Derivadas Parciais

Capítulo 14

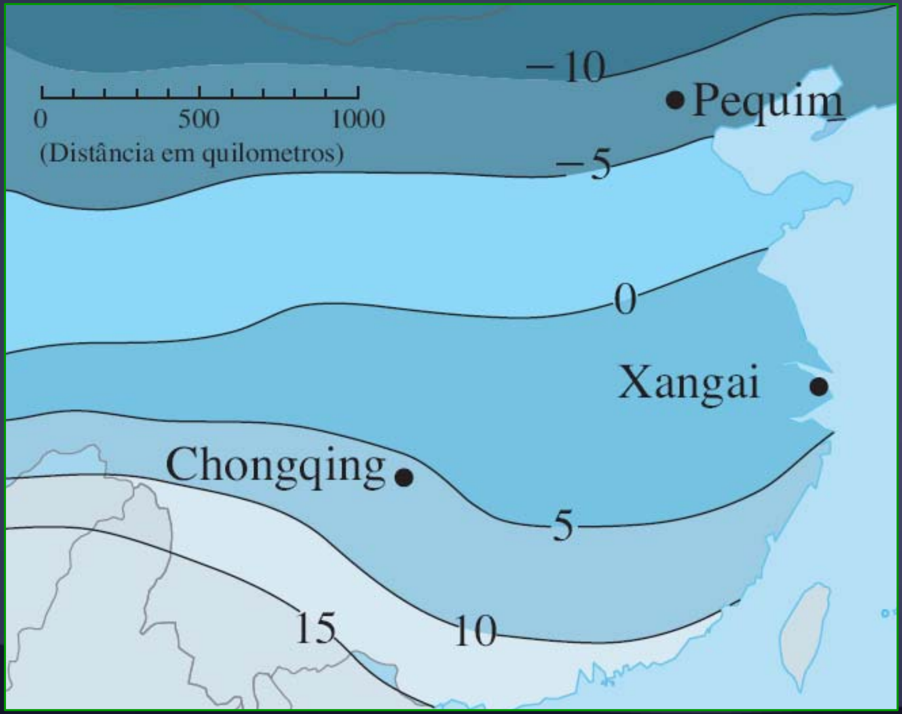
14.6
Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

Nesta seção, vamos aprender como encontrar:

As taxas de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.

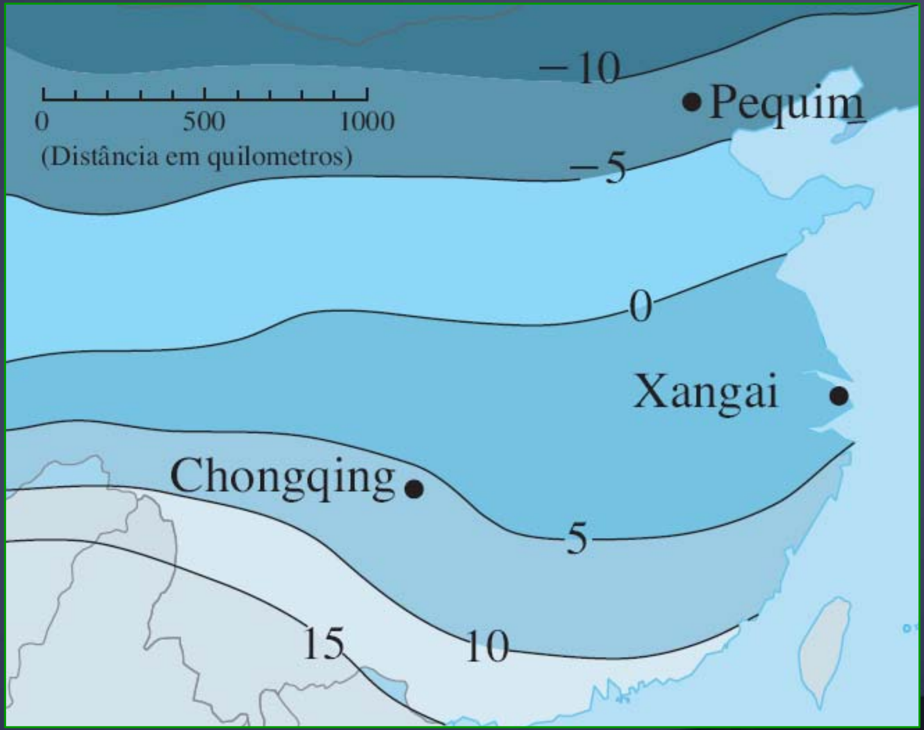
INTRODUÇÃO

A figura mostra um mapa de contorno da função temperatura *T*(*x*, *y*) para a China às 15 horas em 28 de dezembro de 2004.



INTRODUÇÃO

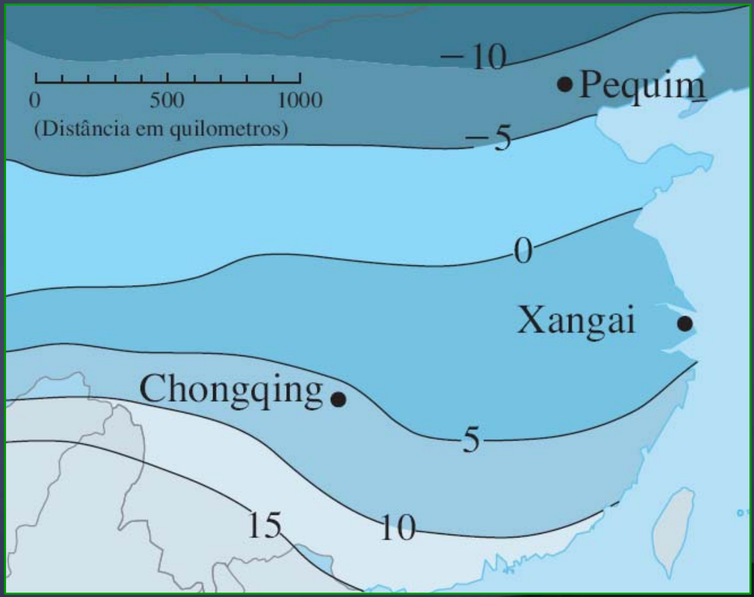
As curvas de nível, ou isotérmicas, ligam localizações com a mesma temperatura.



INTRODUÇÃO

A derivada parcial T_x em um local como Chongqing é a taxa de variação da temperatura com relação à distância se nos movermos para o leste a partir de Chongqing;

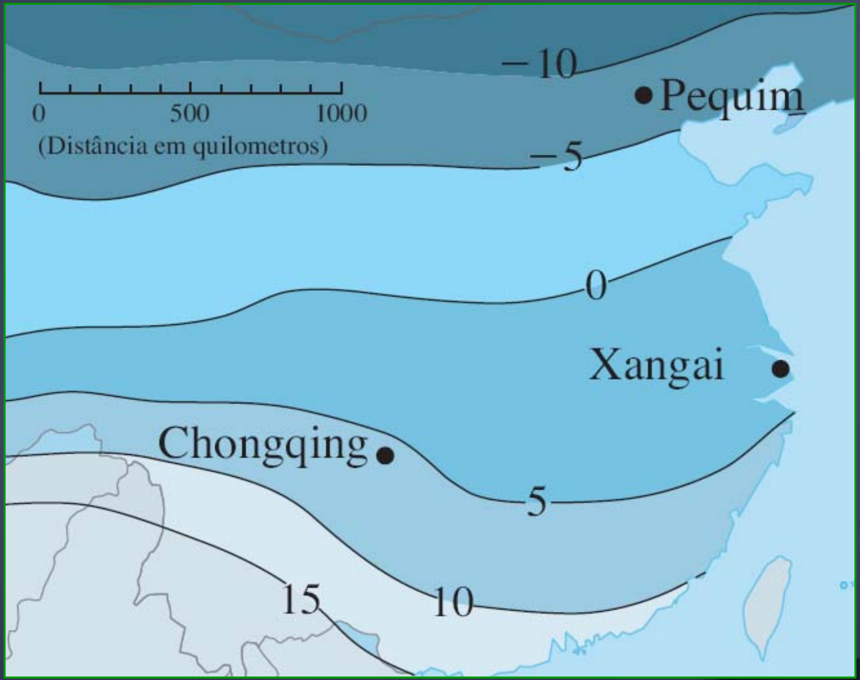
- T_y é a taxa de variação da temperatura se nos movermos para o norte.



