Derivadas Parciais

Capítulo 14

No Exemplo 6 da Seção 14.7 maximizamos a função volume $V = xyz$ sujeita à restrição $2xz + 2yz + xy =$ que expressa a condição de a área da superfície ser de 12 m^2.

Nesta seção apresentaremos o método de Lagrange para maximizar uma função genérica $f(x, y, z)$ sujeita a uma restrição (ou vínculo) da forma $g(x, y, z) = k$.

14.8
Multiplicadores de Lagrange

Nesta seção, aprenderemos sobre:

Multiplicadores de Lagrange para duas e três variáveis e restrições.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

É fácil explicar a base geométrica do método de Lagrange para as funções de duas variáveis.

Então, vamos começar tentando determinar os valores extremos de $f(x, y)$ sujeita a uma restrição da forma $g(x, y) = k$.

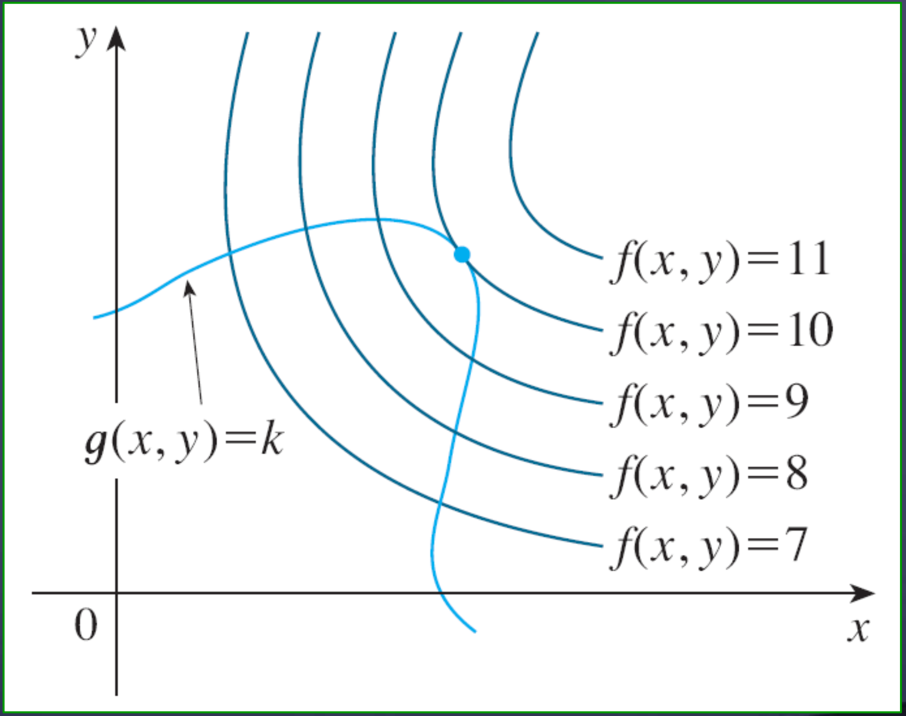
MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 2 VARIÁVEIS

Em outras palavras, queremos achar os valores extremos de $f(x, y)$ quando o ponto (x, y) pertencer à curva de nível $g(x, y) = k$.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 2 VARIÁVEIS

A figura mostra essa curva juntamente com várias outras curvas de nível da função *f*.

