Derivadas Parciais

Capítulo 14

DERIVADAS PARCIAIS

Como vimos no Capítulo 4, no Volume I, um dos principais usos da derivada ordinária é na determinação dos valores máximo e mínimo.

14.7

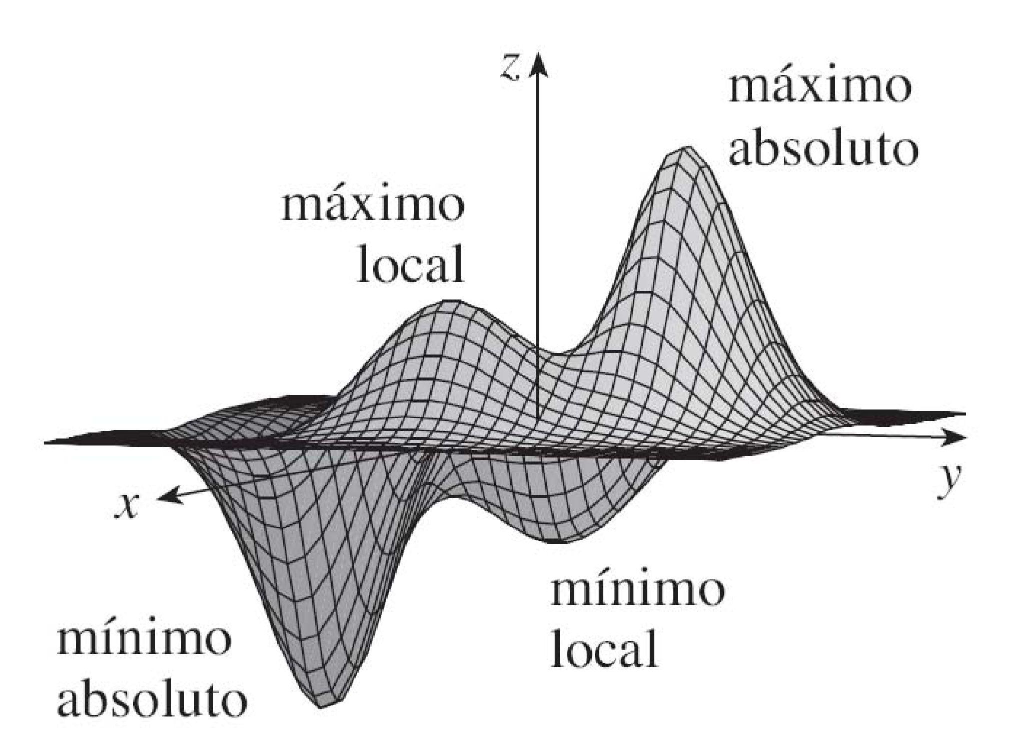
Valores Máximo e Mínimo

Nesta seção, nós aprenderemos como:

Usar derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis.

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

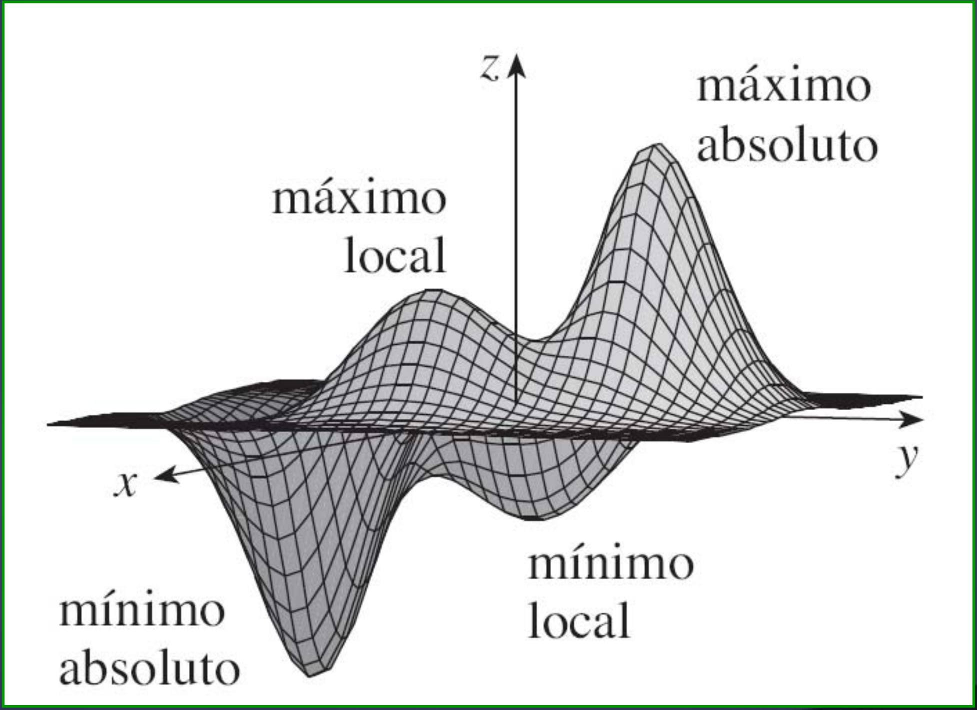
Olhe os picos e vales no gráfico de *f* mostrado na figura.



MÁXIMO ABSOLUTO

Existem dois pontos (a, b) nos quais f tem um *máximo local*, ou seja, onde f (a, b) é maior que os valores próximos de f (x, y).

- O maior destes dois valores é o *máximo absoluto*.

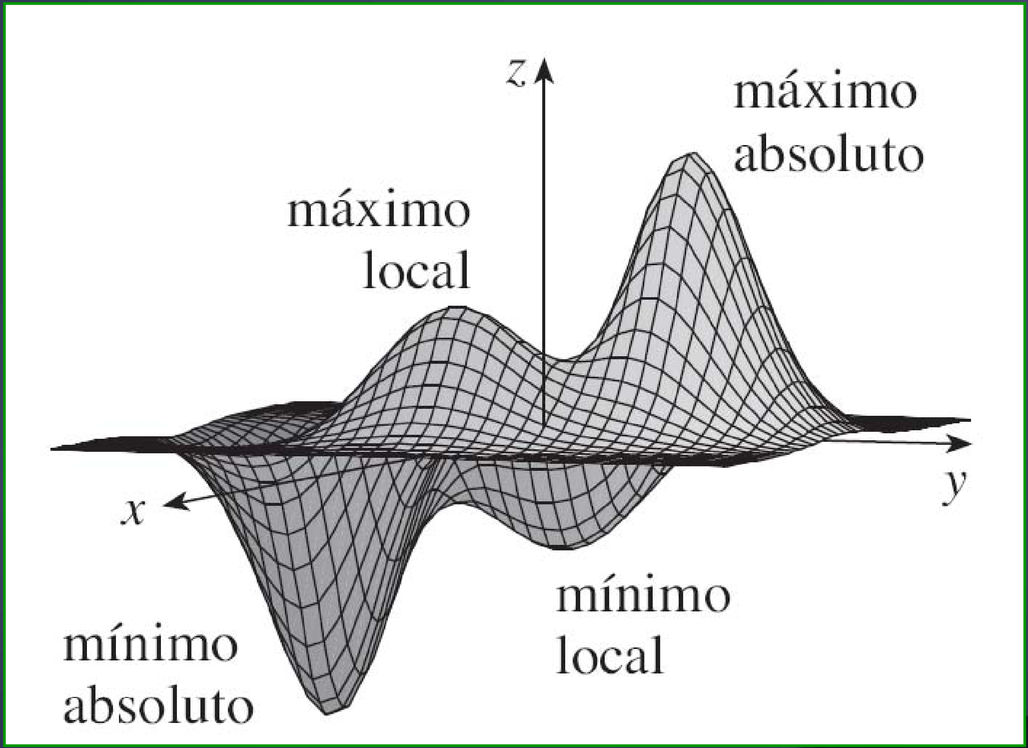


CENGAGE Learning™

MÍNIMO ABSOLUTO

Do mesmo modo, *f* tem dois *mínimos locais* onde *f* (*a*, *b*) é menor que os valores próximos.

- O menor destes dois valores é o *mínimo absoluto*.



CENGAGE Learning™

MÁXIMO LOC. & VALOR MÁXIMO LOC. Definição 1

Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se $f(x, y) \leq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b).

Isso significa que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo ponto (x, y) em alguma bola aberta com centro em (a, b).

- O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo local**.

MÍNIMO LOC. & VALOR MÍNIMO LOC. Definição 1

Se $f(x, y) \geq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b), então f tem um **mínimo local** em (a, b) e $f(a, b)$ é um **valor mínimo local**.

MÁXIMO E MÍNIMO ABSOLUTO

Se as inequações da Definição 1 valerem para todos os pontos (x, y) do domínio de f, então f tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em (a, b).

MÁXIMO E MÍNIMO LOCAL

Teorema 2

Se uma função f tem um máximo ou mínimo local em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(a, b) = 0$$

Demonstração

Seja $g(x) = f(x, b)$.

- Se f tem um máximo (ou mínimo) local em (a, b), então t tem um máximo (ou mínimo) local em a.
- De modo que $g'(a) = 0$ pelo Teorema de Fermat.

Mas, $g'(a) = f_x(a, b)$

- Veja a Equação 14.3.1.
- Assim, $f_x(a, b) = 0$.