CENGAGE Learning

INTRODUÇÃO

Mas, e se quisermos saber a taxa de variação da temperatura quando viajamos para sudoeste ou em alguma outra direção?



DERIVADAS DIRECIONAIS

Nesta seção, introduziremos um tipo de derivada, chamada derivada direcional, que nos permite encontrar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.

Lembremo-nos de que, se $z = f(x, y)$, as derivadas parciais f_x e f_y são definidas como:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

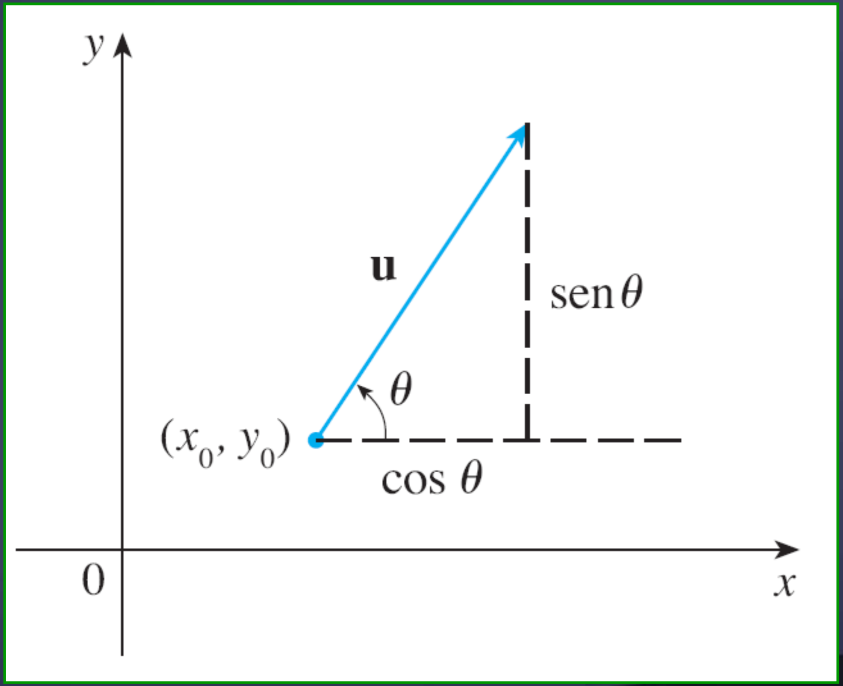
$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

DERIVADAS DIRECIONAIS Equação 1

Eles representam as taxas de variação de z na direção positiva dos eixos x e y, ou seja, nas direções e sentidos dos versores **i** e **j**.

DERIVADAS DIRECIONAIS

Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de *z* no ponto (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário arbitrário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$.



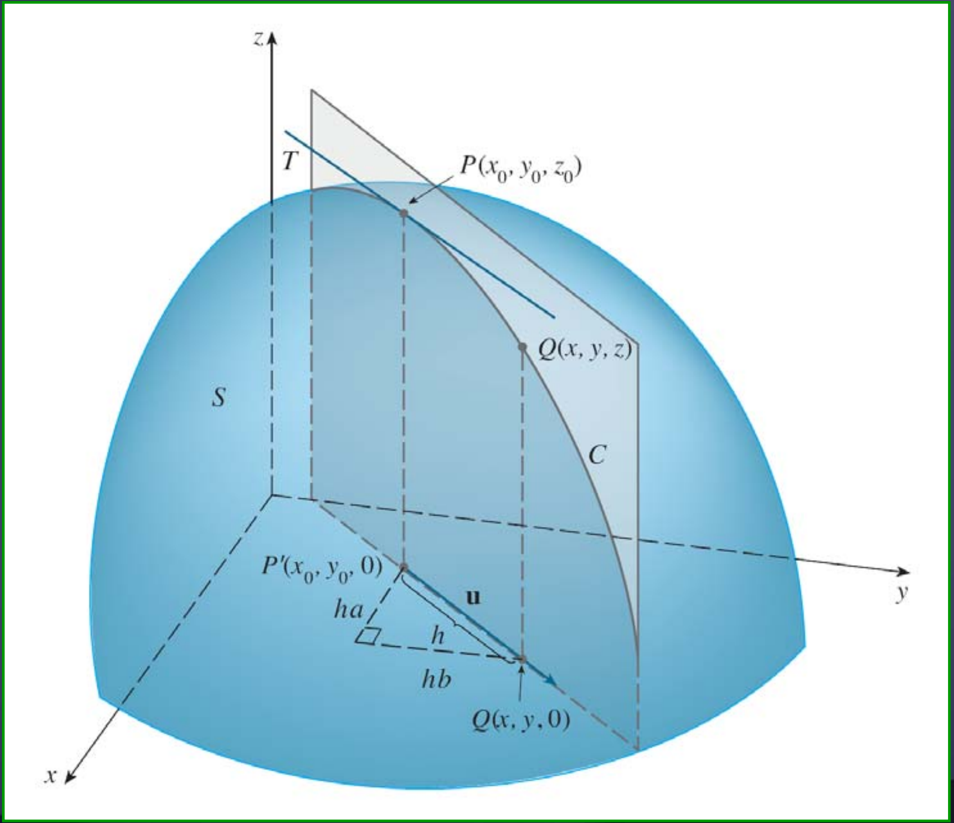
DERIVADAS DIRECIONAIS

Para fazê-lo, devemos considerar a superfície S com equação $z = f(x, y)$ (gráfico de f) e tomar $z_0 = f(x_0, y_0)$.

- O ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ pertence a S.