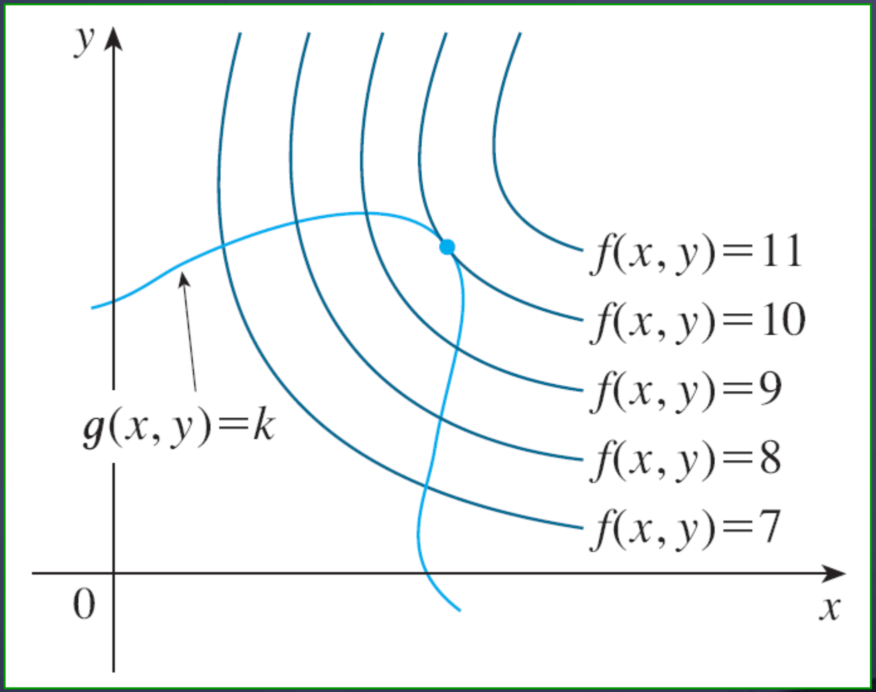
- Essas curvas de nível têm equação $f(x, y) = c$, onde $c = 7, 8, 9, 10, 11$.



MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 2 VARIÁVEIS

Maximizar $f(x, y)$ sujeita a $g(x, y) = k$ é achar:

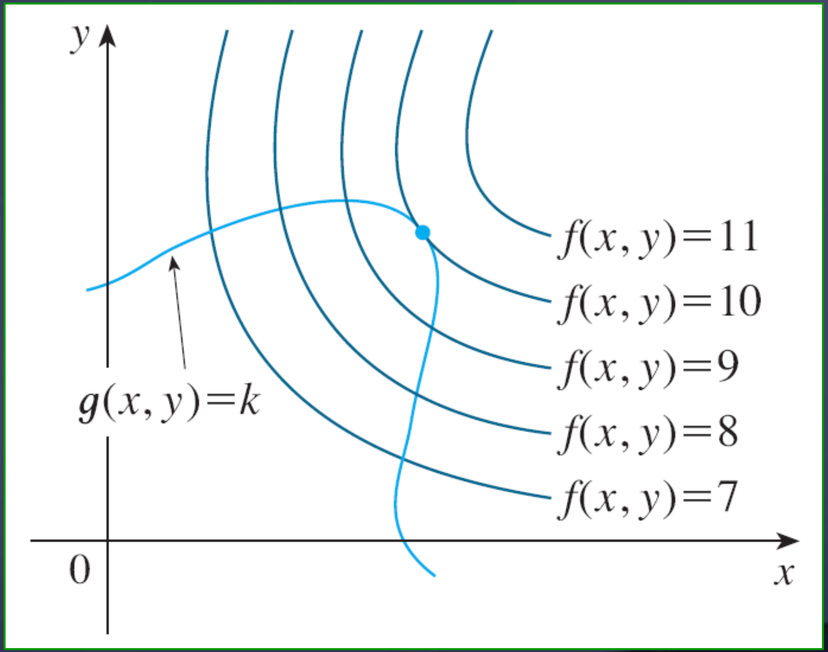
- qual o maior valor de c tal que a curva de nível $f(x, y) = c$ intercepte $g(x, y) = k$.



MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 2 VARIÁVEIS

Parece que isso acontece quando essas curvas se tocam, ou seja, quando essas curvas têm uma reta tangente comum.

- Caso contrário, poderíamos aumentar o valor de *c*.



MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 2 VARIÁVEIS

Isso significa que as retas normais ao ponto $(x_0\ ,\ y_0)$ onde as duas curvas se tocam devem ser as mesmas.

- Logo, os vetores gradientes são paralelos.
- Ou seja, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algum escalar λ.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 3 VARIÁVEIS

Esse tipo de argumento também se aplica ao problema de achar os valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$.

- Assim, o ponto (x, y, z) está restrito a pertencer à superfície S com equação $g(x, y, z) = k$.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 3 VARIÁVEIS

Em vez das curvas de nível da figura anterior, devemos considerar as superfícies de nível $f(x, y, z) = c$.

- Argumentamos que, se o valor máximo de f é $f(x_0, y_0, z_0) = c$, então a superfície de nível $f(x, y, z) = c$ é tangente à superfície de nível $g(x, y, z) = k$.
- Então, os correspondentes gradientes são paralelos.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 3 VARIÁVEIS

Esse argumento intuitivo pode se tornar preciso da seguinte forma.

