posição que Newton, *Lucasian Professor of Mathematics*) e se sobressaiu por seus estudos sobre vazão de fluidos e luz. O teorema que hoje chamamos Teorema de Stokes foi, na verdade, descoberto pelo físico escocês sir William Thomson (1824-1907, conhecido como lorde Kelvin). Stokes soube desse teorema por uma carta de Thomson em 1850 e pediu a seus estudantes para prová-lo em um exame em Cambridge, em 1854. Não se sabe se algum de seus estudantes foi capaz de fazê-lo.

O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana D com uma integral de linha ao redor de sua curva fronteira plana, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral ao redor da curva fronteira S (que é uma curva no espaço). A Figura 1 mostra uma superfície orientada com seu vetor normal \mathbf{n} . A orientação de S induz a **orientação positiva da curva fronteira C** mostrada na figura. Isso significa que, se você andar na direção positiva ao redor da curva C com sua cabeça na direção e sentido de \mathbf{n} , então a superfície estará sempre à sua esquerda.

Teorema de Stokes Seja S uma superfície orientada, lisa por trechos, cuja fronteira é formada por uma curva C simples, fechada, lisa por trechos, com orientação positiva. Seja \mathbf{F} um campo vetorial cujos componentes têm derivadas parciais contínuas na região aberta de \mathbb{R}^3 que contém S . Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \quad \text{e} \quad \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

o Teorema de Stokes nos diz que a integral de linha ao redor da curva fronteira de S do componente tangencial de \mathbf{F} é igual à integral de superfície do componente normal do rotacional de \mathbf{F} .

A curva fronteira orientada positivamente da superfície orientada S é com frequência denotada por ∂S , de modo que o Teorema de Stokes possa ser escrito como

$$\boxed{\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}$$

Existe uma analogia entre o Teorema de Stokes, o de Green e o Teorema Fundamental do Cálculo. Como anteriormente, existe uma integral envolvendo as derivadas do lado esquerdo da Equação 1 (lembre-se de que o $\text{rot } \mathbf{F}$ é uma espécie de derivada de \mathbf{F}) e do lado direito, envolvendo valores de \mathbf{F} , calculados somente na *fronteira* de S .

De fato, no caso especial em que a superfície S é plana e pertence ao plano xy com orientação para cima, o vetor normal é \mathbf{k} , a integral de superfície se transforma em uma integral dupla, e o Teorema de Stokes fica

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA$$

Esta é precisamente a forma vetorial do Teorema de Green dada pela Equação 16.5.12. Então vemos que o Teorema de Green é, realmente, um caso especial do Teorema de Stokes.

Apesar de o Teorema de Stokes ser muito difícil de provar no caso geral, podemos fazer uma prova quando S for um gráfico e \mathbf{F} , S e C forem bem comportados.

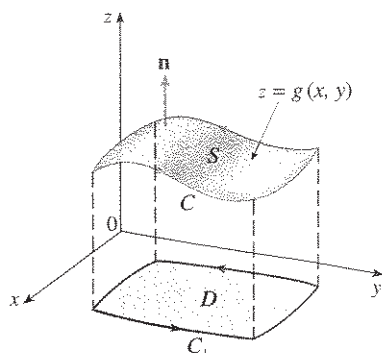


FIGURA 2

Prova de um caso especial do Teorema de Stokes Admitiremos que a equação de S seja $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde g tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e que D seja uma região plana simples cuja fronteira C_1 corresponde a C . Se a orientação de S for para cima, então a orientação positiva de C corresponde à orientação positiva de C_1 (veja a Figura 2). É-nos dado que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, onde as derivadas parciais de P , Q e R são contínuas.

Como S é um gráfico de uma função, podemos aplicar a Fórmula 16.7.8 com \mathbf{F} substituído por $\text{rot } \mathbf{F}$. O resultado é

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \right] dA \end{aligned}$$

onde as derivadas parciais de P , Q e R são calculadas em $(x, y, g(x, y))$. Se

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad a \leq t \leq b$$

é a representação paramétrica de C_1 , então a representação paramétrica de C é

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = g(x(t), y(t)) \quad a \leq t \leq b$$

Isso nos permite, com ajuda da Regra da Cadeia, calcular a integral de linha como segue:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left[P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right] dt \\ &= \int_a^b \left[\left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \int_{C_1} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Green no último passo. Então, utilizando novamente a Regra da Cadeia e lembrando que P , Q e R são funções de x , y e z e que z é, por sua vez, função de x e y , obtemos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + R \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) \right] dA \end{aligned}$$

Quatro dos termos da integral dupla se cancelam, e os seis restantes podem ser arrumados para coincidir com o lado direito da Equação 2. Portanto

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad \square$$

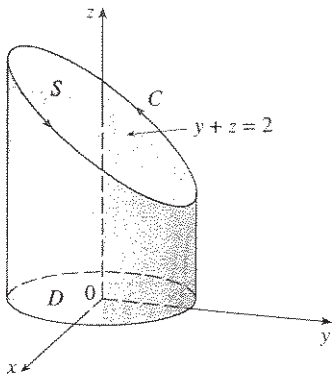


FIGURA 3

EXEMPLO 1 □ Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2 \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ e C é a curva da interseção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Oriente C para ter o sentido anti-horário quando visto de cima.)

SOLUÇÃO A curva C (uma elipse) está mostrada na Figura 3. Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ poder ser calculada diretamente, é mais simples usar o Teorema de Stokes. Vamos inicialmente calcular

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y) \mathbf{k}$$

Apesar de haver muitas superfícies com fronteira C , a escolha mais conveniente é a região elíptica S no plano $y + z = 2$ cuja fronteira é C . Se orientarmos S para cima, então a orientação induzida em C será positiva. A projeção D de S sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$, e assim, usando a Equação 16.7.8 com $z = g(x, y) = 2 - y$, temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1 + 2y) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2 \frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi \end{aligned}$$

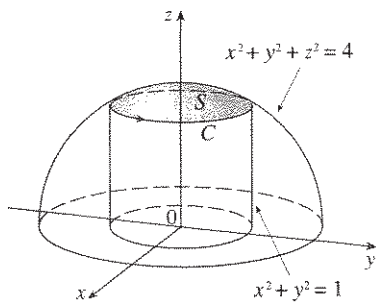


FIGURA 4

EXEMPLO 2 □ Use o Teorema de Stokes para calcular a integral $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy (veja a Figura 4).

SOLUÇÃO Para achar a curva fronteira C resolvemos as equações $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$. Subtraindo, obtemos $z^2 = 3$, e assim $z = \sqrt{3}$ (uma vez que $z > 0$). Então, C é a circunferência dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1, z = \sqrt{3}$. A equação vetorial de C é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sqrt{3} \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Temos também

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3} \sin t \mathbf{i} + \sqrt{3} \cos t \mathbf{j} + \cos t \sin t \mathbf{k}$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \cos t \sin t + \sqrt{3} \sin t \cos t) \, dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0 \end{aligned}$$

Note que no Exemplo 2 calculamos a integral de superfície simplesmente sabendo os valores de \mathbf{F} na curva fronteira C . Isso significa que, se tivermos outra superfície orientada com a mesma curva fronteira C , obteremos o mesmo valor para a integral de superfície!