Da mesma forma, pela aplicação do Teorema de Fermat à função $G(y) = f(a, y)$, obtemos

$$f_y(a, b) = 0$$

MÁXIMO E MÍNIMO LOCAL

Se impusermos $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ na equação do plano tangente (Equação 14.4.2), obteremos $z = z_0$.

Assim, a interpretação geométrica do Teorema 2 é:

- se o gráfico de *f* tem um plano tangente em um ponto de máximo ou mínimo local, esse plano precisa ser horizontal.

PONTO CRÍTICO

Um ponto (a, b) é dito ser um **ponto crítico** (ou *ponto estacionário*) de f se

- $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$
- ou se uma das derivadas parciais não existir.

PONTO CRÍTICO

O Teorema 2 diz que, se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b), então (a, b) é um ponto crítico de f.

PONTO CRÍTICO

Entretanto, como no cálculo de uma única variável, nem todos os pontos críticos correspondem a um máximo ou mínimo.

- Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local ou um mínimo local, ou ainda nenhum dos dois.

MÍNIMO LOCAL EXEMPLO 1

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Então, $f_x(x, y) = 2x - 2$

$f_y(x, y) = 2y - 6$

- Essas derivadas parciais são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$.
- Portanto, o único ponto crítico é $(1, 3)$.

MÍNIMO LOCAL EXEMPLO 1

Completando os quadrados, achamos

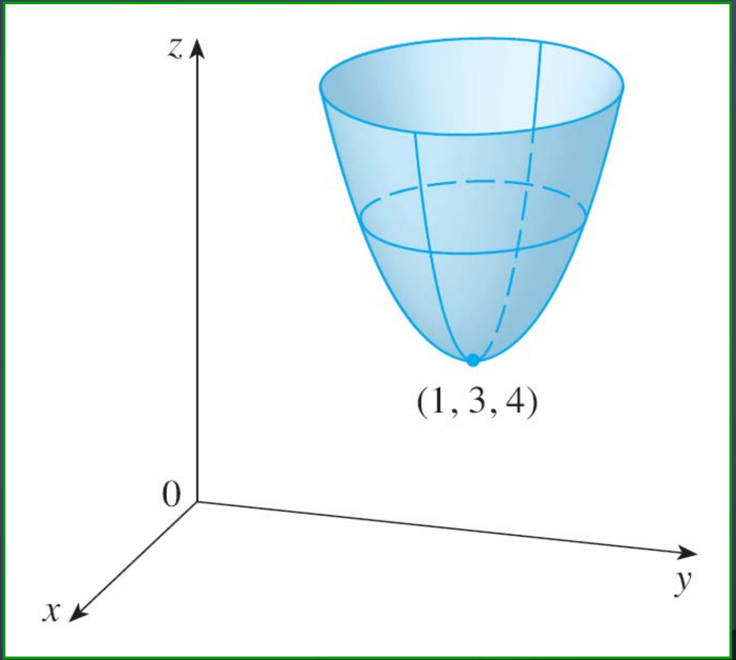
$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

- Como $(x - 1)^2 \geq 0$ e $(y - 3)^2 \geq 0$, temos $f(x, y) \geq 4$ para todos os valores de x e y.
- Logo, $f(1, 3) = 4$ é um mínimo local.
- De fato é um mínimo absoluto de f.

MÍNIMO LOCAL

EXEMPLO 1

Isso pode ser confirmado geometricamente do gráfico de *f*, que é um paraboloide elíptico com vértice (1, 3, 4).



Determine os valores extremos de

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

- Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é (0, 0).

Observe que, para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$.

- de modo que $f(x, y) = -x^2 < 0$ (se $x \neq 0$).

Entretanto, para os pontos sobre o eixo y, temos $x = 0$.

- então, $f(x, y) = y^2 > 0$ (se $y \neq 0$).

Logo, todo disco com centro (0, 0) contém pontos onde a função *f* tem valores positivos, assim como pontos onde *f* tem valores negativos.

- Por conseguinte, $f(0, 0) = 0$ não pode ser um valor extremo de *f*, e *f* não tem valor extremo.

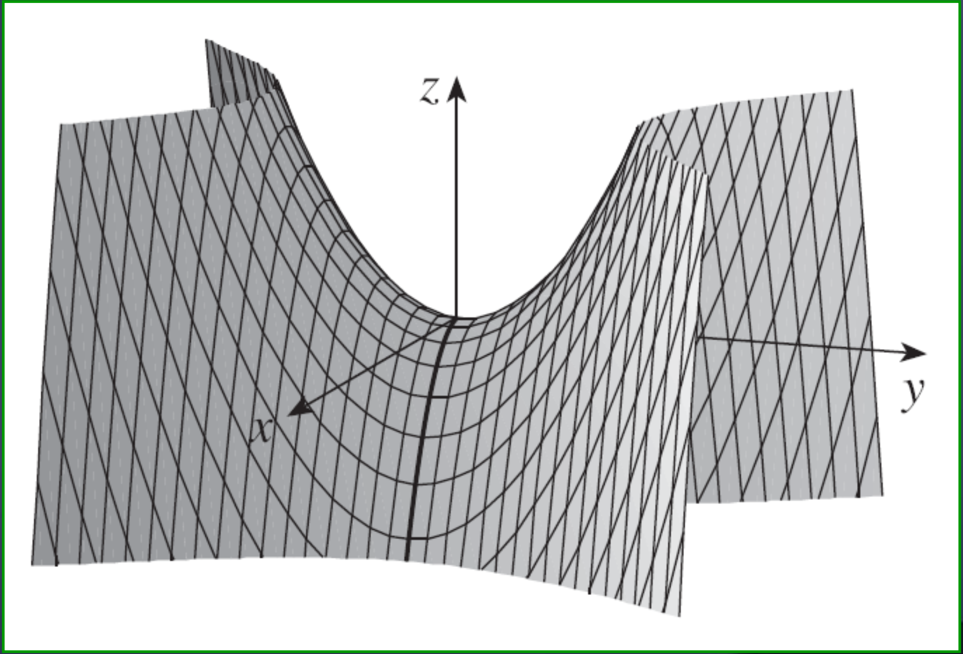
VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

O Exemplo 2 ilustra o fato de que uma função pode não ter nem máximo nem mínimo em um ponto crítico.

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

A figura mostra como isso é possível.

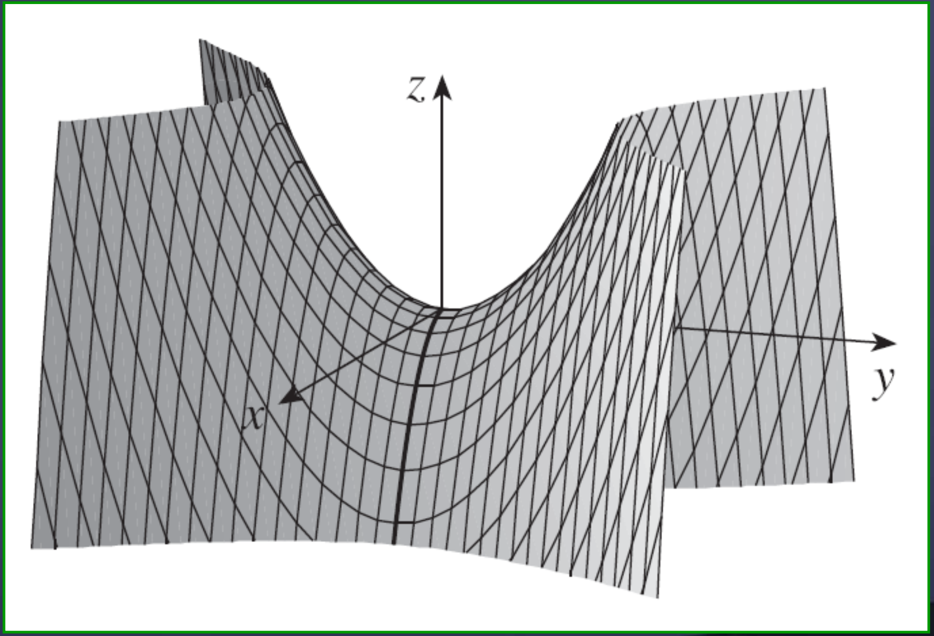
- O gráfico de f é o paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$.
- Ele tem plano horizontal tangente ($z = 0$) na origem.



VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

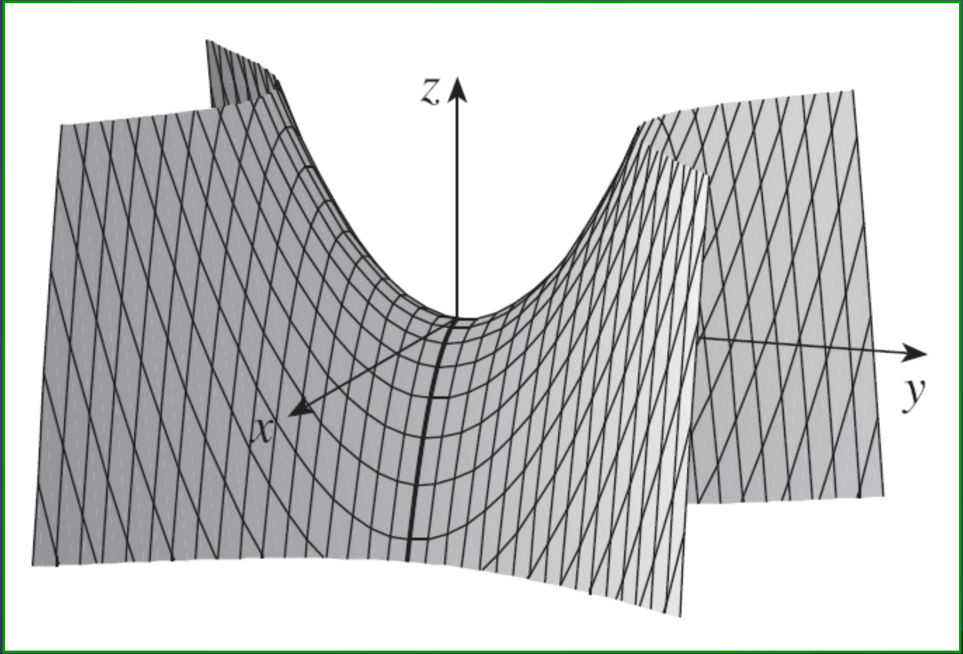
Você pode ver que $f(0, 0) = 0$ é:

- um máximo na direção do eixo *x*,
- um mínimo na direção do eixo *y*.



PONTO DE SELA

Perto da origem o gráfico tem o formato de uma sela, e por isso (0, 0) é chamado *ponto de sela* de *f*.



VALOR EXTREMO NO PONTO CRÍTICO

Precisamos ser capazes de determinar se uma função tem um valor extremo em um ponto crítico.

O teste a seguir, que será demonstrado no fim desta seção, é análogo ao Teste da Segunda Derivada para as funções de uma única variável.

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA — Teorema 3

Suponha que:

- as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a,b).
- $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ [ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f].

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA — Teorema 3

Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.
- Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.
- Se $D < 0$, então $f(a, b)$ não é mínimo local nem máximo local.

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA Obs. 1

No caso (c)

- o ponto (a, b) é chamado **ponto de sela** de f
- o gráfico de f cruza seu plano tangente em (a, b).

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA Obs. 2

Se $D = 0$, o teste não fornece informação:

- f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a, b), ou (a, b) pode ser um ponto de sela de f.

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA Obs. 3

Para lembrar a fórmula de *D*, é útil escrevê-la como um determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA — EXEMPLO 3

Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA EXEMPLO 3

Vamos inicialmente localizar os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y$$

$$f_y = 4y^3 - 4x$$

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA — EXEMPLO 3

Igualando essas derivadas parciais a zero, obtemos as equações

$$x^3 - y = 0$$

$$y^3 - x = 0$$

- Para resolvê-las, substituímos $y = x^3$ da primeira equação na segunda.

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA — EXEMPLO 3

Isso nos dá:

$$
\begin{aligned}
0 &= x^9 - x \\
&= x(x^8 - 1) \\
&= x(x^4 - 1)(x^4 + 1) \\
&= x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)
\end{aligned}
$$

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA — EXEMPLO 3

- Existem três raízes reais:

$$x = 0,\ 1,\ -1$$

- Os três pontos críticos são:

$$(0, 0),\ (1, 1),\ (-1, -1)$$

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA EXEMPLO 3

Agora vamos calcular as segundas derivadas parciais e $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA — EXEMPLO 3

Como $D(0, 0) = -16 < 0$, segue do caso (c) do Teste da Segunda Derivada que a origem é um ponto de sela.

- Ou seja, f não tem nem máximo local nem mínimo local em $(0, 0)$.

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA EXEMPLO 3

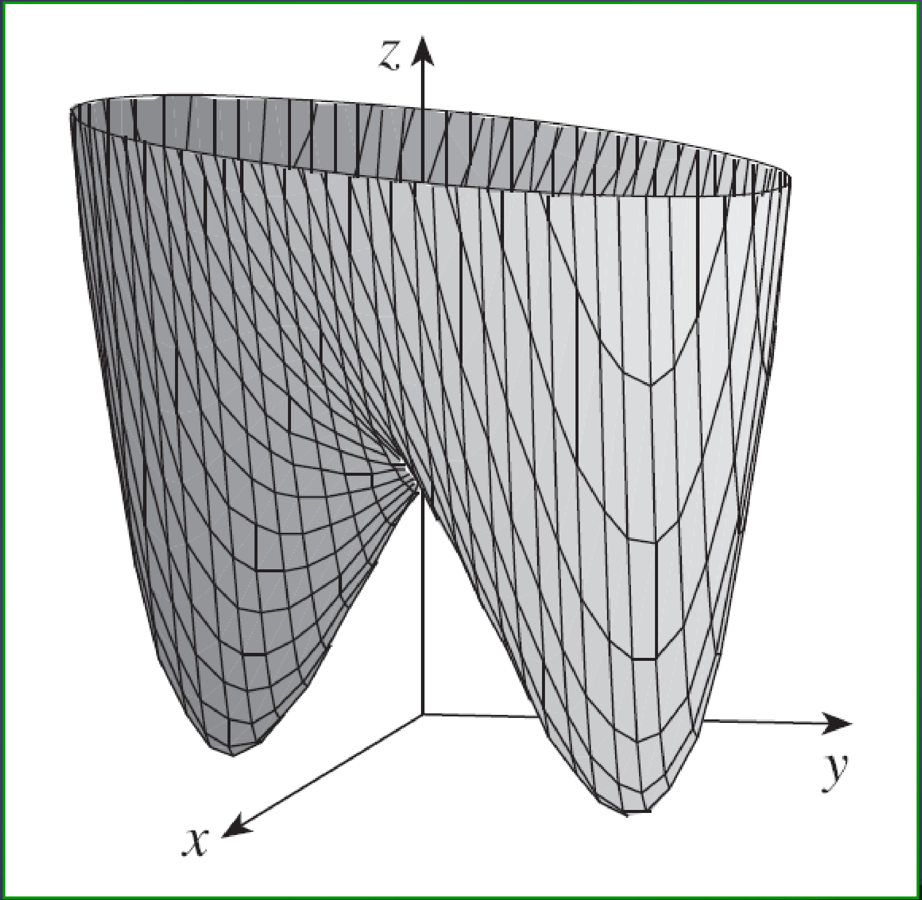
Como $D(1, 1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, vemos do caso (a) do teste que $f(1, 1) = -1$ é um mínimo local.

Da mesma forma, temos $D(-1, -1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$.

- Então, $f(-1, -1) = -1$ é também um mínimo local.

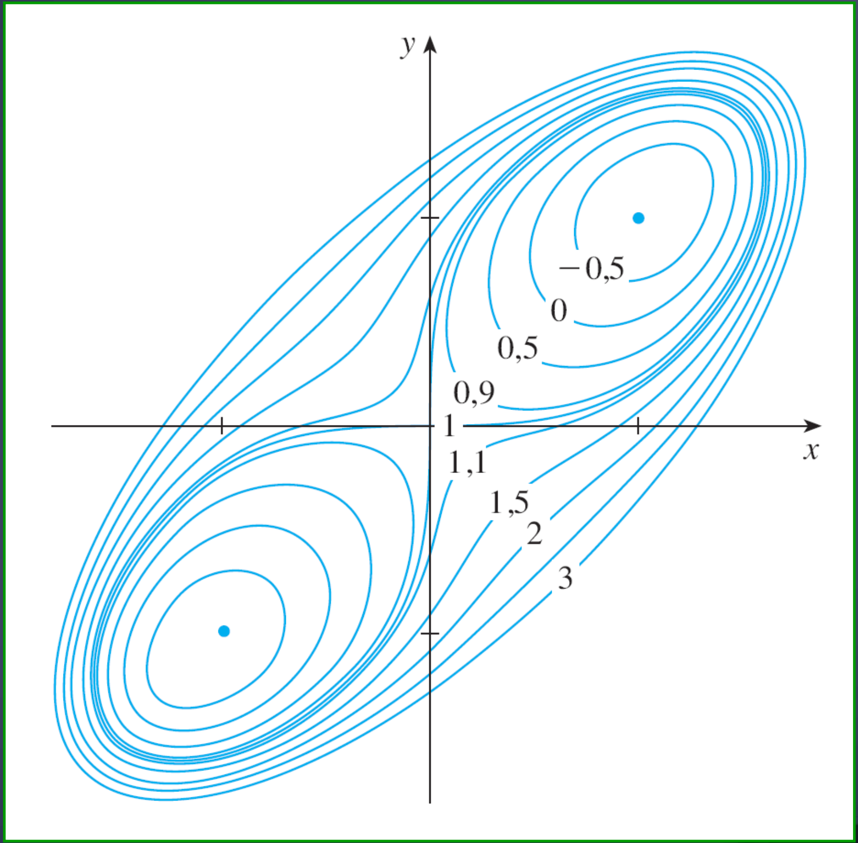
TESTE DA SEGUNDA DERIVADA — EXEMPLO 3

Veja o gráfico de *f*.