- Suponha que uma função f tenha um valor extremo no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre a superfície S.
- Seja C uma curva com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ que pertença a S e passe pelo ponto P.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 3 VARIÁVEIS

Se t_0 é o valor do parâmetro correspondente ao ponto *P*, então

$$\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$$

A função composta

$$h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$$

fornece os valores de *f* sobre a curva *C*.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 3 VARIÁVEIS

Como f tem um valor extremo em (x_0, y_0, z_0), segue que h tem um valor extremo em t_0.

Portanto, $h'(t_0) = 0$.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 3 VARIÁVEIS

Porém, se *f* for diferenciável, usando a Regra da Cadeia, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
0 &= h'(t_0) \\
&= f_x(x_0, y_0, z_0)\,x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)\,y'(t_0) \\
&\qquad + f_z(x_0, y_0, z_0)\,z'(t_0) \\
&= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0)
\end{aligned}
$$

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 3 VARIÁVEIS

Isso mostra que o vetor gradiente $\nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right)$ é ortogonal ao vetor tangente **r**'(t_0) para toda curva *C* assim obtida.

CENGAGE Learning™

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – 3 VARIÁVEIS

Mas já vimos na Seção 14.6 que o vetor gradiente de *g*, $\nabla g\left(x_0, y_0, z_0\right)$, também é ortogonal a **r**’(t_0).

- Veja a Equação 14.6.18.
- Isso significa que os vetores $\nabla g\left(x_0, y_0, z_0\right)$ e $\nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right)$ precisam ser paralelos.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE Equação 1

Portanto,se $\nabla g\left(x_0, y_0, z_0\right) \neq 0$, existe um número *λ* tal que:

$$\nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \lambda \nabla g\left(x_0, y_0, z_0\right)$$

- O número *λ* na Equação 1 é chamado **multiplicador de Lagrange**.
- O procedimento baseado na Equação 1 é o seguinte:

MÉTODO DE LAGRANGE

Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$ [supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ sobre a superfície $g(x, y, z) = k$]:

MÉTODO DE LAGRANGE

a. Determine todos os valores de *x*, *y*, *z* e de *λ* tais que:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

e

$$g(x, y, z) = k$$

b. Calcule *f* em todos os pontos (*x*, *y*, *z*) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de *f*, e o menor será o valor mínimo de *f*.

MÉTODO DE LAGRANGE

Ao deduzir o Método de Lagrange, supusemos que $\nabla g \neq 0$.

- Em cada um de nossos exemplos, você pode verificar que $\nabla g \neq 0$ em todos os pontos onde $g(x, y, z) = k$.

MÉTODO DE LAGRANGE

Se escrevermos a equação vetorial $\nabla f = \lambda \nabla g$ em termos de suas componentes, as equações do passo (a) ficarão

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad f_z = \lambda g_z \quad g(x, y, z) = k$$

- Isto é um sistema de quatro equações a quatro incógnitas, x, y, z e λ.
- Mas não é necessário calcular de modo explícito valores para λ.

MÉTODO DE LAGRANGE

Para as funções de duas variáveis, o método dos multiplicadores de Lagrange é análogo àquele que acabamos de descrever.

MÉTODO DE LAGRANGE

Para achar os valores extremos de $f(x, y)$ sujeitos à restrição $g(x, y) = k$, olhamos para todos os valores de x, y e λ tais que:

$$\boxed{\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = k}$$

- Isso leva à solução de um sistema de três equações a três incógnitas:

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = k$$

MÉTODO DE LAGRANGE

Nosso primeiro exemplo de método de Lagrange é reconsiderar o problema dado no Exemplo 6 da Seção 14.7.

Uma caixa retangular sem tampa é feita de 12 m² de papelão.

Determine o volume máximo dessa caixa.

Como no Exemplo 6 da Seção 14.7, sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, da caixa em metros.

Queremos maximizar $V = xyz$ sujeita à restrição

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

MÉTODO DE LAGRANGE EXEMPLO 1

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, olhamos para os valores de x, y, z e λ tais que $\nabla V = \lambda \nabla g$ e $g(x, y, z)$ 12.

Isso gera as equações

$$V_x = \lambda g_x \qquad V_y = \lambda g_y \qquad V_z = \lambda g_z$$

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Essas equações se tornam:

$$yz = \lambda(2z + y)$$

$$xz = \lambda(2z + x)$$

$$xy = \lambda(2x + 2y)$$

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

MÉTODO DE LAGRANGE EXEMPLO 1

Não há regras gerais de como resolver esse sistema de equações.