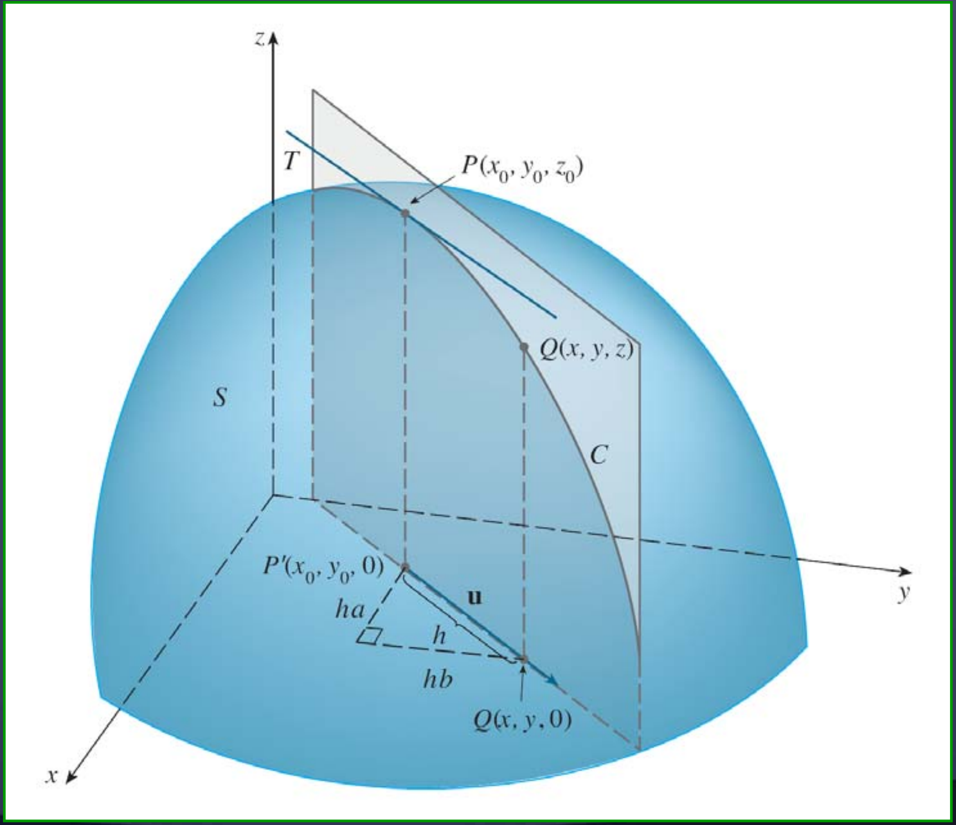
DERIVADAS DIRECIONAIS

O plano vertical que passa por *P* na direção de **u** intercepta *S* em uma curva *C*.



DERIVADAS DIRECIONAIS

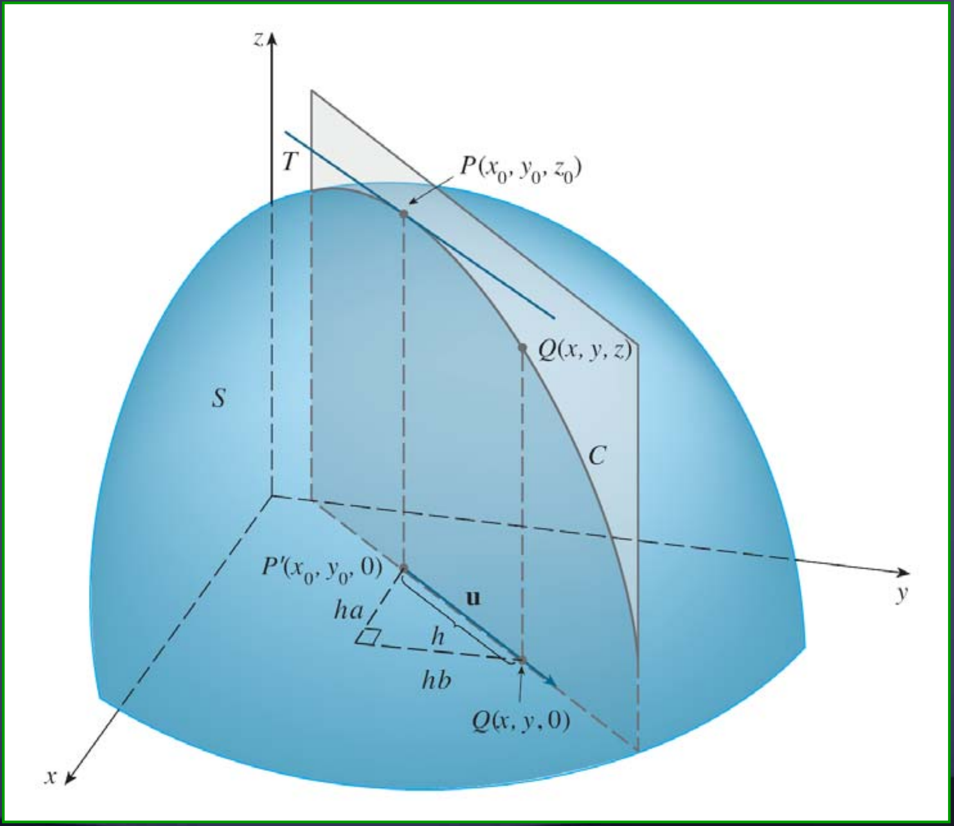
A inclinação da reta tangente *T* a *C* em *P* é a taxa de variação de *z* na direção de **u**.



DERIVADAS DIRECIONAIS

Se:

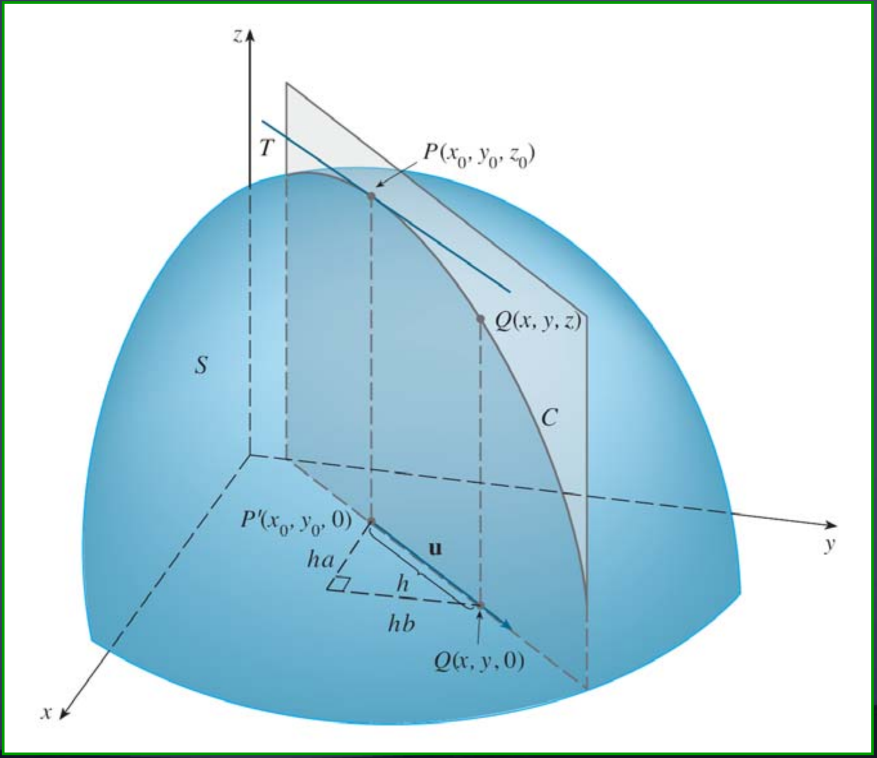
- *Q*(*x*, *y*, *z*) é outro ponto sobre *C.*
- *P'*, *Q'* são as projeções de *P*, *Q* sobre o plano *xy*.



DERIVADAS DIRECIONAIS

Então, o vetor $\overrightarrow{P'Q'}$ é paralelo a **u**.

Portanto, $\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$ para algum escalar h.



DERIVADAS DIRECIONAIS

Dessa forma,

$$x - x_0 = ha$$
$$y - y_0 = hb$$

de modo que

$$x = x_0 + ha$$
$$y = y_0 + hb$$

e

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

DERIVADAS DIRECIONAIS

Se tomarmos o limite quando $h \to 0$, obteremos a taxa de variação de z na direção de **u**, que é chamada derivada direcional de f na direção e sentido de **u**.