Em geral, se S_1 e S_2 são superfícies orientadas com mesma curva fronteira orientada C e ambas satisfazem as hipóteses do Teorema de Stokes, então

$$\boxed{3} \quad \iint_{S_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Esse fato é muito útil quando for difícil integrar sobre uma superfície, mas é mais fácil integrar sobre a outra.

Usaremos agora o Teorema de Stokes para tentar explicar o significado do vetor rotacional. Suponha que C seja uma curva fechada orientada e \mathbf{v} represente o campo de velocidade de um fluido. Considere a integral de linha

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

e lembre-se de que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ é o componente de \mathbf{v} na direção do versor tangente \mathbf{T} . Isso significa que, quanto mais próxima a direção de \mathbf{v} está da direção de \mathbf{T} , maior é o valor de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$. Assim, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ é a medida da tendência de o fluido se mover ao redor de C e é chamada **circulação** de \mathbf{v} ao redor de C (veja a Figura 5).

Seja agora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do fluido e seja S_a um pequeno círculo com raio a e centro P_0 . Então $(\text{rot } \mathbf{v})(P) \approx (\text{rot } \mathbf{v})(P_0)$ para todos os pontos P de S_a , porque $\text{rot } \mathbf{v}$ é contínuo. Então, pelo Teorema de Stokes, temos a seguinte aproximação da circulação ao redor do círculo fronteira C_a :

$$\begin{aligned} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &\approx \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \, dS = \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \pi a^2 \end{aligned}$$

Essa aproximação se torna melhor quando $a \rightarrow 0$ e temos

$$\boxed{4} \quad \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

A Equação 4 fornece a relação entre o rotacional e a circulação. Ela mostra que $\text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ é a medida do efeito da rotação do fluido ao redor do eixo \mathbf{n} . O efeito de rotacionar é maior em um eixo paralelo a $\text{rot } \mathbf{v}$.

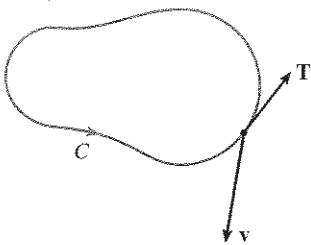
Finalmente, mencionamos que o Teorema de Stokes pode ser usado para provar o Teorema 16.5.4 (que estabelece que, se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ sobre \mathbb{R}^3 , então \mathbf{F} é conservativo). De nosso trabalho prévio (Teoremas 16.3.3 e 16.3.4) sabemos que \mathbf{F} é conservativo se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C . Dado C , suponha que possamos achar uma superfície orientada S cuja fronteira seja C . (Isso pode ser feito, mas a prova requer técnicas avançadas.) Então o Teorema de Stokes fornece

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Uma curva que não seja simples pode ser quebrada em um número finito de curvas simples, e as integrais ao redor dessas curvas simples são todas 0. Somando essas integrais, obtemos $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C .



(a) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} > 0$, circulação positiva



(b) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} < 0$, circulação negativa

FIGURA 5

□ Imagine uma roda pequena formada por pás colocadas em um fluido em um ponto P , como na Figura 6; essa roda vai girar mais rapidamente quando seu eixo for paralelo a $\text{rot } \mathbf{v}$.

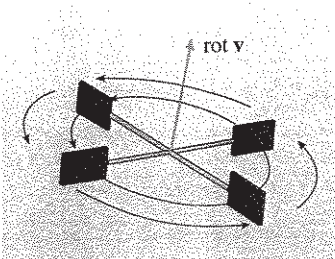
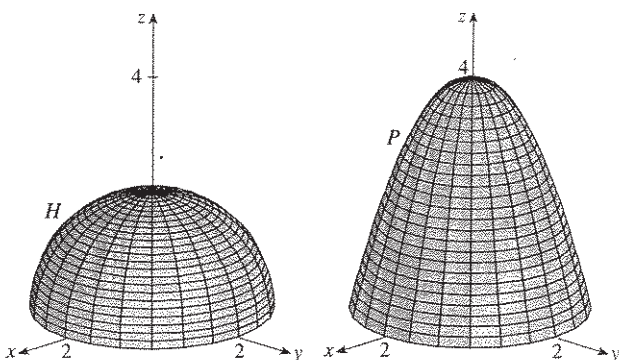


FIGURA 6

16.8 Exercícios

1. Um hemisfério H e uma parte P de um parabolóide estão mostrados. Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 cujos componentes têm derivadas parciais contínuas. Explique por quê

$$\iint_H \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_P \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



- Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$,
 S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 5$, com orientação para cima.
 - $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 e^{yz} \mathbf{i} + y^2 e^{xz} \mathbf{j} + z^2 e^{xy} \mathbf{k}$,
 S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, com orientação para cima.
 - $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 y^3 z \mathbf{i} + \text{sen}(xyz) \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}$
 S é a parte do cone $y^2 = x^2 + z^2$ que está entre os planos, $y = 0$ e $y = 3$, orientado na direção positiva do eixo y .
 - $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + x^2 yz \mathbf{k}$,
 S é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, com orientação para fora. [Dica: use a Equação 3.]
 - $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy} \cos z \mathbf{i} + x^2 z \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$,
 S é o hemisfério $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ orientado na direção positiva do eixo x [Dica: use a Equação 3.]

Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Em cada caso, C é orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2) \mathbf{i} + (y + z^2) \mathbf{j} + (z + x^2) \mathbf{k}$,
 C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x} \mathbf{i} + e^y \mathbf{j} + e^z \mathbf{k}$,
 C é a fronteira da parte do plano $2x + y + 2z = 2$ no primeiro octante

- $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + 2xz \mathbf{j} + e^{xy} \mathbf{k}$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 16, z = 5$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (x^2 + y^2) \mathbf{k}$, C é a fronteira da parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ no primeiro octante

11. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z \mathbf{i} + xy^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$$

e C é a curva da interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

- (b) Trace o gráfico do plano e do cilindro com janelas de inspeção escolhidas de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).
(c) Determine as equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C .

12. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 y \mathbf{i} + \frac{1}{3} x^3 \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$ e C é a curva da interseção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.
(b) Trace o gráfico do parabolóide hiperbólico e do cilindro com janelas de inspeção escolhidas de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).
(c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C .

Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial dado \mathbf{F} e a superfície S .

- $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$
 S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está acima do plano $z = 1$, orientado para cima.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}$
 S é a parte do plano $2x + y + z = 2$ que está no primeiro octante, orientada para cima.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$
 S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0$, orientado da direção positiva do eixo y .