MAPA DE CONTORNO

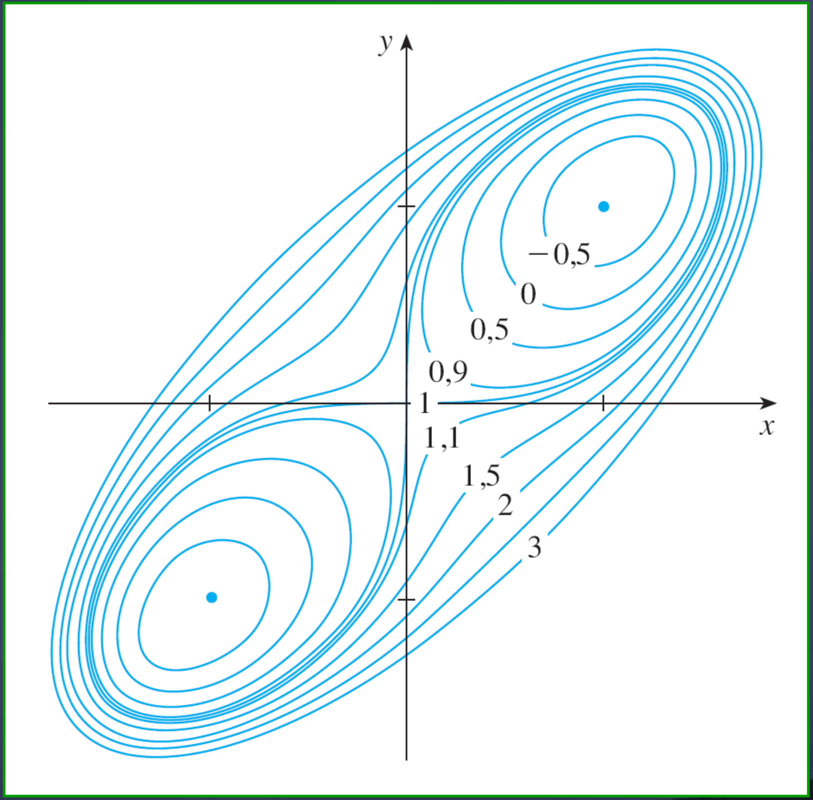
Veja o mapa de contorno da função de *f* no Exemplo 3.



MAPA DE CONTORNO

As curvas de nível perto de (1, 1) e (-1, -1) têm forma oval e indicam que:

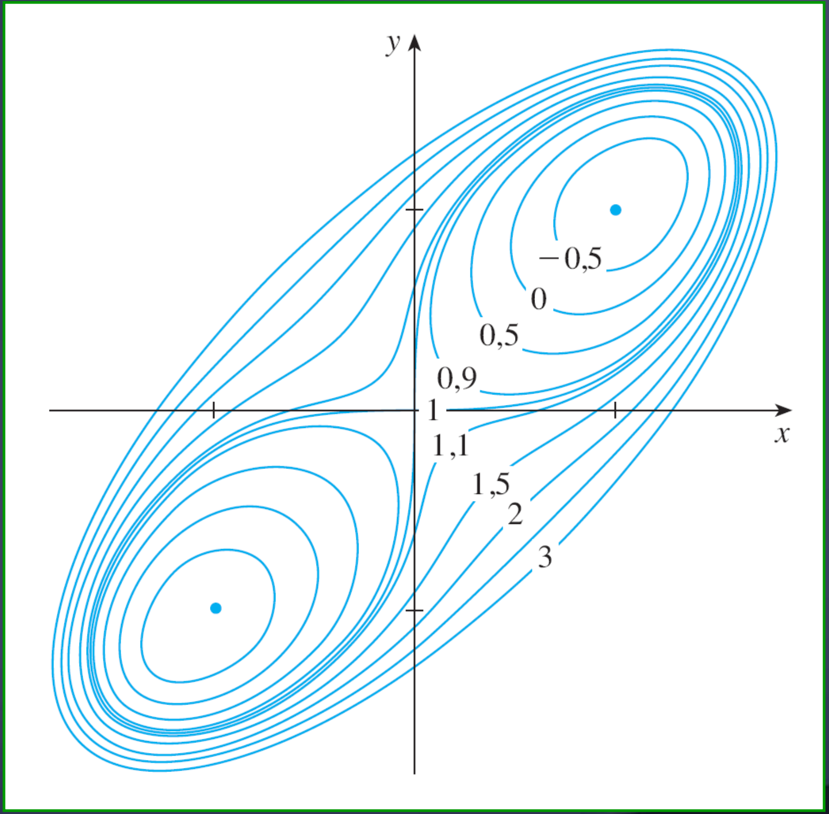
- quando nos movemos para longe de (1, 1) ou (–1, –1) em qualquer direção, os valores de *f* crescem.



MAPA DE CONTORNO

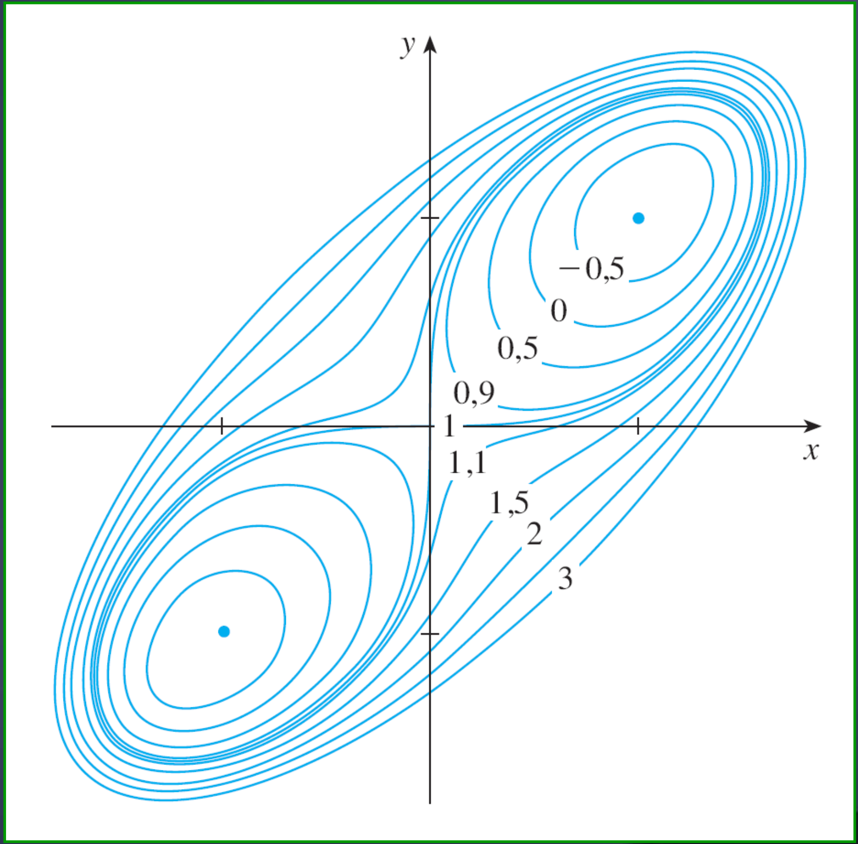
As curvas de nível perto de (0, 0), por outro lado, parecem hipérboles.

- Elas revelam que, quando nos movemos para longe da origem (onde o valor de *f* é 1), os valores de *f* decrescem em algumas direções, mas crescem em outras.



MAPA DE CONTORNO

Portanto, o mapa de contornos sugere a presença dos mínimos e do ponto de sela que encontramos no Exemplo 3.



Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Determine também o ponto mais alto do gráfico de f.

As derivadas parciais de primeira ordem são

$$f_x = 20xy - 10x - 4x^3$$

$$f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

Para achar os pontos críticos precisamos resolver as equações

$$2x(10y - 5 - 2x^2) = 0$$

$$5x^2 - 4y - 4y^3 = 0$$

Da Equação 4, vemos que

- $x = 0$
- $10y - 5 - 2x^2 = 0$

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO — EXEMPLO 4

No primeiro caso ($x = 0$), a Equação 5 fica

$$-4y(1 + y^2) = 0$$

assim $y = 0$ e temos um ponto crítico (0, 0).

No segundo caso ($10y - 5 - 2x^2 = 0$), temos

$$x^2 = 5y - 2{,}5$$

e, substituindo na Equação 5, temos

$$25y - 12{,}5 - 4y - 4y^3 = 0$$

Logo, temos de resolver a equação cúbica

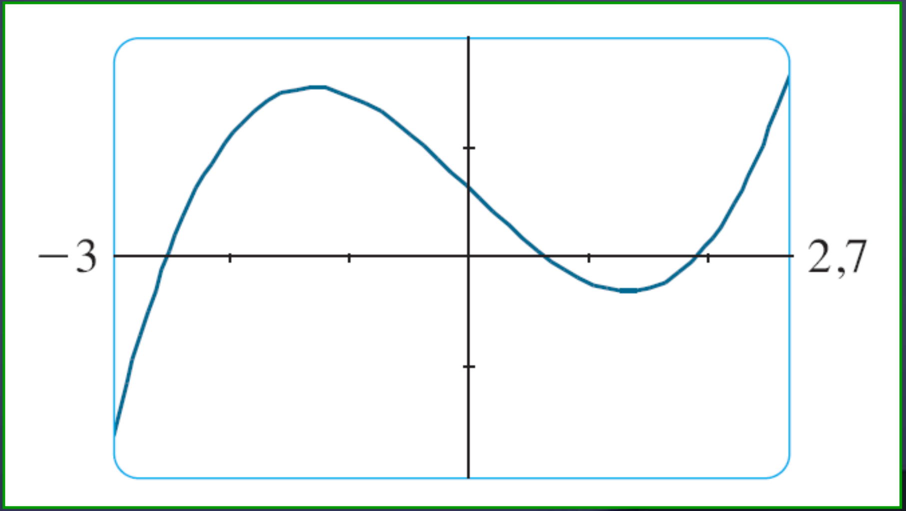
$$4y^3 - 21y + 12{,}5 = 0$$

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO — EXEMPLO 4

Utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico da função

$$g(y) = 4y^3 - 21y + 12{,}5$$

como na figura, vemos que a Equação 7 tem três raízes reais.