A **derivada direcional** de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é:

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

DERIVADAS DIRECIONAIS

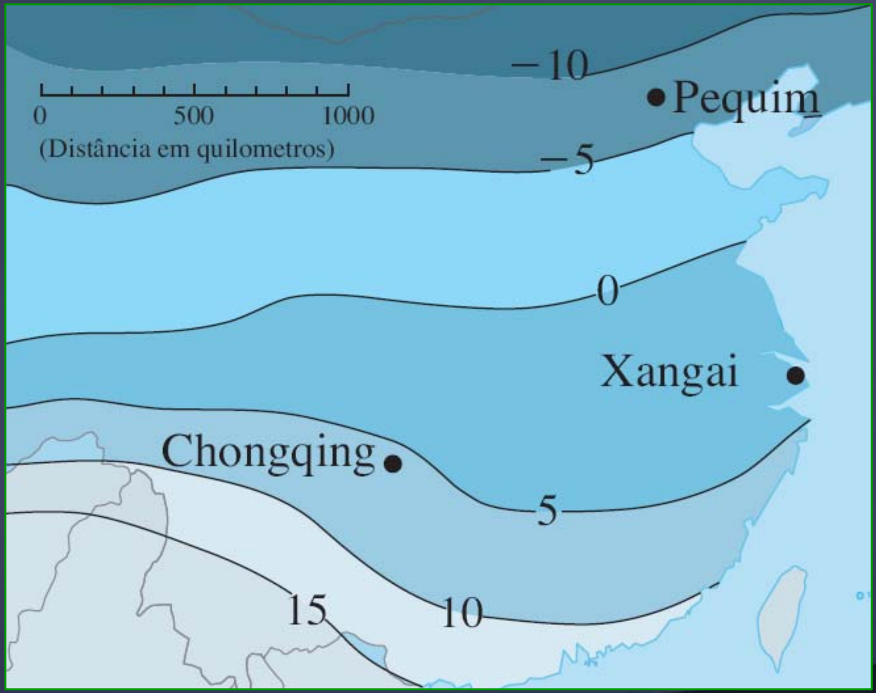
Comparando a Definição 2 com (1), vemos que,

- se $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, então $D_i f = f_x$.
- se $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, então $D_j f = f_y$.

DERIVADAS DIRECIONAIS

Em outras palavras, as derivadas parciais de *f* com relação a *x* e *y* são casos particulares da derivada direcional.

Utilize o mapa meteorológico da figura para estimar o valor da derivada direcional da função temperatura em Chongqing na direção sudeste.

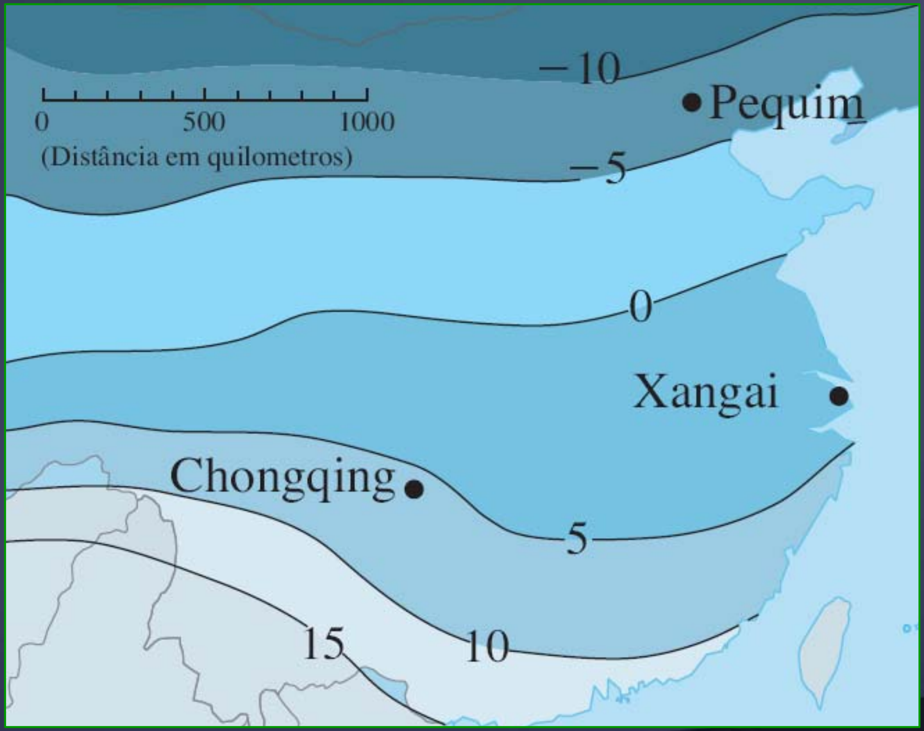


O vetor unitário na direção sudeste é dado por:

$$\mathbf{u} = -(\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$$

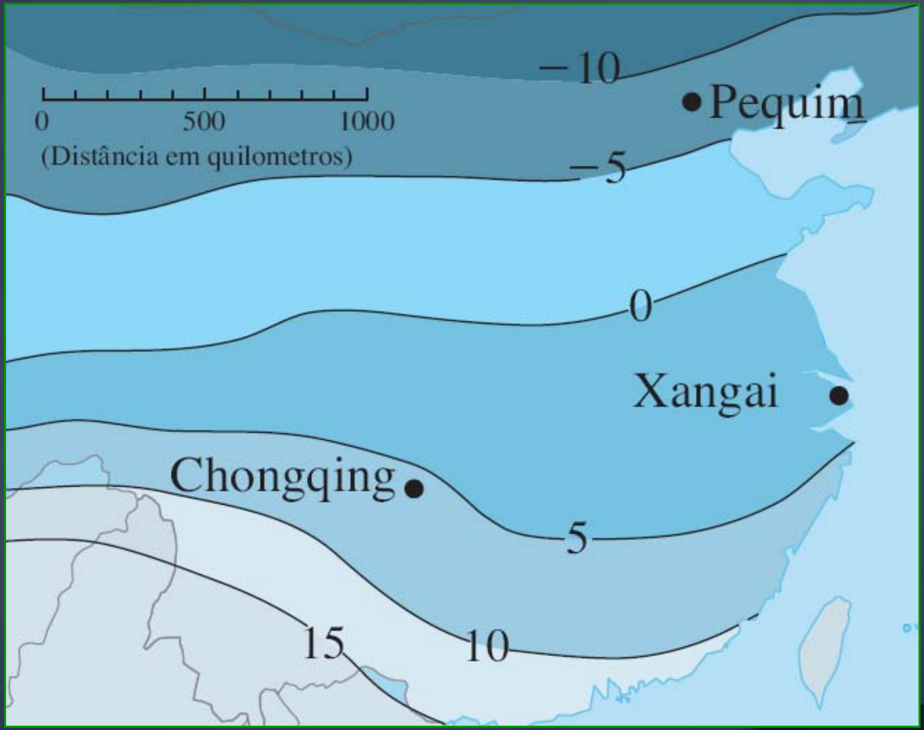
- Mas não necessitaremos dessa expressão.

Em vez disso, inicialmente traçamos uma reta que passa por Chongqing na direção sudeste.



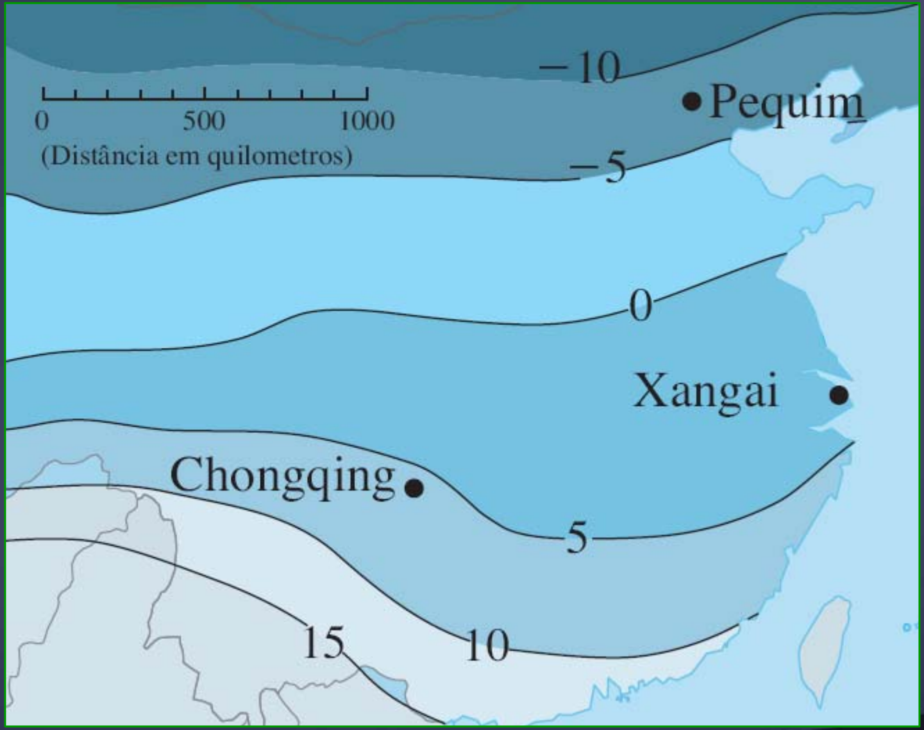
Aproximamos a derivada direcional $D_u T$ por:

- ela taxa média de variação de temperatura entre os pontos onde a reta traçada intercepta as isotérmicas $T = 5$ e $T = 10$.



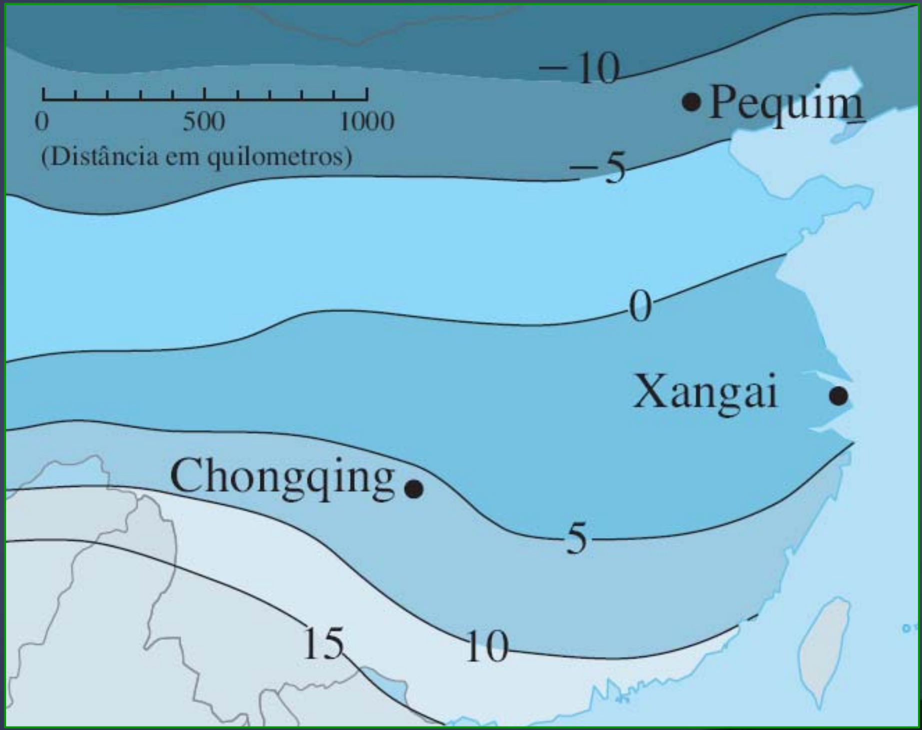
A temperatura no ponto a sudeste de Chongqing é $T = 10°C$.

A temperatura no ponto a noroeste de Chongqing é $T = 5°C$.



DERIVADAS DIRECIONAIS EXEMPLO 1

A distância aproximada desses pontos é de 380 km.



DERIVADAS DIRECIONAIS EXEMPLO 1

Logo, a taxa de variação da temperatura na direção sudeste é

$$D_{\mathbf{u}}T \approx \frac{10-5}{380} = \frac{5}{380} \approx 0{,}013\ ^{\circ}\mathrm{C/km}$$

DERIVADAS DIRECIONAIS

Quando calculamos a derivada direcional de uma função definida por uma fórmula, geralmente usamos o seguinte teorema:

Se é uma função diferenciável de *x* e *y*, então *f* tem derivada direcional na direção de qualquer vetor **u** = ⟨*a*, *b*⟩ e

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b}$$

Se definirmos uma função *g* de uma única variável *h* por

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

então, pela definição de derivada direcional, temos

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$= D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Por outro lado, podemos escrever

$$g(h) = f(x, y)$$

onde:

- $x = x_0 + ha$
- $y = y_0 + hb$

Então, pela Regra da Cadeia (Teorema 14.5.2), vem:

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh}$$

$$= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Se tomarmos $h = 0$,

então $x = x_0$

$y = y_0$

e

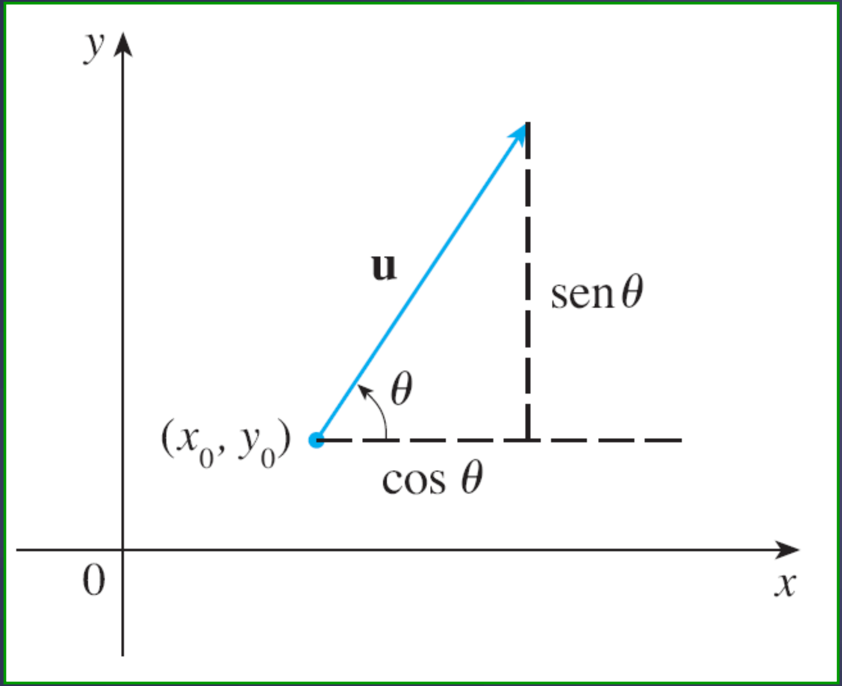
$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

Comparando as Equações 4 e 5, vemos que

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$
$$= f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$

DERIVADAS DIRECIONAIS

Se o vetor unitário **u** faz um ângulo θ com o eixo *x* positivo.



CENGAGE Learning™

DERIVADAS DIRECIONAIS   Equação 6

Então, podemos escrever **u** = ⟨cos *θ*, sen *θ*⟩ e a fórmula do Teorema 3 fica

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \operatorname{sen} \theta$$

DERIVADAS DIRECIONAIS — EXEMPLO 2

Determine a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ se:

- $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$
- **u** é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi / 6$

Qual será $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$?