16. Seja

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle ax^3 - 3xz^2, x^2 y + by^3, cz^3 \rangle$$

Seja C a curva do Exercício 12 e considere todas as possíveis superfícies lisas S cuja curva fronteira é C . Ache os valores de a, b e c para os quais $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ é independente da escolha de S .

17. Calcule o trabalho realizado pelo campo de força

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^x + z^2) \mathbf{i} + (y^y + x^2) \mathbf{j} + (z^z + y^2) \mathbf{k}$$

quando uma partícula se move sob sua influência ao redor da

borda da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está no primeiro octante, na direção anti-horária quando vista por cima.

18. Calcule $\int_C (y + \sin x) dx + (z^2 + \cos y) dy + x^3 dz$, onde C é a curva $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, \sin 2t \rangle$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
[Dica: observe que C está na superfície $z = 2xy$.]

19. Se S é uma esfera e \mathbf{F} satisfaz as hipóteses do Teorema de Stokes, mostre que $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

20. Suponha que S e C satisfaçam as hipóteses do Teorema de Stokes e f, g tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Use os Exercícios 24 e 26 da Seção 16.5 para mostrar o seguinte:

$$(a) \int_C (f \nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$$

$$(b) \int_C (f \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

$$(c) \int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Projeto Escrito

Três Homens e Dois Teoremas

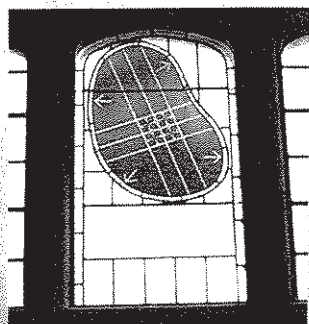
Apesar de dois dos mais importantes teoremas em cálculo vetorial terem seus nomes em homenagem a George Green e George Stokes, um terceiro homem, William Thomson (também conhecido como lorde Kelvin), teve um papel muito importante na formulação, disseminação e aplicação dos dois resultados. Os três homens estavam interessados em como usar os dois teoremas para explicar e prever fenômenos físicos em eletricidade e magnetismo e em escoamento de fluidos. Os fatos básicos da história são dados nas páginas 1070 e 1106.

Escreva um trabalho sobre as origens históricas dos Teoremas de Green e de Stokes. Explique as semelhanças e relações entre os teoremas. Discuta o papel que Green, Thomson e Stokes tiveram na descoberta desses teoremas e em fazê-los conhecidos. Mostre como esses teoremas apareceram de pesquisas em eletricidade e magnetismo e depois foram usados no estudo de uma variedade de outros problemas físicos.

O dicionário editado por Gillispie [2] é uma boa fonte tanto para dados biográficos como para informações científicas. O livro de Hutchinson [5] trata da vida de Stokes, e o livro de Thompson [8] é uma biografia de lorde Kelvin. Os artigos de Grattan-Guinness [3] e Gray [4] e o livro de Cannell [1] fornecem subsídios da vida extraordinária e dos trabalhos de Green. Informações adicionais históricas e matemáticas podem ser encontradas nos livros de Katz [6] e Kline [7].

1. CANNELL, D. M., *George Green, Mathematician and Physicist 1793-1841: The Background to His Life and Work*. Filadélfia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
2. GILLISPIE, C. C. (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York, Scribner's, 1974. Ver artigo sobre Green em P. J. Wallis, v. XV, artigo sobre Thompson em Jed Buchwald, e sobre Stokes em E. M. Parkinson, no v. XIII.
3. GRATTAN-GUINNESS, I., Why did George Green write his essay of 1828 on electricity and magnetism? *Amer. Math. Monthly*, v. 102 (1995), p. 387-96.
4. GRAY, J., There was a jolly miller. *The New Scientist*, v. 139 (1993), p. 24-7.
5. HUTCHINSON, G. E., *The Enchanted Voyage and Other Studies*. Westport Conn.: Greenwood Press, 1978.
6. KATZ, V., *A History of Mathematics: An Introduction*. Nova York, HarperCollins, 1993, p. 678-80.
7. KLINE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York, Oxford University Press, 1972, p. 683-85.
8. THOMPSON, S.P., *The Life of Lord Kelvin*. Nova York, Chelsea, 1976.

□ A ilustração mostra um vitral da Universidade de Cambridge em homenagem a George Green.



16.9 O Teorema da Divergência

Na Seção 16.5, reescrevemos o Teorema de Green na versão vetorial

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) \, dA$$

onde C é a curva fronteira da região do plano D , orientada positivamente. Se quisermos estender esse teorema para campos vetoriais em \mathbb{R}^3 , podemos apostar que

$$\boxed{1} \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \, dV$$

onde S é a superfície fronteira da região sólida E . A Equação 1 é verdadeira sob hipóteses apropriadas, e é chamada Teorema da Divergência. Note sua semelhança com os Teoremas de Green e de Stokes no fato que ele relaciona a integral da derivada de uma função ($\operatorname{div} \mathbf{F}$, nesse caso) sobre uma região com a integral da função original \mathbf{F} sobre a fronteira da região.

Nesse estágio você pode fazer uma revisão dos vários tipos de regiões sobre os quais calculamos uma integral tripla na Seção 15.7. Estabeleceremos e provaremos o Teorema da Divergência para as regiões E que são simultaneamente dos tipos 1, 2 e 3 e às quais chamaremos **regiões sólidas simples**. (Por exemplo: regiões limitadas por elipsóides ou caixas retangulares são regiões sólidas simples.) A fronteira de \mathbf{F} é uma superfície fechada e usaremos a convenção, introduzida na Seção 16.7, de que a orientação positiva é para fora, ou seja, o vetor normal unitário \mathbf{n} está apontando para fora de E .

□ O Teorema da Divergência é algumas vezes chamado Teorema de Gauss, em homenagem ao grande matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855), que descobriu esse teorema durante suas pesquisas sobre eletrostática. Em muitos países da Europa, o Teorema da Divergência é conhecido como Teorema de Ostrogradsky, em homenagem ao matemático russo Mikhail Ostrogradsky (1801-1862), que publicou esse resultado em 1826.