Algumas vezes precisamos de certa engenhosidade.

MÉTODO DE LAGRANGE EXEMPLO 1

No presente caso, você pode observar que, se multiplicarmos (2) por *x*, (3) por *y* e (4) por *z*, os lados esquerdos dessas equações ficam idênticos.

Fazendo isso, temos

$$xyz = \lambda(2xz + xy)$$

$$xyz = \lambda(2yz + xy)$$

$$xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

Observamos que $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0$ implicaria $yz = xz = xy = 0$ de (2), (3) e (4), e isso contradiz (5).

Logo, de (6) e (7), temos

$2xz + xy = 2yz + xy$ que dá $xz = yz$.

- Mas, $z \neq 0$ (uma vez que $z = 0$ daria $V = 0$), portanto, $x = y$.

De (7) e (8), obtemos

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

Que dá $2xz = xy$.

- Assim, como $x \neq 0$, $y = 2z$.

CENGAGE Learning™

Se colocarmos $x = y = 2z$ em (5), obteremos

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

- Como x, y, e z são todos positivos, temos, portanto, que $z = 1$ e $x = 2$ de modo que $y = 2$.

- Isto coincide com nossa resposta na Seção 14.7.

MÉTODO DE LAGRANGE

Outro método de resolver o sistema de equações (2-5) é isolar λ em cada uma das Equações 2, 3 e 4 para depois igualar as expressões resultantes.

MÉTODO DE LAGRANGE EXEMPLO 2

Determine os valores extremos da função

$f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

- Foi-nos pedido para determinar os valores extremos de f sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$.

Usando os multiplicadores de Lagrange, resolvemos as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x, y) = 1$.

Elas podem ser escritas como:

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = 1$$

Ou poderíamos escrevê-las como:

$$2x = 2x\lambda$$

$$4y = 2y\lambda$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

De (9), temos

$$x = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

- Se $x = 0$, então (11) leva a $y = \pm 1$.
- Se $\lambda = 1$, então $y = 0$ de (10), e assim (11) fornece $x = \pm 1$.

Dessa forma, os valores extremos possíveis de f são os pontos

$$(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$$

- Calculando f nesses quatro pontos, achamos

$$f(0, 1) = 2 \qquad f(0, -1) = 2 \qquad f(1, 0) = 1 \qquad f(-1, 0) = 1$$

Portanto, o valor máximo de f no círculo $x^2 + y^2 = 1$ é:

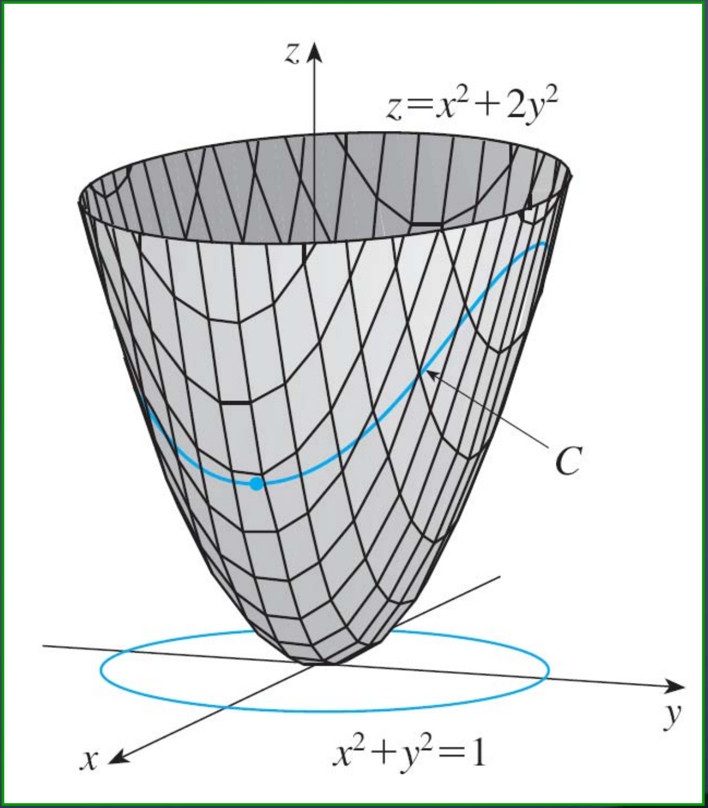
$$f(0, \pm 1) = 2$$

O valor mínimo é

$$f(\pm 1, 0) = 1$$

MÉTODO DE LAGRANGE EXEMPLO 2

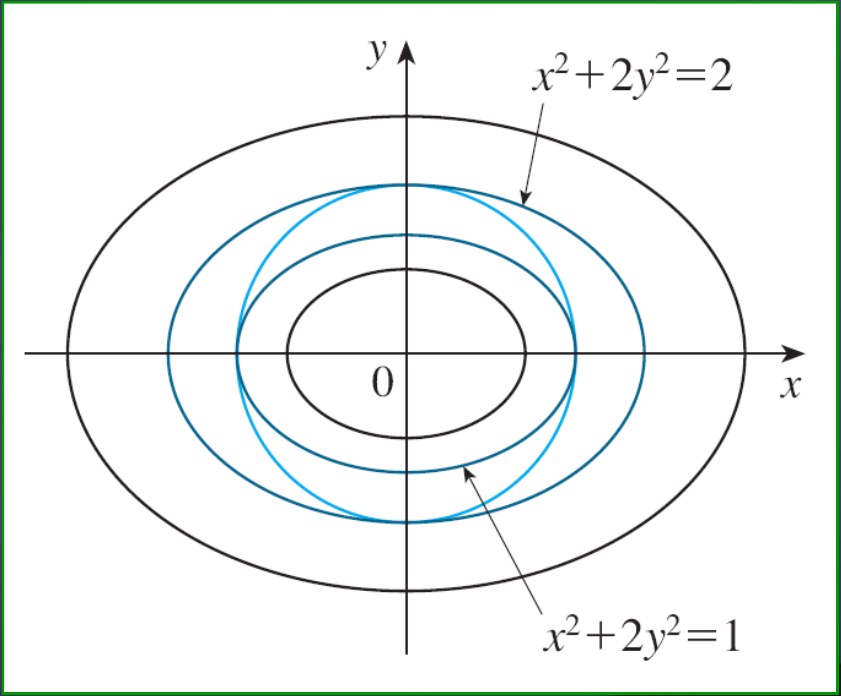
Verificando na figura, vemos que esses valores são razoáveis.



MÉTODO DE LAGRANGE EXEMPLO 2

A geometria por trás do uso de multiplicadores de Lagrange no Exemplo 2 é mostrada aqui.

- Os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ correspondem às curvas de nível que tocam a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.



MÉTODO DE LAGRANGE EXEMPLO 3

Determine os valores extremos de

$f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

- De acordo com o procedimento em (14.7.9), comparamos os valores de f nos pontos críticos com os pontos na fronteira.

MÉTODO DE LAGRANGE EXEMPLO 3

Como $f_x = 2x$ e $f_y = 4y$, o único ponto crítico é (0, 0).

- Comparamos o valor de *f* nesse ponto com os valores extremos de *f* na fronteira obtidos no Exemplo 2:

$$f(0, 0) = 0 \qquad f(\pm 1, 0) = 1 \qquad f(0, \pm 1) = 2$$

Assim, o valor máximo de f no disco $x^2 + y^2 \leq 1$ é:

$$f(0, \pm 1) = 2$$

O valor mínimo é

$$f(0, 0) = 0$$

Determine os pontos da esfera

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximos

e mais distantes do ponto $(3, 1, -1)$.

A distância de um ponto (*x*, *y*, *z*) ao ponto (3, 1, –1) é:

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

- mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos e minimizarmos o quadrado dessa distância:

$$\begin{aligned} d^2 &= f(x, y, z) \\ &= (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 \end{aligned}$$

MÉTODO DE LAGRANGE EXEMPLO 4

A restrição é que o ponto (x, y, z) pertença à esfera, ou seja,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, resolvemos

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \; g = 4$$

O que nos leva a:

$$2(x - 3) = 2x\lambda \qquad 2(y - 1) = 2y\lambda$$

$$2(z + 1) = 2z\lambda \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

O modo mais simples de resolver essas equações é determinar *x*, *y* e *z* em termos de λ de (12), (13) e (14), e substituir esses valores em (15).