A Fórmula 6 nos dá

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x, y)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} \\
&= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)y\right]
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$D_{\mathbf{u}} f(1,2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)(2)\right]$$

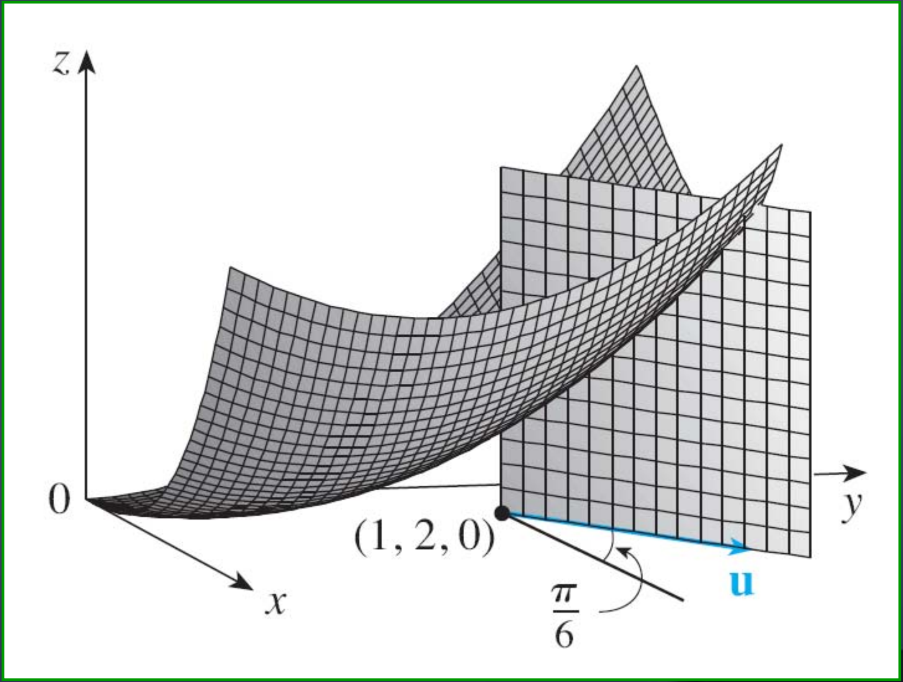
$$= \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

DERIVADAS DIRECIONAIS

A derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$ no Exemplo 2 representa a taxa de variação de z na direção de $\mathbf{u}$.

DERIVADAS DIRECIONAIS

Isto é a inclinação da reta tangente à curva obtida pela intersecção da superfície $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ com o plano vertical que passa por (1, 2, 0) na direção de **u** mostrado na figura.



Observe no Teorema 3 que a derivada direcional pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}} f(x,y) &= f_x(x,y)\,a + f_y(x,y)\,b \\
&= \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot \langle a,b\rangle \\
&= \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot \mathbf{u}
\end{aligned}
$$

O VETOR GRADIENTE

O primeiro vetor no produto escalar ocorre não somente no cômputo da derivada direcional, mas também em muitas outras situações.

O VETOR GRADIENTE

Assim, daremos a ele um nome especial (o *gradiente* de *f*) e uma notação especial (**grad** *f* ou ∇f, que lemos "del *f* ").

O VETOR GRADIENTE

Definição 8

Se *f* é uma função de duas variáveis *x* e *y*, o **gradiente** de *f* é a função vetorial ∇f definida por:

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{j}$$

Se $f(x, y) = \text{sen } x + e^{xy}$, então

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle$$
$$= \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

$$\nabla f(0,1) = \langle 2, 0 \rangle$$

O VETOR GRADIENTE

Equação 9

Com a notação de vetor gradiente, podemos reescrever a expressão (7) para a derivada direcional como

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

que expressa a derivada direcional na direção de **u** como a projeção escalar do vetor gradiente sobre **u**.

Determine a derivada direcional da função

$$f(x, y) = x^2y^3 - 4y$$

no ponto (2, –1) na direção do vetor

$$\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}.$$

Primeiramente, vamos calcular o gradiente de *f* no ponto (2, –1):

$$\nabla f(x,y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\,\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2,-1) = -4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}$$

Observe que **v** não é um vetor unitário, mas, como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, o vetor unitário na direção de **v** é

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}$$

Portanto, pela Equação 9, temos

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}} f(2,-1) &= \nabla f(2,-1) \cdot \mathbf{u} \\
&= (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j} \right) \\
&= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}
\end{aligned}
$$

FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS

Para as funções de três variáveis podemos definir derivadas direcionais de modo semelhante.

- Novamente, $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ pode ser interpretado como a taxa de variação da função na direção de um vetor unitário **u**.

A **derivada direcional** de uma função *f* em (x_0, y_0, z_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

se o limite existir.

FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS Equação 11

Se usarmos a notação vetorial, poderemos escrever tanto a definição (2) quanto a (10) da derivada direcional na forma compacta

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

onde:

- $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ se $n = 2$
- $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ se $n = 3$

Isso era esperado.

- Porque a equação vetorial da reta que passa por $\mathbf{x}_0$ na direção do vetor **u** é dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{u}$ (Equação 12.5.1).
- Portanto, $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$ representa o valor de f em um ponto dessa reta.

FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS — Fórmula 12

Se $f(x, y, z)$ for diferenciável e $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, então o mesmo método usado na demonstração do Teorema 3 pode ser usado para mostrar que

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$$

CENGAGE Learning™

FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS

Para uma função *f* de três variáveis, o **vetor gradiente**, denotado por ∇f ou **grad** *f*, é

$$\nabla f(x, y, z)$$
$$= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z,), f_z(x, y, z)\rangle$$

De modo mais abreviado,

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS — Equação 14

Então, como para as funções de duas variáveis, a Fórmula 12 para a derivada direcional pode ser reescrita como

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

Se $f(x, y, z) = x$ sen yz, determine:

a. o gradiente de f

b. a derivada direcional de f no ponto $(1, 3, 0)$ na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

O gradiente de *f* é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z)\, f_z(x, y, z)\rangle$$

$$= \langle \text{sen } yz,\, xz \cos yz,\, xy \cos yz \rangle$$

No ponto (1, 3, 0) temos $\nabla f\,(1,3,0) = \langle 0,0,3 \rangle$.

O vetor unitário na direção de **v** = **i** + 2 **j** – **k** é:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

Portanto, da Equação 14, vem

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1,3,0) &= \nabla f(1,3,0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k} \right) \\ &= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL

Suponha que tenhamos uma função *f* de duas ou três variáveis e considere todas as possíveis derivadas direcionais de *f* em um ponto dado.

- Isso nos dará a taxa de variação da função em todas as direções possíveis.

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL

Podemos então perguntar:

- Em qual dessas direções *f* varia mais rapidamente?
- Qual a taxa máxima de variação?
- A resposta a essas perguntas é dada pelo seguinte teorema.

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL T.15

Suponha que *f* seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis.

O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ é $|\nabla f(\mathbf{x})|$

- Ele ocorre quando **u** tem a mesma direção que o vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL Demo

Da Equação 9 ou 14, temos

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f|\,|\mathbf{u}| \cos\theta$$

$$= |\nabla f| \cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre ∇f e $\mathbf{u}$.

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL Demo

O valor máximo de cos θ é 1, e isso ocorre quando $\theta = 0$.

- Portanto, o valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f$ é:

$$|\nabla f|$$

- Ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando **u** tem a mesma direção e sentido que ∇f.

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL EX. 6

a. Se $f(x, y) = xe^y$, determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q(½, 2)$.

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL EX. 6

b. Em que direção *f* tem a máxima taxa de variação?

Qual é a máxima taxa de variação?

Primeiro calcularemos o vetor gradiente:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= \langle f_x, f_y \rangle \\ &= \langle e^y, xe^y \rangle\end{aligned}$$

$$\nabla f(2,0) = \langle 1, 2 \rangle$$

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL EX. 6 a

O vetor unitário na direção $\overrightarrow{PQ} = \langle -1, 5, 2 \rangle$

é $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$.