Teorema da Divergência Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E , orientada positivamente (para fora). Seja \mathbf{F} um campo vetorial cujas funções componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E . Então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Prova Seja $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Então

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{logo} \quad \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} \, dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} \, dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV$$

Se \mathbf{n} é o versor da normal que sai de S , então a integral de superfície do lado esquerdo do Teorema da Divergência é

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_S P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_S Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned}$$

Portanto, para provar o Teorema da Divergência, é suficiente provar as três seguintes equações:

$$\boxed{2} \quad \iint_S P \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} \, dV$$

$$\boxed{3} \quad \iint_S Q \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} \, dV$$

$$\boxed{4} \quad \iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV$$

Para provar a Equação 4, usamos o fato de que E é uma região do tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy . Pela Equação 15.7.6, temos

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) \, dz \right] \, dA$$

Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\boxed{5} \quad \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV = \iint_D [R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))] \, dA$$

A superfície fronteira S é formada por três peças: a superfície do fundo S_1 , a superfície do topo S_2 e possivelmente uma superfície vertical S_3 , que está acima da curva fronteira de D . (Veja a Figura 1. Pode acontecer de S_3 não existir, como no caso da esfera.) Note que sobre S_3 temos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$, porque \mathbf{k} é vertical e \mathbf{n} é horizontal, e assim

$$\iint_{S_3} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_3} 0 \, dS = 0$$

Logo, não interessando a existência de uma superfície vertical, podemos escrever

$$\boxed{6} \quad \iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_1} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_{S_2} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

A equação de S_2 é $z = u_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, e o vetor normal que sai de \mathbf{n} aponta para cima. Da Equação 16.7.8 (com \mathbf{F} substituído por $R \mathbf{k}$) temos

$$\iint_{S_2} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D R(x, y, u_2(x, y)) \, dA$$

Sobre S_1 temos $z = u_1(x, y)$, mas aqui a normal \mathbf{n} aponta para baixo, e então multiplicamos por -1 :

$$\iint_{S_1} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \iint_D R(x, y, u_1(x, y)) \, dA$$

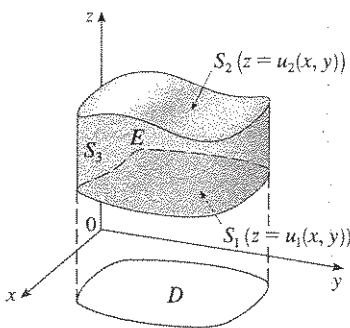


FIGURA 1

Portanto a Equação 6 dá

$$\iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D [R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))] \, dA$$

Comparando com a Equação 5, temos que

$$\iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV$$

As Equações 2 e 3 são provadas de modo análogo, usando as expressões para E como uma região do tipo 2 ou do tipo 3.

□ Note que o método de prova do Teorema da Divergência é muito semelhante ao do Teorema de Green.

EXEMPLO 1 □ Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ sobre a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Primeiro calcularemos a divergência de \mathbf{F} :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

A esfera unitária S é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Então, o Teorema da Divergência dá o fluxo como

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_B 1 \, dV \\ &= V(B) = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

□ A solução do Exemplo 1 deve ser comparada com a solução do Exemplo 5 na Seção 16.7.

EXEMPLO 2 □ Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + (y^2 + e^{xz}) \mathbf{j} + \operatorname{sen}(xy) \mathbf{k}$$

e S é a superfície da região E limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$ (veja a Figura 2).

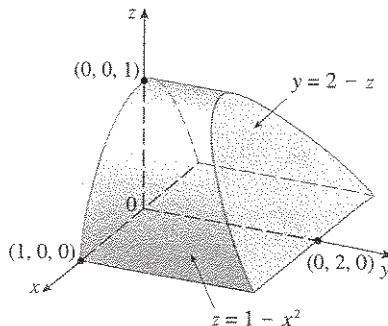


FIGURA 2

SOLUÇÃO Deve ser extremamente difícil calcular a integral da superfície dada diretamente. (Teríamos de calcular quatro integrais de superfícies correspondentes às quatro partes de S .)

Além disso, a divergência de \mathbf{F} é muito menos complicada que o próprio \mathbf{F} :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen} xy) \\ &= y + 2y = 3y\end{aligned}$$

Portanto, usamos o Teorema da Divergência para transformar a integral da superfície dada em uma integral tripla. O modo mais fácil de calcular a integral tripla é escrever E como uma região do tipo 3:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z\}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_E 3y \, dV \\ &= 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y \, dy \, dz \, dx \\ &= 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2} \, dz \, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left[-\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^{1-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 [(x^2 + 1)^3 - 8] \, dx \\ &= -\int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7) \, dx = \frac{184}{35}\end{aligned}$$

Apesar de termos provado o Teorema da Divergência somente para o caso de regiões sólidas simples, ele pode ser provado para regiões que são uma união finita de regiões sólidas simples. (O procedimento é semelhante ao usado na Seção 16.4 para estender o Teorema de Green.)

Por exemplo: vamos considerar a região E que está entre as superfícies fechadas S_1 e S_2 , onde S_1 está dentro de S_2 . Sejam \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 as normais apontando para fora de S_1 e S_2 . Então a superfície fronteira de E é $S = S_1 \cup S_2$ e sua normal \mathbf{n} é dada por $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ sobre S_1 e $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ sobre S_2 (veja a Figura 3). Aplicando o Teorema da Divergência a S , obtemos

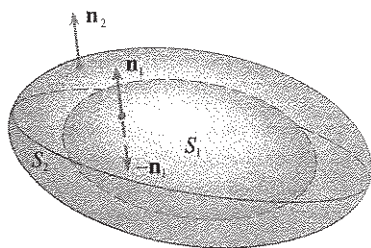


FIGURA 3

$$\begin{aligned}\boxed{7} \quad \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1) \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS \\ &= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

Vamos aplicar isso ao campo elétrico (veja o Exemplo 5 na Seção 16.1):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

onde S_1 é uma esfera pequena com raio a e centro na origem. Você pode verificar que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ (veja o Exercício 21). Portanto, da Equação 7 vem

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS\end{aligned}$$

O ponto importante nesse cálculo é que podemos calcular a integral de superfície sobre S_1 porque S_1 é uma esfera. O vetor normal em x é $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Portanto

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^4} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \\ &= \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}\end{aligned}$$

já que a equação de S_1 é $|\mathbf{x}| = a$. Logo, temos

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \frac{\varepsilon Q}{a^2} \iint_{S_1} dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2} A(S_1) \\ &= \frac{\varepsilon Q}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi\varepsilon Q\end{aligned}$$

Isso mostra que o fluxo elétrico de \mathbf{E} é $4\pi\varepsilon Q$ através de *qualquer* superfície fechada S_2 que contenha a origem. [Esse é um caso especial da Lei de Gauss (Equação 16.7.10) para uma carga simples. A relação entre ε e ε_0 é $\varepsilon = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.]