De (12), temos

$$x - 3 = x\lambda \quad \text{ou} \quad x(1 - \lambda) = 3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{1-\lambda}$$

- Observe que $1 - \lambda \neq 0$ porque de (12), $\lambda = 1$ é impossível.

De forma semelhante, (13) e (14) fornecem

$$y = \frac{1}{1-\lambda} \qquad z = -\frac{1}{1-\lambda}$$

Portanto, de (15) temos

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{1^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2}=4$$

- que nos dá $(1 - \lambda)^2 = 11/4$, $1 - \lambda = \pm \sqrt{11}/2$.
- Logo, $\lambda = 1 \pm \dfrac{\sqrt{11}}{2}$

MÉTODO DE LAGRANGE EXEMPLO 4

Esses valores de λ então fornecem os pontos correspondentes (x, y, z):

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

- É fácil ver que *f* tem valor menor no primeiro desses pontos.

MÉTODO DE LAGRANGE EXEMPLO 4

Dessa forma, o ponto mais próximo é

$$\left(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}\right)$$

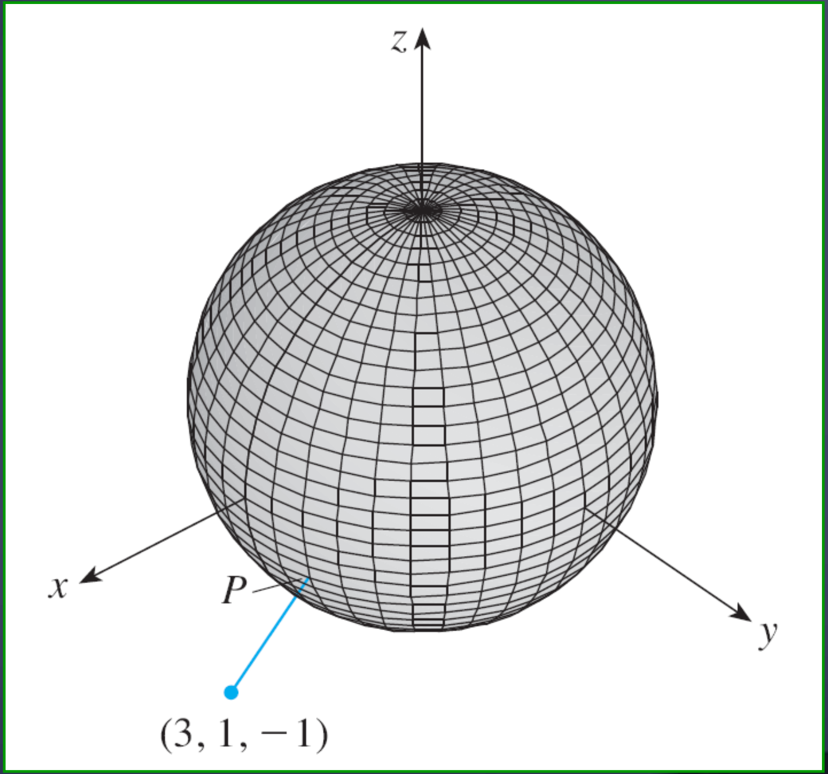
e o mais distante é

$$\left(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}\right)$$

MÉTODO DE LAGRANGE

A figura mostra a esfera e o ponto mais próximo *P* do Exemplo 4.

- Você pode pensar em um modo de calcular as coordenadas de *P* sem usar o cálculo?