Logo, a taxa de variação de *f* na direção que vai de *P* a *Q* é:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(2,0) &= \nabla f(2,0) \cdot u \\ &= \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle \\ &= 1(-\tfrac{3}{5}) + 2(\tfrac{4}{5}) = 1 \end{aligned}$$

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL EX. 6 b

De acordo com o Teorema 15, f aumenta mais depressa na direção do gradiente

$$\nabla f(2,0) = \langle 1, 2 \rangle$$

A máxima taxa de variação é

$$|\nabla f(2,0)| = |\langle 1, 2 \rangle| = \sqrt{5}$$

CENGAGE Learning™

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL EX. 7

Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço seja dada por

$$T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$$

onde T é medida em graus Celsius e x, y e z, em metros.

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL EX. 7

Em que direção no ponto (1, 1, -2) a temperatura aumenta mais rapidamente?

Qual é a taxa máxima de aumento?

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL EX. 7

O gradiente de *T* é

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= -\frac{160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\mathbf{i} - \frac{320y}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\mathbf{j} - \frac{480z}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{160}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}(-x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k})$$

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL EX. 7

No ponto (1, 1, -2), o vetor gradiente é

$$\nabla T(1,1,-2) = \frac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

$$= \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL EX. 7

Pelo Teorema 15, a temperatura aumenta mais rapidamente na direção do gradiente

$$\nabla T(1,1,-2) = \tfrac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

ou, de modo equivalente, na direção de $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ou ainda de seu vetor unitário $(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/\sqrt{41}$.

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL EX. 7

A taxa máxima de aumento é o módulo do vetor gradiente

$$\left|\nabla T(1,1,-2)\right| = \tfrac{5}{8}\left|-\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}\right|$$

$$= \tfrac{5}{8}\sqrt{41}$$

- Portanto, a taxa máxima de aumento da temperatura é

$$\tfrac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4^{\circ}\,\mathrm{C/m}$$

PLANO TANGENTE ÀS SUPERFÍCIES DE NÍVEL

Suponha que S seja uma superfície com equação

$$F(x, y, z) = \mathrm{k}$$

ou seja, uma superfície de nível de uma função F de três variáveis, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto sobre S.

PLANO TANGENTE ÀS SUPERFÍCIES DE NÍVEL

Seja C uma curva qualquer contida na superfície S que passe pelo ponto P.

- Lembre-se de que, da Seção 13.1, a curva C é descrita por uma função vetorial contínua

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

PLANO TANGENTE ÀS SUPERFÍCIES DE NÍVEL Eq.16

Seja t_0 o valor do parâmetro correspondente ao ponto P, ou seja, $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$.

Como C pertence a S, qualquer ponto $(x(t), y(t), z(t))$ precisa satisfazer a equação de S, ou seja,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Se *x*, *y* e *z* são funções diferenciáveis de *t* e *F* também é diferenciável, podemos usar a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados da Equação 16, como a seguir:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dz}{dt}=0$$

PLANOS TANGENTES

Mas, como $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z \rangle$

e $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$

a Equação 17 pode ser escrita em termos do produto escalar como

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Em particular, quando $t = t_0$, temos

$$\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$$

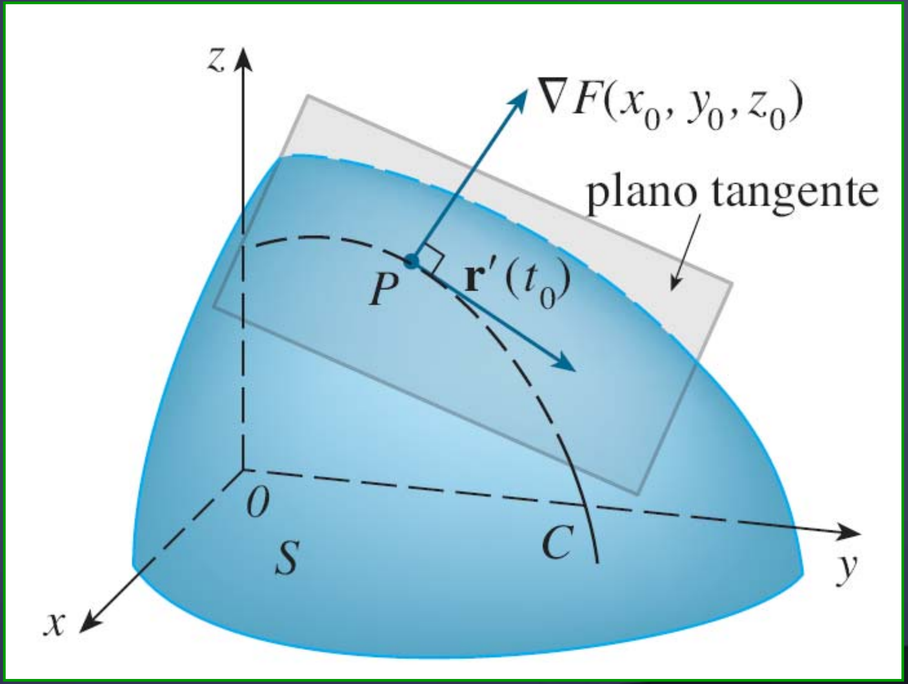
E assim,

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

PLANOS TANGENTES

A Equação 18 nos diz que

- *o vetor gradiente em P*, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, *é perpendicular ao vetor tangente* $\mathbf{r}'(t_0)$ *a qualquer curva C em S que passe por P.*



PLANOS TANGENTES

Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, é natural definir o **plano tangente à superfície de nível** $F(x, y, z) = k$ em $P(x_0, y_0, z_0)$ como:

- o plano que passa por P e tem vetor normal

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0)$$

PLANOS TANGENTES Equação 19

Utilizando a equação geral do plano (Equação 12.5.7) podemos escrever a equação do plano tangente como

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

PLANOS TANGENTES

A **reta normal** a *S* em *P* é a reta que passa por *P* e é perpendicular ao plano tangente.

A direção da reta normal é, portanto, dada pelo vetor gradiente

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0)$$

Assim, pela Equação 12.5.3, suas equações simétricas são

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

PLANOS TANGENTES

No caso especial em que a equação de uma superfície S é da forma $z = f(x, y)$, (ou seja, S é o gráfico da função f de duas variáveis), podemos reescrever a equação como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

e considerar S como uma superfície de nível (com $k = 0$) de F.

PLANOS TANGENTES

Então,

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$

$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

PLANOS TANGENTES

De modo que a Equação 19 se torna

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

que é equivalente à Equação 14.4.2.

PLANOS TANGENTES

Então, nossa nova, mais geral, definição de plano tangente é consistente com a definição que foi dada no caso especial da Seção 14.4.