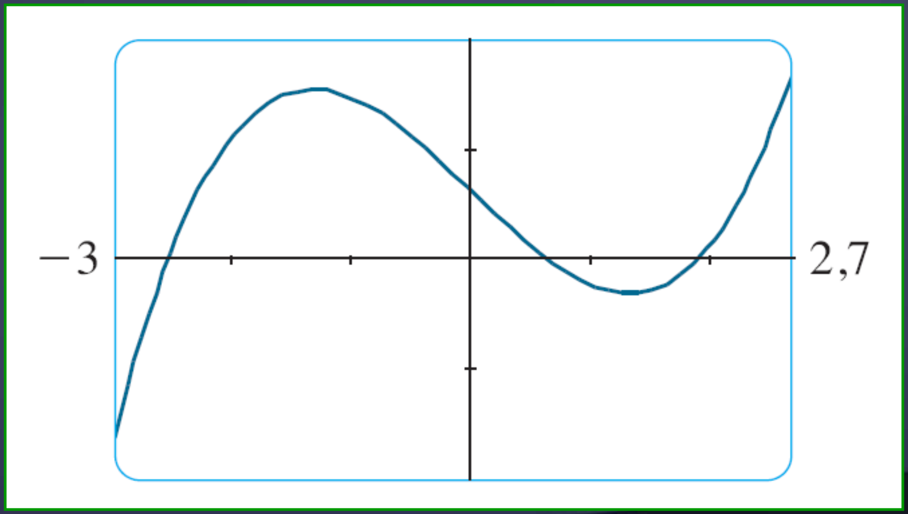
VALOR MÁXIMO E MÍNIMO

EXEMPLO 4

Dando *zoom* podemos achar as raízes com quatro casas decimais:

$y \approx -2{,}5452$ $y \approx 0{,}6468$ $y \approx 1{,}8984$

- Como alternativa, podemos usar o método de Newton ou um programa para localizar raízes para determiná-las.



VALOR MÁXIMO E MÍNIMO EXEMPLO 4

Da Equação 6, os valores de *x* correspondentes são dados por

$$x = \pm\sqrt{5y - 2{,}5}$$

- Se $y \approx -2{,}5452$, então x não tem valor real correspondente.
- Se $y \approx 0{,}6468$, então $x \approx \pm\, 0{,}8567$
- Se $y \approx 1{,}8984$, então $x \approx \pm\, 2{,}6442$

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO EXEMPLO 4

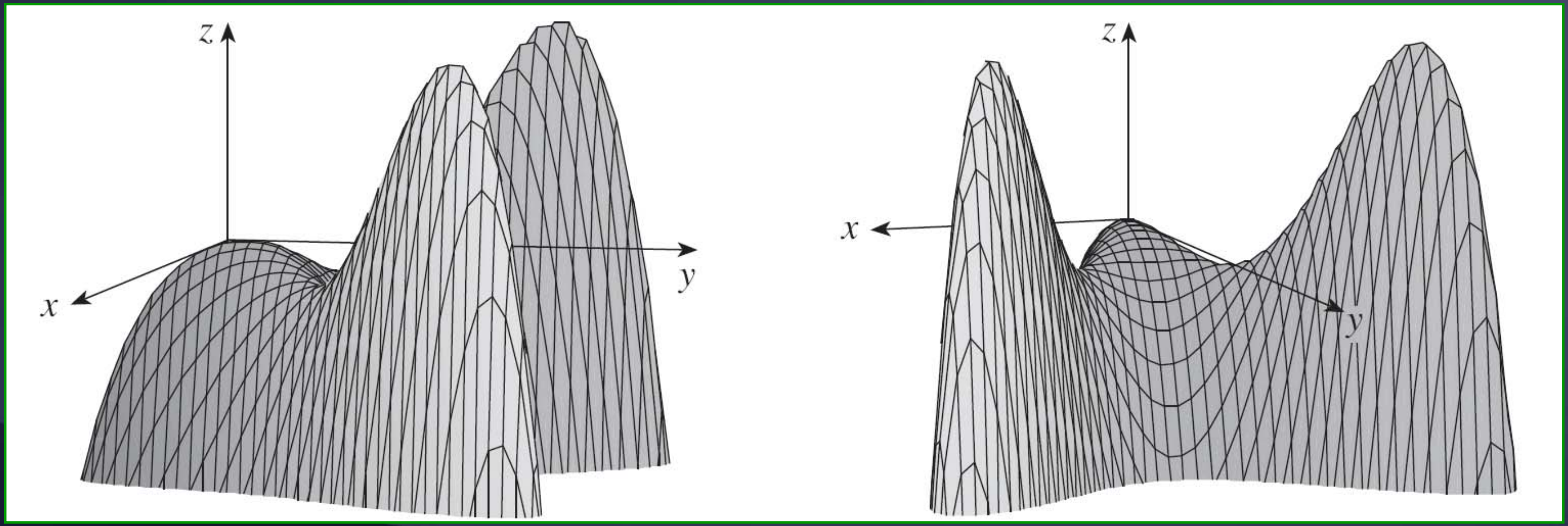
Assim, temos o total de cinco pontos críticos, que são analisados na tabela a seguir.

- Todos os valores estão arredondados para duas casas decimais.

Ponto crítico	Valor de f	f_{xx}	D	Conclusões
$(0, 0)$	0,00	−10,00	80,00	máximo local
$(\pm 2{,}64, 1{,}90)$	8,50	−55,93	2 488,72	máximo local
$(\pm 0{,}86, 0{,}65)$	−1,48	−5,87	−187,64	ponto de sela

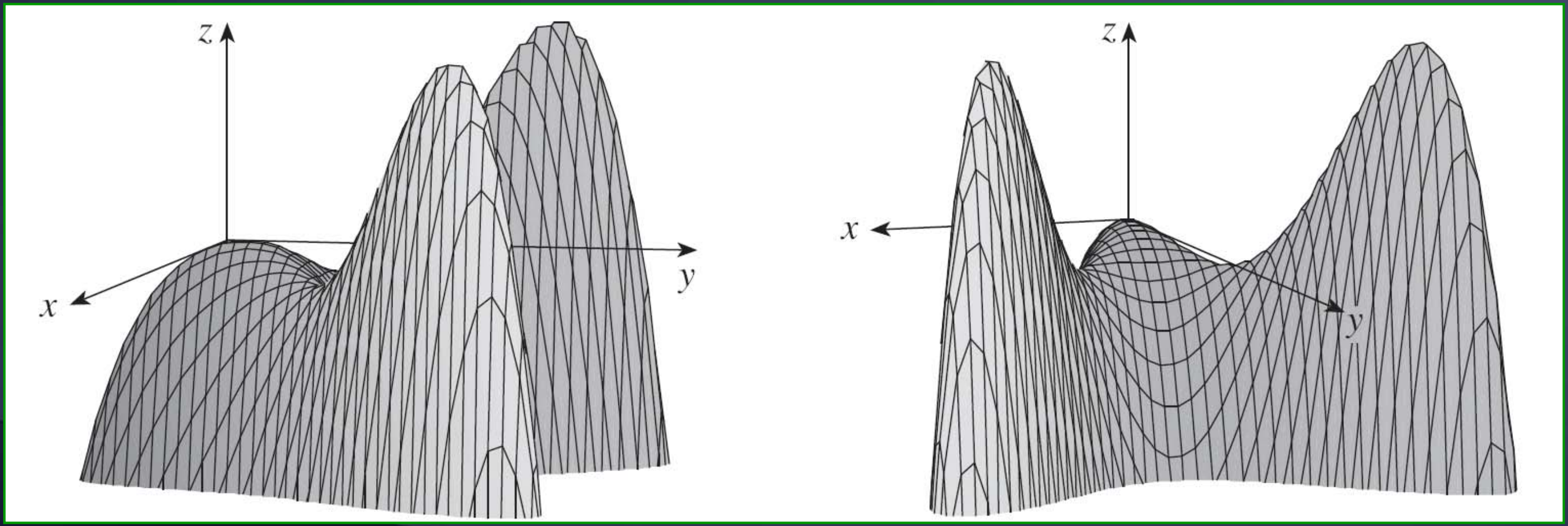
VALOR MÁXIMO E MÍNIMO — EXEMPLO 4

As duas figuras mostram o gráfico de *f* sob dois pontos de vista diferentes, e vemos que a superfície se abre para baixo.



Isso pode ser visto da expressão de $f(x, y)$:

- os termos dominantes são $-x^4 - 2y^4$ quando $|x|$ e $|y|$ são grandes.