Outra aplicação do Teorema da Divergência aparece em escoamento de fluidos. Seja $\mathbf{v}(x, y, z)$ o campo de velocidade de um fluido com densidade constante ρ . Então a taxa de vazão do fluido por unidade de área é $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$. Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto no fluido e B_a é uma bola com centro em P_0 e raio muito pequeno a , então $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)$ para todos os pontos de B_a , uma vez que $\operatorname{div} \mathbf{F}$ é contínuo. Aproximamos o fluxo sobre a fronteira esférica S_a , como segue:

$$\begin{aligned}\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &\approx \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) \, dV \\ &= \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) V(B_a)\end{aligned}$$

Essa aproximação se torna melhor à medida que $a \rightarrow 0$ e sugere que

$$\boxed{8} \quad \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

A Equação 8 nos diz que $\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)$ é a taxa líquida do fluxo por unidade de volume que sai de P_0 . (Essa é a razão para o nome *divergência*.) Se $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) > 0$, a taxa líquida do fluido está saindo de perto de P , e P é chamado **fonte**. Se $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) < 0$, a taxa líquida do fluido está entrando perto de P , e P é denominado **sorvedouro**.

Para o campo vetorial da Figura 4, parece que os vetores que terminam próximo de P_1 são menores que os vetores que iniciam perto do mesmo ponto P_1 . Então o fluxo líquido sai perto de P_1 , e assim $\text{div } \mathbf{F}(P_1) > 0$ e P_1 é uma fonte. Por outro lado, perto de P_2 , os vetores que chegam são maiores que os que saem. Aqui o fluxo líquido é na direção de entrar, assim $\text{div } \mathbf{F}(P_2) < 0$ e P_2 é um sorvedouro. Podemos usar a fórmula para \mathbf{F} para confirmar essa impressão. Como $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j}$, temos $\text{div } \mathbf{F} = 2x + 2y$, que é positivo quando $y > -x$. Assim os pontos acima da reta $y = -x$ são fontes e os pontos abaixo da reta são sorvedouros.

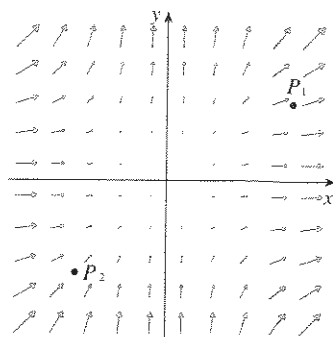
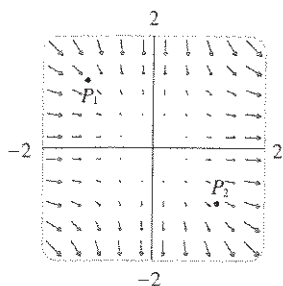


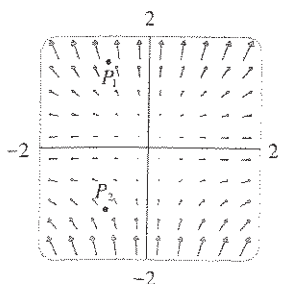
FIGURA 4
Campo vetorial $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j}$

16.9 Exercícios

1. A figura mostra um campo vetorial \mathbf{F} . Use a interpretação da divergência derivada nesta seção para determinar se $\text{div } \mathbf{F}$ é positivo ou negativo em P_1 e em P_2 .



2. (a) Os pontos P_1 e P_2 são fontes ou sorvedouros para o campo vetorial \mathbf{F} mostrado na figura? Dê uma explicação baseada exclusivamente na figura.
 (b) Dado $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y^2 \rangle$, use a definição de divergência para verificar sua resposta da parte (a).



- 3-6 □ Verifique que o Teorema da Divergência é verdadeiro para o campo vetorial \mathbf{F} na região E .

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k}$,
 E é o cubo limitado pelos planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ e $z = 1$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + z \mathbf{k}$
 E é o sólido delimitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$,
 E é o cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$,
 E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

- 7-17 □ Use o Teorema da Divergência para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; ou seja, calcule o fluxo de \mathbf{F} através de S .

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \sin y \mathbf{i} + e^x \cos y \mathbf{j} + yz^2 \mathbf{k}$
 S é a superfície da caixa delimitada pelos planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, e z = 2$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + xz^4 \mathbf{k}$
 S é a superfície da caixa de vértices $(\pm 1, \pm 2, \pm 3)$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2 \mathbf{i} + xe^z \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$,
 S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $x = -1$ e $x = 2$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y \mathbf{i} - x^2y^2 \mathbf{j} - x^2yz \mathbf{k}$,
 S é a superfície do sólido limitado pelo hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e pelos planos $z = -2$ e $z = 2$

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \operatorname{sen} z \mathbf{i} + \cos(xz) \mathbf{j} + y \cos z \mathbf{k}$
 S é o elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y \mathbf{i} + xy^2 \mathbf{j} + 2xyz \mathbf{k}$
 S é a superfície do tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, e $x + 2y + z = 2$
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2) \mathbf{i} + xe^{-z} \mathbf{j} + (\operatorname{sen} y + x^2z) \mathbf{k}$
 S é a superfície do sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4 \mathbf{i} - x^3z^2 \mathbf{j} + 4xy^2z \mathbf{k}$
 S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = x + 2$ e $z = 0$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x^3z \mathbf{i} + 4y^3z \mathbf{j} + 3z^4 \mathbf{k}$
 S é a esfera com centro na origem e raio R
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y \operatorname{sen} z) \mathbf{i} + (y^3 + z \operatorname{sen} x) \mathbf{j} + 3z \mathbf{k}$,
 S é a superfície do sólido limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \operatorname{tg} z \mathbf{i} + y\sqrt{3 - x^2} \mathbf{j} + x \operatorname{sen} y \mathbf{k}$,
 S é a superfície do sólido que está acima do plano xy e abaixo da superfície $z = 2 - x^4 - y^4$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$

18. Use um sistema algébrico computacional para plotar o campo vetorial
 $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x \cos^2 y \mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 y \cos^4 z \mathbf{j} + \operatorname{sen}^5 z \cos^6 x \mathbf{k}$
no cubo obtido cortando o primeiro octante pelos planos $x = \pi/2$, $y = \pi/2$, e $z = \pi/2$. Em seguida calcule o fluxo através da superfície do cubo.
19. Use o Teorema da Divergência para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde
 $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2x \mathbf{i} + (\frac{1}{3}y^3 + \operatorname{tg} z) \mathbf{j} + (x^2z + y^2) \mathbf{k}$
e S é a metade de cima da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
[Dica: note que S não é uma superfície fechada. Calcule primeiro as integrais sobre S_1 e S_2 , onde S_1 é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, orientado para baixo, e $S_2 = S \cup S_1$.]

20. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = z \operatorname{tg}^{-1}(y^2) \mathbf{i} + z^3 \ln(x^2 + 1) \mathbf{j} + z \mathbf{k}$.
Determine o fluxo de \mathbf{F} através da parte do parabolóide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e está orientada para baixo.
21. Verifique que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ para o campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

22. Use o Teorema da Divergência para calcular

$$\iint_S (2x + 2y + z^2) dS$$

onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

23-28. Prove cada identidade, admitindo que S e E satisfaçam as condições do Teorema da Divergência e que as funções escalares e componentes do campo vetorial tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

23. $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = 0$, onde \mathbf{a} é um vetor constante

24. $V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$

25. $\iint_S \operatorname{rot} \Phi \cdot d\mathbf{\Sigma} = 0$

26. $\iint_S D_n f dS = \iiint_E \nabla^2 f dV$

27. $\iint_S (f \nabla g) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$

28. $\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV$

29. Suponha que S e E satisfaçam as condições do Teorema da Divergência e f seja uma função escalar com derivadas parciais contínuas. Prove que

$$\iint_S f \mathbf{n} dS = \iiint_E \nabla f dV$$

Essa superfície e a integral tripla da função vetorial são vetores definidos integrando cada função componente.