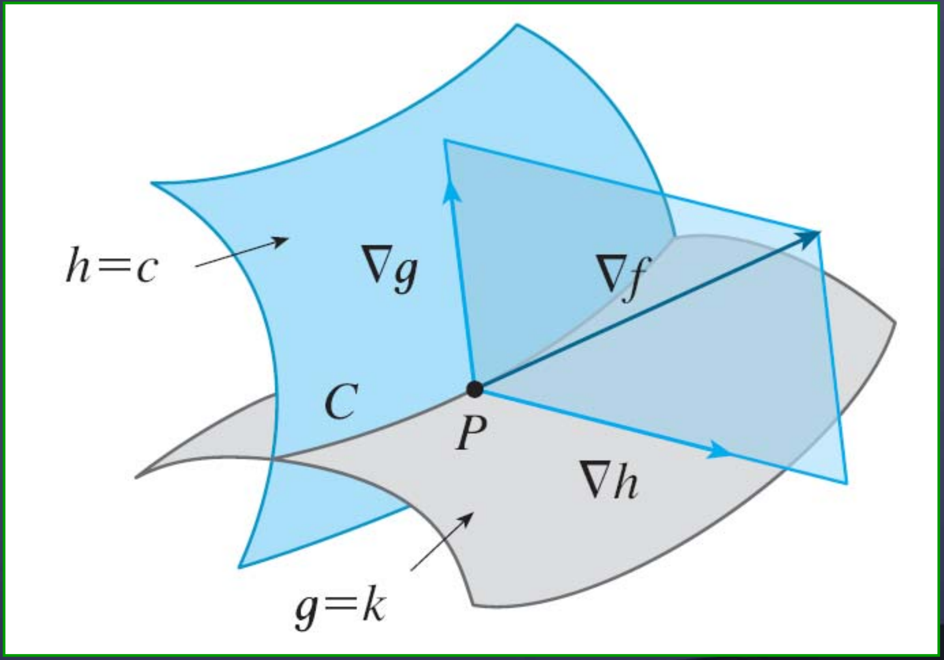
DUAS RESTRIÇÕES

Suponha agora que queiramos determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeita a duas restrições (vínculos) da forma $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$.

DUAS RESTRIÇÕES

Geometricamente, isso significa que:

- Estamos procurando pelos valores extremos de f quando (x, y, z) está restrito a pertencer à curva C, obtida pela intersecção das superfícies de nível $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$.



DUAS RESTRIÇÕES

Suponha que f tenha um tal valor extremo no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$.

Sabemos, do começo desta seção, que ∇f é ortogonal a C lá em P.

DUAS RESTRIÇÕES

Mas nós também sabemos que ∇g é ortogonal a $g(x, y, z) = k$ e que ∇h é ortogonal a $h(x, y, z) = c$.

Portanto, ∇g e ∇h são ambos ortogonais a C.

DUAS RESTRIÇÕES

Isso significa que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ pertence ao plano determinado por $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$.

- Estamos supondo que esses vetores gradientes não são paralelos nem nulos.

DUAS RESTRIÇÕES Equação 16

Logo, existem números λ e μ (chamados multiplicadores de Lagrange), tais que

$$\nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right)$$
$$= \lambda \nabla g\left(x_0, y_0, z_0\right) + \mu \nabla h\left(x_0, y_0, z_0\right)$$

DUAS RESTRIÇÕES

Nesse caso, o método de Lagrange nos leva a procurar os valores extremos resolvendo cinco equações nas cinco incógnitas

$$x, y, z, \lambda, \mu$$

DUAS RESTRIÇÕES

Essas equações podem ser obtidas escrevendo-se a Equação (16) em termos das componentes e usando as equações das restrições:

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x \qquad f_y = \lambda g_y + \mu h_y \qquad f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k \qquad h(x, y, z) = c$$

CENGAGE Learning™

DUAS RESTRIÇÕES — EXEMPLO 5

Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da intersecção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$

DUAS RESTRIÇÕES — EXEMPLO 5

Maximizamos a função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições

$$g(x, y, z) = x - y + z = 1$$

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$$

A condição de Lagrange é $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$

de modo que devemos resolver as equações

$$1 = \lambda + 2x\mu$$

$$2 = -\lambda + 2y\mu$$

$$3 = \lambda$$

$$x - y + z = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Substituindo $\lambda = 3$ [de (19)] em (17), obtemos $2x\mu = -2$.

Então, $x = -1/\mu$.

- Analogamente, (18) dá $y = 5/(2\mu)$.

Substituindo em (21), temos

$$\frac{1}{\mu^2}+\frac{25}{4\mu^2}=1$$

- E assim,

$$\mu^2=\tfrac{29}{4},\ \mu=\pm\sqrt{29}\,/\,2$$

DUAS RESTRIÇÕES EXEMPLO 5

Então, $x = \pm 2/\sqrt{29}$

$$y = \pm 5/\sqrt{29}$$

e, de (20),

$$z = 1 - x + y$$

$$= 1 \pm 7/\sqrt{29}$$

Os valores correspondentes de *f* são

$$\pm\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

- Portanto, o valor máximo de *f* na curva dada é

$$3 + \sqrt{29}$$

DUAS RESTRIÇÕES

O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intercepta o plano $x - y + z = 1$ em uma elipse.

- O Exemplo 5 pergunta o valor máximo de f quando (x, y, z) pertence a essa elipse.