VALOR MÁXIMO E MÍNIMO EXEMPLO 4

Comparando os valores de *f* nos máximos locais, vemos que o máximo absoluto de *f* é

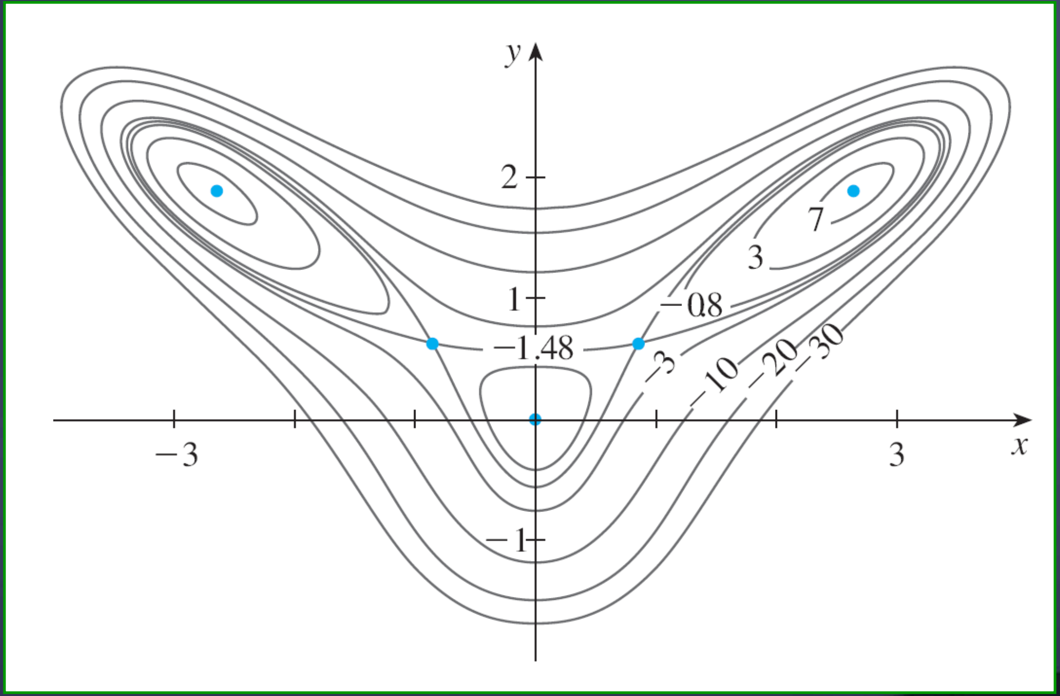
$$f(\pm\ 2{,}64,\ 1{,}90) \approx 8{,}50$$

- Em outras palavras, os pontos mais altos do gráfico de *f* são

$$(\pm\ 2{,}64,\ 1{,}90,\ 8{,}50)$$

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO EXEMPLO 4

Os cinco pontos críticos da função *f* do Exemplo 4 estão destacados em azul no mapa de contorno de *f*.



Determine a menor distância entre o ponto (1, 0, –2) e o plano $x + 2y + z = 4$.

- A distância entre um ponto qualquer (x, y, z) e o ponto (1, 0, –2) é:

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO EXEMPLO 5

Mas, se (x, y, z) pertence ao plano

$x + 2y + z = 4$, então $z = 4 – x – 2y$.

- E assim temos

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$$

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO EXEMPLO 5

Podemos minimizar *d* minimizando a expressão mais simples

$$d^2 = f(x, y)$$
$$= (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

Resolvendo as equações

$$f_x = 2(x-1) - 2(6-x-2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6-x-2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

achamos que o único ponto crítico é $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$.

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO EXEMPLO 5

Como $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 4$, e $f_{yy} = 10$, temos:

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx} > 0$$

- Portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, f tem um mínimo local em $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$.

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO EXEMPLO 5

Intuitivamente podemos ver que esse mínimo local é, na verdade, um mínimo absoluto, porque precisa haver um ponto no plano dado que esteja mais próximo de (1, 0, –2).

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO

EXEMPLO 5

Se $x = \frac{11}{6}$ e $y = \frac{5}{3}$, então

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^2} = \tfrac{5}{6}\sqrt{6}$$

- A menor distância de (1, 0, –2) ao plano $x + 2y + z = 4$ é $\frac{5}{6}\sqrt{6}$.

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO EXEMPLO 6

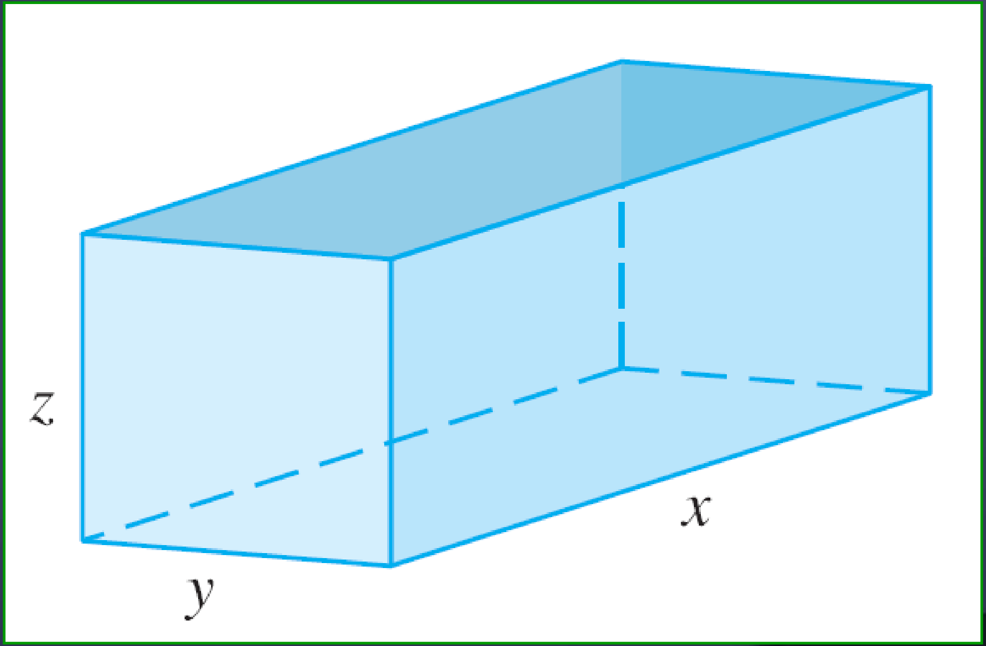
Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m^2 de papelão.

Determine o volume máximo de tal caixa.

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO EXEMPLO 6

Sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura da caixa (em metros).

- O volume dessa caixa é $V = xyz$



VALOR MÁXIMO E MÍNIMO — EXEMPLO 6

Podemos expressar V como função só de x e y usando o fato de que a área dos quatro lados e do fundo da caixa é

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Isolando *z* nessa equação, obtemos:

$$z = (12 - xy)/[2(x + y)]$$

- E *V* fica:

$$V = xy\frac{12 - xy}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$$

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}$$

Se V é um máximo, então

$$\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$$

- Mas, $x = 0$ ou $y = 0$ fornecem $V = 0$, de modo que precisamos resolver as equações.

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \qquad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

- Isso leva a $x^2 = y^2$ e, portanto, $x = y$.
- Observe que x e y precisam ser positivos no problema.

Se substituirmos $x = y$ em uma das equações, obteremos $12 - 3x^2 = 0$

- o que dá:

$$x = 2$$

$$y = 2$$

$$z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$$

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO EXEMPLO 6

Podemos usar o Teste da Segunda Derivada para mostrar que o ponto obtido é um máximo local de *V*.

Ou podemos argumentar que a natureza física do problema exige a existência de um máximo absoluto e que, portanto, esse máximo ocorre quando $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$.

VALOR MÁXIMO E MÍNIMO — EXEMPLO 6

Assim,

$$V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

e o volume máximo da caixa é 4 m^3.

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO ABSOLUTOS

Para uma função *f* de uma variável, o Teorema do Valor Extremo diz que:

- se *f* é contínua em um intervalo fechado [*a*, *b*], então *f* tem um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto.

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO ABSOLUTOS

De acordo com o Método dos Intervalos Fechados da Seção 4.1 do Volume I, achamos esses valores calculando f não somente nos pontos críticos, mas também nas extremidades a e b.

CONJUNTO FECHADO

Para as funções de duas variáveis, a situação é semelhante.

Do mesmo modo que os intervalos fechados contêm suas extremidades, um **conjunto fechado** de R^2 contém todos os seus pontos da fronteira.

PONTO DE FRONTEIRA

Um ponto da fronteira de D é um ponto (a, b) tal que qualquer bola aberta com centro em (a, b) contém pontos de D e pontos não pertencentes a D.

PONTO DE FRONTEIRA

Por exemplo, o disco

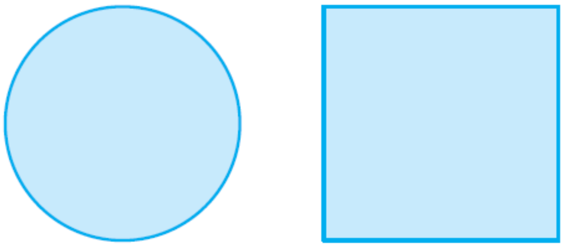
$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

constituído de todos os pontos sobre e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ é um conjunto fechado.