[Dica: comece aplicando o Teorema da Divergência a $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$, onde \mathbf{c} é um vetor constante arbitrário.]

30. Um sólido ocupa a região E com superfície S e está imerso em um líquido com densidade constante ρ . Estabelecemos um sistema de coordenadas de modo que o plano xy coincida com a superfície do líquido e valores positivos de z sejam medidos para baixo adentrando no líquido. Então a pressão na profundidade z é $p = \rho gz$, onde g é a aceleração da gravidade (veja a Seção 8.3). A força de empuxo total sobre o sólido devida à distribuição de pressão é dada pela integral de superfície

$$\mathbf{F} = - \iint_S p \mathbf{n} dS$$

onde \mathbf{n} é o versor normal apontando para fora. Use o resultado do Exercício 29 para mostrar que $\mathbf{F} = -W\mathbf{k}$, onde W é o peso do líquido deslocado pelo sólido. (Note que \mathbf{F} é direcionado para cima porque z está direcionado para baixo.) O resultado é o *Princípio de Arquimedes*: a força de empuxo sobre um objeto é igual ao peso do líquido deslocado.

16.10 Resumo dos Teoremas

Os principais resultados deste capítulo são versões em dimensão maior do Teorema Fundamental do Cálculo. Para ajudá-lo, coletamos os teoremas (sem suas hipóteses) de forma que você possa ver mais facilmente suas semelhanças essenciais. Note que em cada caso temos uma integral de uma “derivada” sobre uma região do lado esquerdo, e do lado direito temos os valores da função original somente na *fronteira* da região.

Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$



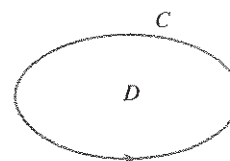
Teorema Fundamental para as Integrais de Linha

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$



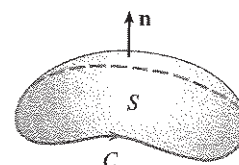
Teorema de Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P dx + Q dy$$



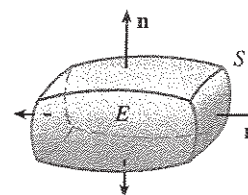
Teorema de Stokes

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



Teorema da Divergência

$$\iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



16

Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

- O que é um campo vetorial? Dê três exemplos com significado físico.
- (a) O que é um campo vetorial conservativo?
(b) O que é uma função potencial?
- (a) Escreva a definição da integral de linha para uma função escalar f ao longo de uma curva lisa C em relação ao comprimento de arco.
(b) Como calcular tal integral?
(c) Escreva expressões para a massa e o centro de massa para um arame fino com o formato da curva C se o arame tiver função densidade linear $\rho(x, y)$.
(d) Escreva a definição das integrais de linha sobre C de uma função escalar f com relação a x , y e z .
(e) Como calcular essas integrais de linha?
- (a) Defina a integral de linha do campo vetorial \mathbf{F} ao longo da curva lisa C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.
(b) Se \mathbf{F} é um campo de força, o que essa integral de linha representa?
(c) Se $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$, qual a relação entre a integral de linha de \mathbf{F} e as integrais de linha dos componentes P , Q e R ?
- Enuncie o Teorema Fundamental para as Integrais de Linha.
- (a) O que significa dizer que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho?
(b) Se você sabe que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, o que pode dizer sobre \mathbf{F} ?
- Enuncie o Teorema de Green.
- Escreva expressões para a área delimitada pela curva C em termos da integral de linha ao redor de C .
- Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 .
(a) Defina $\text{rot } \mathbf{F}$.
(b) Defina $\text{div } \mathbf{F}$.
- Se \mathbf{F} for um campo de velocidade em um fluido, qual a interpretação física de $\text{rot } \mathbf{F}$ e de $\text{div } \mathbf{F}$?
- Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, como você determina se \mathbf{F} é conservativo? E se \mathbf{F} for um campo vetorial em \mathbb{R}^3 ?
- (a) O que é uma superfície paramétrica? O que são suas curvas de grade?
(b) Escreva uma expressão para a área de uma superfície paramétrica.
(c) Qual é a área da superfície dada pela equação $z = g(x, y)$?
- (a) Escreva a definição da integral de superfície de uma função escalar f sobre uma superfície S .
(b) Como calcular tal integral se S for uma superfície paramétrica dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$?
(c) E se S for dada pela equação $z = g(x, y)$?
(d) Se uma folha fina tem o formato de uma superfície S , e a densidade em (x, y, z) é $\rho(x, y, z)$, escreva expressões para a massa e o centro de massa da folha.
- (a) O que é uma superfície orientada? Dê um exemplo de uma superfície não-orientada.
(b) Defina a integral de superfície (ou fluxo) de um campo vetorial \mathbf{F} sobre uma superfície orientada S com vetor unitário normal \mathbf{n} .
(c) Como calcular tal integral se S for uma superfície paramétrica dada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$?
(d) E se S for dada por uma equação $z = g(x, y)$?
- Enuncie o Teorema de Stokes.
- Enuncie o Teorema da Divergência.
- Quais as semelhanças entre o Teorema Fundamental para as Integrais de Linha, o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema da Divergência?

TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se as afirmações são falsas ou verdadeiras. Se verdadeiras, explique por quê. Se falsas, explique por que ou dê um contra-exemplo.

- Se \mathbf{F} for um campo vetorial, então $\text{div } \mathbf{F}$ é um campo vetorial.
- Se \mathbf{F} for um campo vetorial, então $\text{rot } \mathbf{F}$ é um campo vetorial.
- Se f tem derivadas parciais de todas as ordens contínuas sobre \mathbb{R}^3 , então $\text{div}(\text{rot } \nabla f) = 0$.
- Se f tem derivadas parciais contínuas sobre \mathbb{R}^3 e C for um círculo qualquer, então $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$.

- Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ e $P_y = Q_x$ em uma região aberta D , então \mathbf{F} é conservativo.

$$6. \int_{-C} f(x, y) ds = -\int_C f(x, y) ds$$

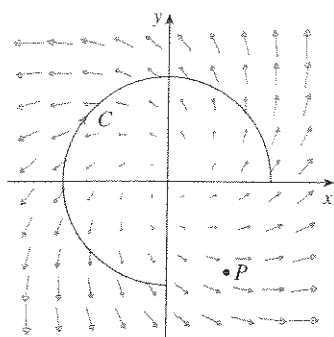
- Se S é uma esfera e \mathbf{F} um campo vetorial constante, então $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

- Existe um campo vetorial \mathbf{F} tal que

$$\text{rot } \mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

EXERCÍCIOS

1. São mostrados um campo vetorial \mathbf{F} , uma curva C e um ponto P .
 (a) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero? Explique.
 (b) $\text{div } \mathbf{F}(P)$ é positivo, negativo ou zero? Explique.



2-9 □ Calcule a integral de linha.

2. $\int_C x \, ds$,
 C é o arco de parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
3. $\int_C x^2 z \, ds$,
 $C: x = 2 \sin t, y = t, z = 2 \cos t, 0 \leq t \leq \pi/2$
4. $\int_C xy \, dx + y \, dy$, C é a senóide $y = \sin x$,
 $0 \leq x \leq \pi/2$
5. $\int_C x^3 y \, dx - x \, dy$,
 C é o círculo $x^2 + y^2 = 1$ orientado no sentido anti-horário.
6. $\int_C \sqrt{xy} \, dx + e^y \, dy + xz \, dz$, C é dada por
 $\mathbf{r}(t) = t^4 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$.
7. $\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$,
 C é formado pelos segmentos de reta que vão de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 2)$ e de $(1, 1, 2)$ a $(3, 1, 4)$.
8. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = xy \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$ e C é dada por
 $\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + (1 + t) \mathbf{j}, 0 \leq t \leq \pi$
9. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (x + y) \mathbf{k}$ e C é dada por
 $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} - t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$.

10. Determine o trabalho realizado pelo campo de força

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y \mathbf{k}$$

para mover uma partícula do ponto $(3, 0, 0)$ para o ponto $(0, \pi/2, 3)$

- (a) por uma reta
 (b) pela hélice $x = 3 \cos t, y = t, z = 3 \sin t$

11-12 □ Mostre que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo. Então encontre a função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy} \mathbf{i} + (e^y + x^2 e^{xy}) \mathbf{j}$
 12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin y \mathbf{i} + x \cos y \mathbf{j} - \sin z \mathbf{k}$

13-14 □ Mostre que \mathbf{F} é conservativo e use esse fato para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo da curva dada.

13. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3 y^2 - 2xy^3) \mathbf{i} + (2x^4 y - 3x^2 y^2 + 4y^3) \mathbf{j}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = (t + \sin \pi t) \mathbf{i} + (2t + \cos \pi t) \mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \mathbf{i} + (xe^y + e^z) \mathbf{j} + ye^z \mathbf{k}$
 C é o segmento de reta de $(0, 2, 0)$ a $(4, 0, 3)$

15. Verifique que o Teorema de Green é verdadeiro para a integral de linha $\int_C xy^2 \, dx - x^2 y \, dy$, onde C consiste na parábola $y = x^2$, de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ e do segmento de reta de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.

16. Use o Teorema de Green para calcular

$$\int_C \sqrt{1+x^3} \, dx + 2xy \, dy$$

onde C é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 3)$.

17. Use o Teorema de Green para calcular $\int_C x^2 y \, dx - xy^2 \, dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ orientado no sentido anti-horário.

18. Determine $\text{rot } \mathbf{F}$ e $\text{div } \mathbf{F}$ se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x} \sin y \mathbf{i} + e^{-y} \sin z \mathbf{j} + e^{-z} \sin x \mathbf{k}$$

19. Mostre que não existe um campo vetorial \mathbf{G} tal que

$$\text{rot } \mathbf{G} = 2x \mathbf{i} + 3yz \mathbf{j} - xz^2 \mathbf{k}$$

20. Mostre que, sob algumas condições a serem estabelecidas sobre os campos vetoriais \mathbf{F} e \mathbf{G} ,

$$\text{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \text{ div } \mathbf{G} - \mathbf{G} \text{ div } \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}$$

21. Se C é uma curva simples fechada lisa por trechos, e f e g são funções diferenciáveis, mostre que

$$\int_C f(x) \, dx + g(y) \, dy = 0$$

22. Se f e g são funções duplamente diferenciáveis, mostre que

$$\nabla^2(fg) = f \nabla^2 g + g \nabla^2 f + 2 \nabla f \cdot \nabla g$$

23. Se f é uma função harmônica, ou seja, $\nabla^2 f = 0$, mostre que a integral de linha $\int_C f_y \, dx - f_x \, dy$ é independente do caminho em qualquer região simples D .

24. (a) Esboce a curva C com equações paramétricas

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(b) Determine

$$\int_C 2xe^{2y} \, dx + (2x^2 e^{2y} + 2y \cot g z) \, dy - y^2 \text{cosec}^2 z \, dz$$

25. Determine a área da parte da superfície $z = x^2 + 2y$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$.

26. (a) Determine uma equação do plano tangente ao ponto $(4, -2, 1)$ para a superfície paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = v^2 \mathbf{i} - uv \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq 3, -3 \leq v \leq 3$$

- (b) Use um computador para traçar o gráfico da superfície S e do plano tangente achado na parte (a).
 (c) Estabeleça, mas não calcule, uma integral que dê a área da superfície S .
 (d) Se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z^2}{1+x^2} \mathbf{i} + \frac{x^2}{1+y^2} \mathbf{j} + \frac{y^2}{1+z^2} \mathbf{k}$$

ache $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ preciso até a quarta casa decimal.

27-30 □ Calcule a integral de superfície.

27. $\iint_S z \, dS$, onde S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 4$
 28. $\iint_S (x^2z + y^2z) \, dS$, onde S é a parte do plano $z = 4 + x + y$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$
 29. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} - 2y \mathbf{j} + 3x \mathbf{k}$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com orientação para fora
 30. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ e S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 1$ com orientação para cima

31. Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k},$$

onde S é a parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy , e S está orientado para cima.

32. Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz \mathbf{i} + yz^2 \mathbf{j} + z^3e^{xy} \mathbf{k}$, S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ que está acima do plano $z = 1$, e S tem orientação para cima.
 33. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$ e C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.
 34. Use o Teorema da Divergência para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$ e S é a superfície do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 2$.
 35. Verifique que o Teorema da Divergência é verdadeiro para o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

onde E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

36. Calcule o fluxo para fora de

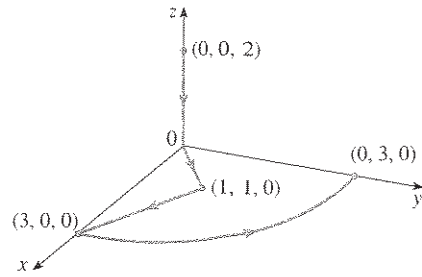
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

através do elipsóide $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$.