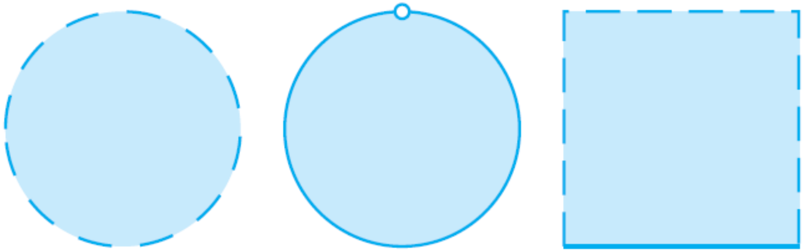
- Isso porque contém todos os seus pontos da fronteira (que são os pontos sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$).

CONJUNTOS QUE NÃO SÃO FECHADOS

Mas se um único ponto da fronteira for omitido, o conjunto deixa de ser fechado



(a) Conjuntos fechados



(b) Conjuntos que não são fechados

CONJUNTO LIMITADO

Um **conjunto limitado** em R^2 é aquele que está contido em algum disco.

Em outras palavras, ele é finito em extensão.

CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS

Então, em termos de conjuntos fechados e limitados, podemos enunciar o correspondente ao Teorema do Valor Extremo para duas dimensões.

TVE (FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVIES) Teorema 8

Se f for contínua em um conjunto fechado e limitado D de R^2, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

TVE (FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVIES)

Para achar os pontos extremos, cuja existência é garantida pelo Teorema 8, observamos que, pelo Teorema 2, se *f* tem um valor extremo em (x_1, y_1), então (x_1, y_1) ou é:

- um ponto crítico de *f*.
- ou um ponto da fronteira de *D*.

TVE (FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVIES)

Portanto, temos a seguinte extensão do Método dos Intervalos Fechados:

MÉTODO DOS INTERVALOS FECHADOS   Método 9

Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua *f* em um conjunto fechado e limitado *D*:

1. Determine os valores de *f* nos pontos críticos de *f* em *D*.
2. Determine os valores extremos de *f* na fronteira de *D*.
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\}$$

CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS EXEMPLO 7

Como f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D.

Portanto, o Teorema 8 nos diz que existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto.

CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS EXEMPLO 7

De acordo com o passo 1 de (9), inicialmente devemos calcular os pontos críticos.

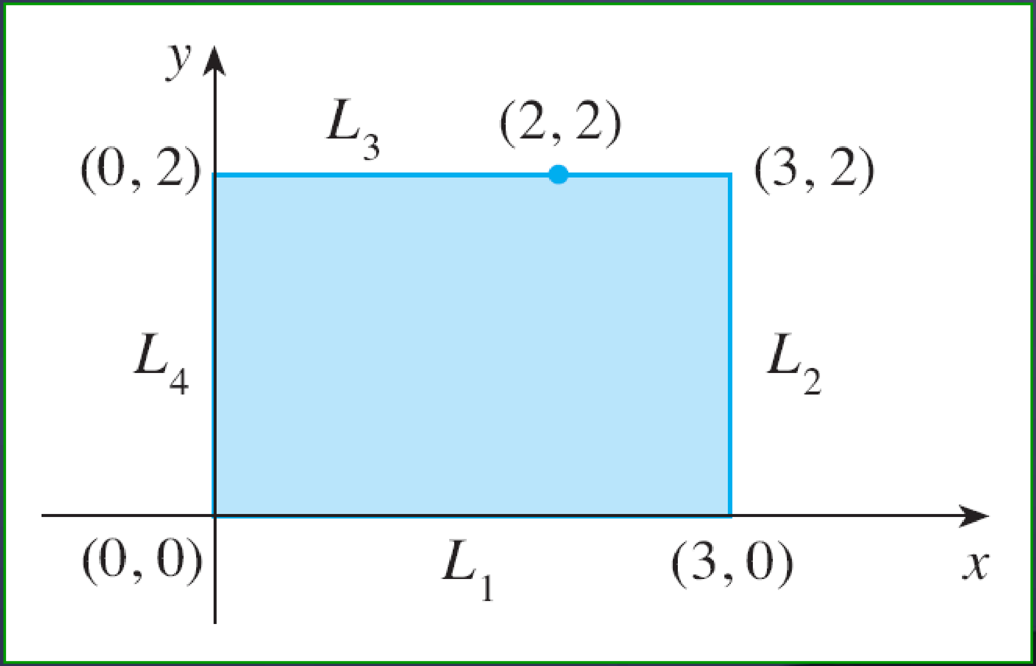
- Eles ocorrem quando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad f_y = -2x + 2 = 0$$

- e, assim, o único ponto crítico existente é (1, 1), no qual temos $f(1, 1) = 1$.

CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS EXEMPLO 7

No passo 2 olhamos para os valores de *f* na fronteira de *D*, que é constituído por quatro segmentos de reta L_1, L_2, L_3, L_4.



CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS EXEMPLO 7

E, L_1, temos $y = 0$ e

$$f(x, 0) = x^2 \qquad 0 \leq x \leq 3$$

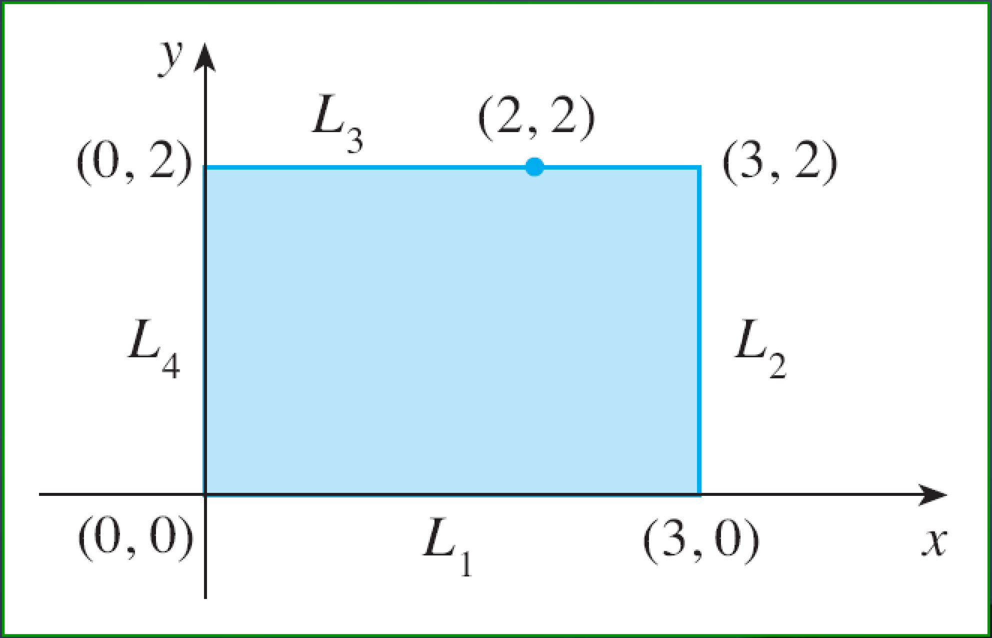
Isso corresponde a uma função crescente de x, que tem:

- valor mínimo

  $f(0, 0) = 0$

- e valor máximo

  $f(3, 0) = 9$



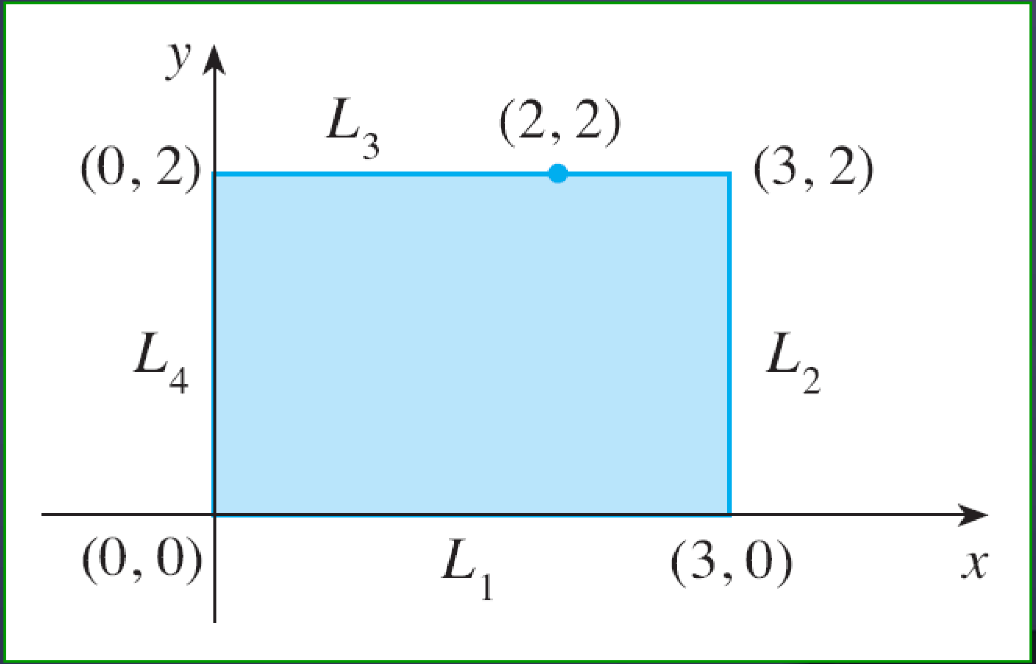
Em L_2, temos x = 3 e

$$f(3, y) = 9 - 4y \qquad 0 \le y \le 2$$

Essa é uma função decrescente de *y*.

Portanto:

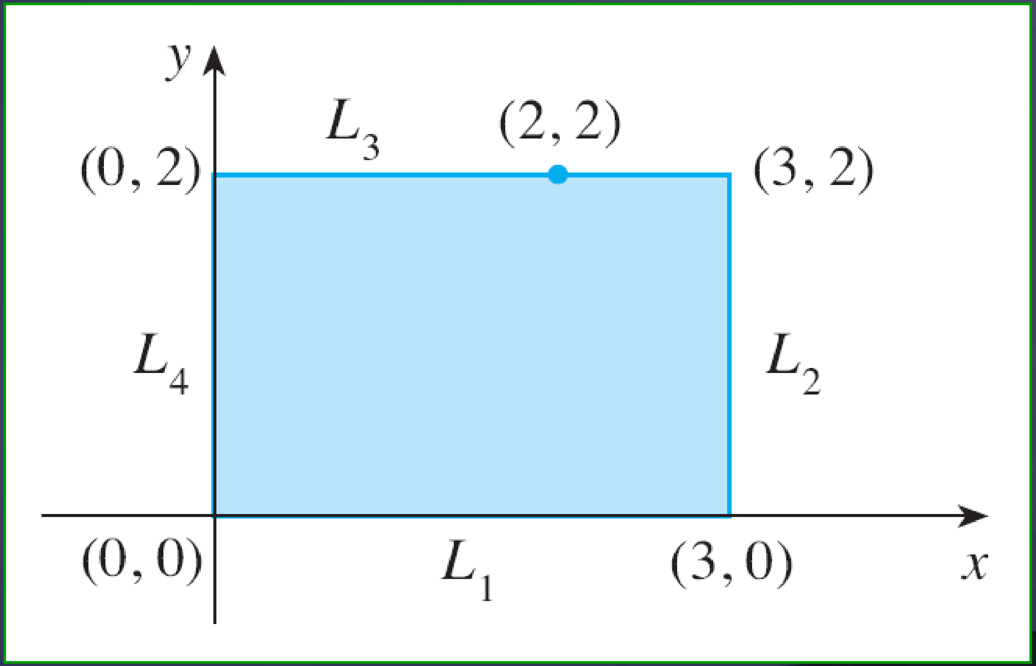
- seu máximo é
  $f(3, 0) = 9$
- e seu mínimo é
  $f(3, 2) = 1$



CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS EXEMPLO 7

Em L_3, temos $y = 2$ e

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \leq x \leq 3$$



CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS EXEMPLO 7

Pelos métodos do Capítulo 4, no Volume I, ou simplesmente observando que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, vemos que:

- o mínimo valor dessa função é $f(2, 2) = 0$.
- o máximo valor dessa função é $f(0, 2) = 4$.

CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS EXEMPLO 7

Finalmente, sobre L_4, temos $x = 0$ e

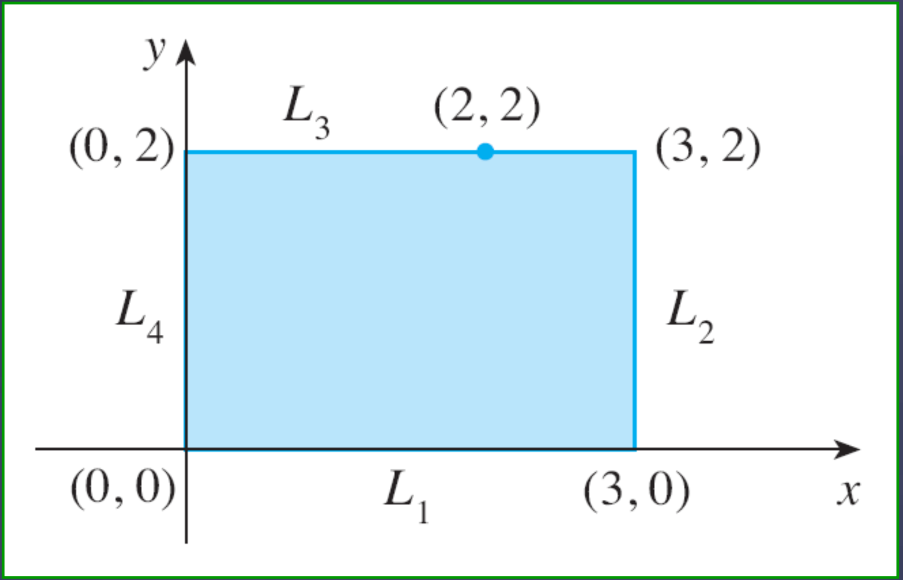
$$f(0, y) = 2y \qquad 0 \leq y \leq 2$$

- Valor máximo

  $f(0, 2) = 4$

- Valor mínimo

  $f(0, 0) = 0$



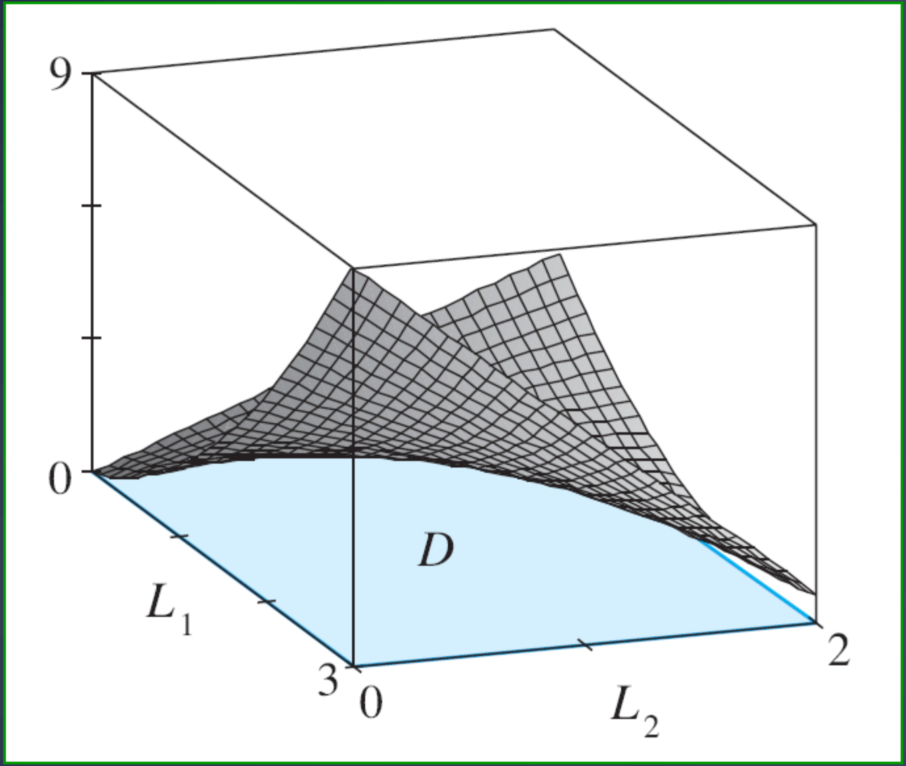
- Portanto, na fronteira, o valor mínimo de f é 0 e o máximo, 9.

No passo 3 comparamos esses valores com o valor $f(1, 1) = 1$ no ponto crítico e concluímos que:

- o valor máximo absoluto de f em D é $f(3, 0) = 9$.
- o valor mínimo absoluto é $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$.

CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS EXEMPLO 7

A figura mostra o gráfico de *f*.



TESTE DA SEGUNDA DERIVADA

Concluímos esta seção com a demonstração da primeira parte do Teste da Segunda Derivada.

As partes (b) e (c) têm demonstrações semelhantes.

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA (PARTE A)

Vamos calcular a derivada direcional de segunda ordem de f na direção de **u** = $\langle h, k \rangle$.

A derivada de primeira ordem é dada pelo Teorema 14.6.3:

$$D_{\mathbf{u}}f = f_x h + f_y k$$

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA (PARTE A)

Aplicando esse teorema uma segunda vez, temos

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}} f)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(D_{\mathbf{u}} f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_{\mathbf{u}} f)k$$

$$= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k$$

$$= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \quad \text{(Teorema de Clairaut)}$$

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA (PARTE A) Eq. 10

Se completarmos os quadrados na expressão, obteremos

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}}\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right)$$

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA (PARTE A)

Temos que $f_{xx}(a, b) > 0$ e $D(a, b) > 0$.

Mas, f_{xx} e $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ são funções contínuas.

- Logo, existe uma bola aberta B com centro (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ e $D(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B.

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA (PARTE A)

Portanto, olhando a Equação 10, vemos que

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$$

sempre que (x, y) pertencer a B.

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA (PARTE A)

Isso implica que:

- se C é uma curva obtida pela intersecção do gráfico de f com o plano vertical que passa por $P(a, b, f(a, b))$ na direção de **u**, então C tem concavidade para cima no intervalo de comprimento 2δ.

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA (PARTE A)

Isso é verdadeiro na direção de todo vetor **u**; portanto, se restringirmos (x, y) a B, o gráfico de f permanecerá acima do plano horizontal tangente a f em P.

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA (PARTE A)

Logo, $f(x, y) \geq f(a, b)$ sempre que (x, y) estiver em B.

Isso mostra que $f(a, b)$ é um mínimo local.