37. Seja

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2yz - 3y) \mathbf{i} + (x^3z - 3x) \mathbf{j} + (x^3y + 2z) \mathbf{k}$$

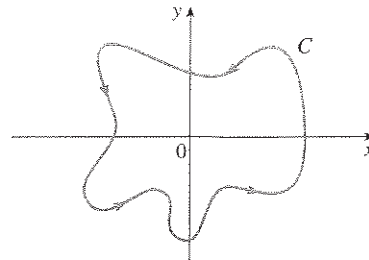
Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva com início em $(0, 0, 2)$ e término em $(0, 3, 0)$, como mostrado na figura.



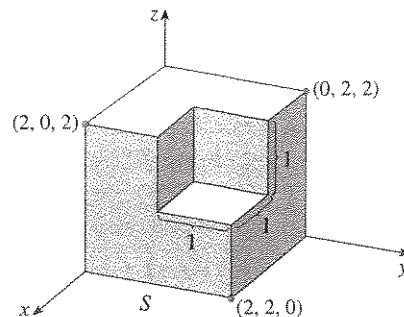
38. Seja

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(2x^3 + 2xy^2 - 2y) \mathbf{i} + (2y^3 + 2x^2y + 2x) \mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é como mostrado na figura.



39. Determine $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ e S é a superfície mostrada na figura, com orientação para fora (a fronteira do cubo com um cubo unitário removido).



40. Se os componentes de \mathbf{F} têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas e S é a superfície fronteira de uma região sólida simples, mostre que $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

Problemas Quentes

1. Seja S uma superfície paramétrica lisa e seja P um ponto tal que cada raio que comece em P intercepte S no máximo uma vez. O **ângulo sólido** $\Omega(S)$ subtendido por S em P é o conjunto dos raios que começam em P e passam por S . Seja $S(a)$ a interseção de $\Omega(S)$ com a superfície da esfera com centro em P e raio a . Então a medida do ângulo sólido (*estereo-radianos*) é definida como

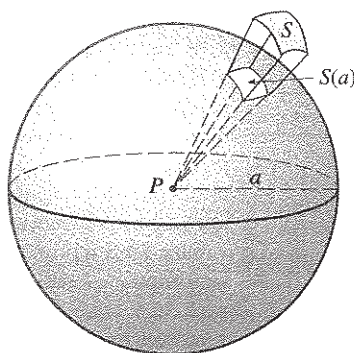
$$|\Omega(S)| = \frac{\text{área de } S(a)}{a^2}$$

Aplique o Teorema da Divergência para a parte de $\Omega(S)$ entre $S(a)$ e S para mostrar que

$$|\Omega(S)| = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS$$

onde \mathbf{r} é o vetor radial de P a um ponto qualquer sobre $r = |\mathbf{r}|$, e o sentido do vetor unitário normal \mathbf{n} é saindo de P .

Isso mostra que a definição de medida de um ângulo sólido é independente do raio a da esfera. Assim, a medida do ângulo sólido é igual à área subtendida sobre uma esfera *unitária*. (Note a analogia com a definição da medida em radianos.) O ângulo total sólido subtendido por uma esfera em seu centro é, portanto, 4π estereo-radianos.



2. Ache uma curva simples fechada C para a qual o valor da integral de linha

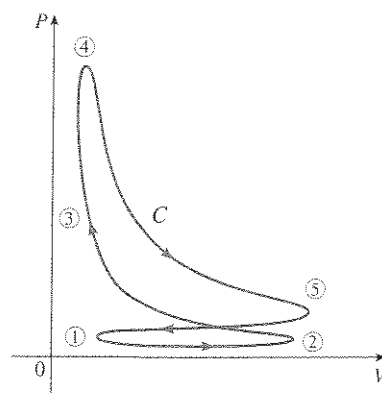
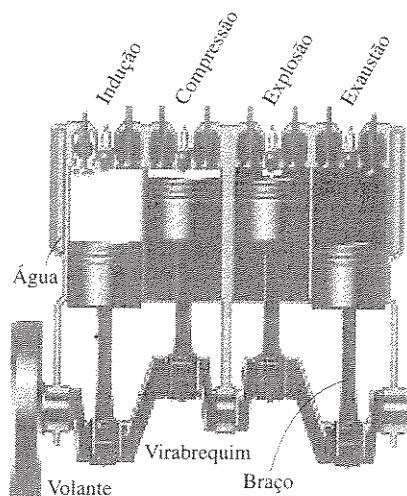
$$\int_C (y^3 - y) dx - 2x^3 dy$$

é máximo.

3. Seja C uma curva espacial simples fechada lisa por trechos que esteja contida em um plano com vetor unitário normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ e orientada positivamente em relação a \mathbf{n} . Mostre que a área do plano contida por C é

$$\frac{1}{2} \int_C (bz - cy) dx + (cx - az) dy + (ay - bx) dz$$

4. A figura retrata a seqüência de eventos em cada cilindro de um motor de quatro cilindros de combustão interna. Cada pistão se move para cima e para baixo e está ligado por um braço-pivô ao virabrequim. Seja $P(t)$ e $V(t)$ a pressão e o volume dentro de um cilindro no instante t , onde $a \leq t \leq b$ dá o tempo necessário para um ciclo completo. O gráfico mostra como P e V variam durante um ciclo em um motor de quatro tempos.



Durante o estágio de indução (de ① a ②) a mistura de ar e gasolina à pressão atmosférica é aspirada para o interior do cilindro pela válvula de entrada à medida que o pistão se move para baixo. Aí o pistão comprime rapidamente a mistura com a válvula fechada, no estágio de compressão (de ② a ③) durante o qual a pressão aumenta e o volume diminui. Em ③ uma faísca proveniente da vela de ignição provoca a combustão da mistura, elevando a temperatura e a pressão com um volume praticamente constante até ④. Aí, com a válvula fechada, uma rápida expansão do volume força o pistão para baixo durante o estágio de potência (de ④ a ⑤). A válvula se abre, a temperatura e a pressão caem, e a energia mecânica armazenada no volante impulsiona o pistão para cima, forçando a saída dos gases que se formaram no interior pela válvula, no estágio de exaustão. A válvula de exaustão se fecha e a válvula de entrada se abre. Estamos de volta a ① e o ciclo se reinicia.

- (a) Mostre que o trabalho realizado pelo pistão durante um ciclo de um motor de quatro tempos é $W = \int_C P dV$, onde C é a curva no plano PV mostrada na figura.

[Dica: seja $x(t)$ a distância do pistão até o topo do cilindro e note que a força sobre o pistão é $\mathbf{F} = AP(t) \mathbf{i}$, onde A é a área do topo do pistão. Então, $W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C_1 é dado por $\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i}$, $a \leq t \leq b$. Um modo alternativo é trabalhar diretamente com as somas de Riemann.]

- (b) Use a Fórmula 16.4.5 para mostrar que o trabalho é a diferença da área contida pelos dois laços de C .