PLANOS TANGENTES EXEMPLO 8

Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto (–2, 1, –3) ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

O elipsoide é a superfície de nível (com *k* = 3) da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

PLANOS TANGENTES

EXEMPLO 8

Portanto temos:

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2}$$

$$F_y(x, y, z) = 2y$$

$$F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1$$

$$F_y(-2, 1, -3) = 2$$

$$F_z(-2, 1, -3) = -\tfrac{2}{3}$$

Então, da Equação 19, temos que a equação do plano tangente no ponto (–2, 1, –3) é:

$$-1(x+2)+2(y-1)-\tfrac{2}{3}(z+3)=0$$

que pode ser simplificada para

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0$$

PLANOS TANGENTES — EXEMPLO 8

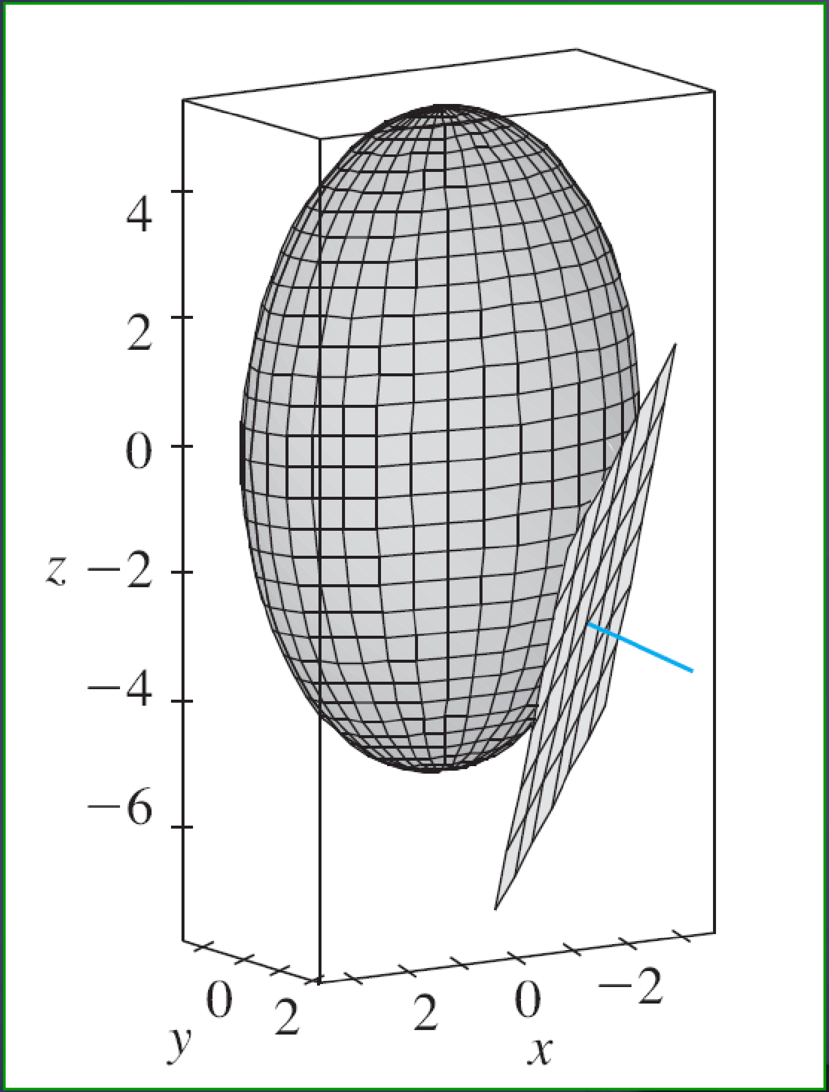
Pela Equação 20, as equações simétricas da reta normal são

$$\boxed{\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-\frac{2}{3}}}$$

PLANOS TANGENTES

EXEMPLO 8

A figura mostra o elipsoide, o plano tangente e a reta normal do Exemplo 8.



IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

Vamos resumir agora as maneiras pelas quais o vetor gradiente é importante.

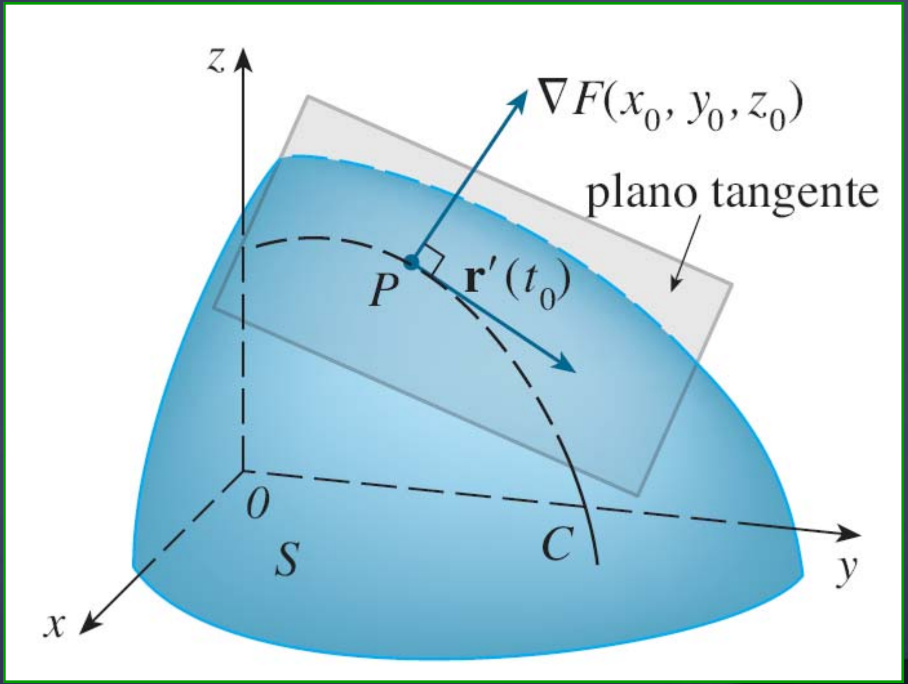
Inicialmente consideraremos uma função *f* de três variáveis e um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ em seu domínio.

IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

Por um lado, sabemos do Teorema 15 que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ indica a direção de maior crescimento da função *f*.

IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

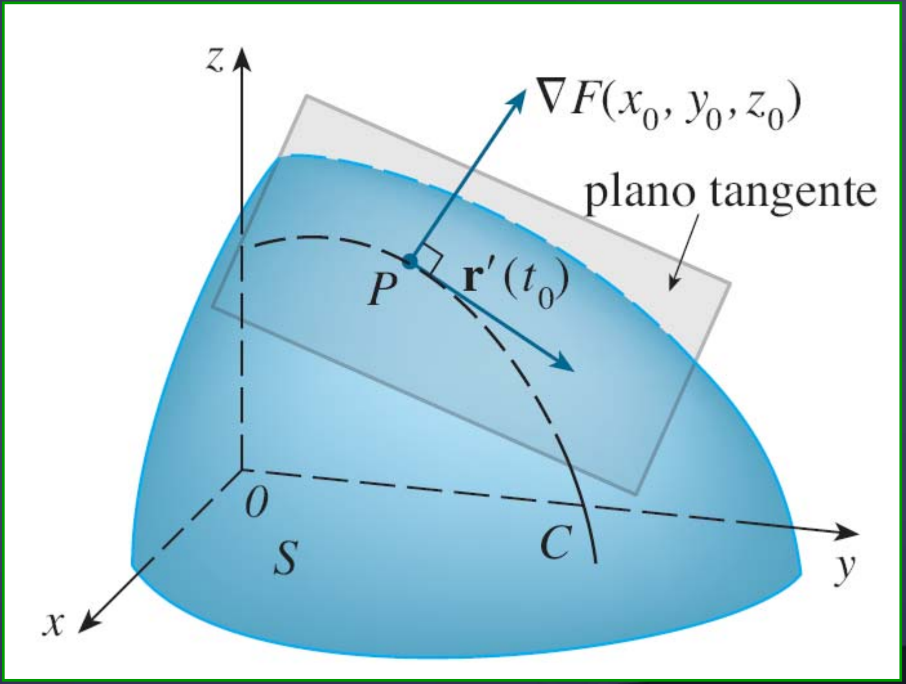
Por outro, sabemos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal às superfícies de nível *S* de *f* em *P*.



CENGAGE Learning

IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

Essas duas propriedades são compatíveis intuitivamente porque, quando nos afastamos de *P* em uma superfície de nível *S*, o valor da função *f* não se altera.



IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

Parece razoável que, se nos movermos em uma direção perpendicular, obteremos o maior aumento.

Da mesma maneira, podemos considerar uma função de duas variáveis *f* e um ponto $P(x_0, y_0)$ em seu domínio.

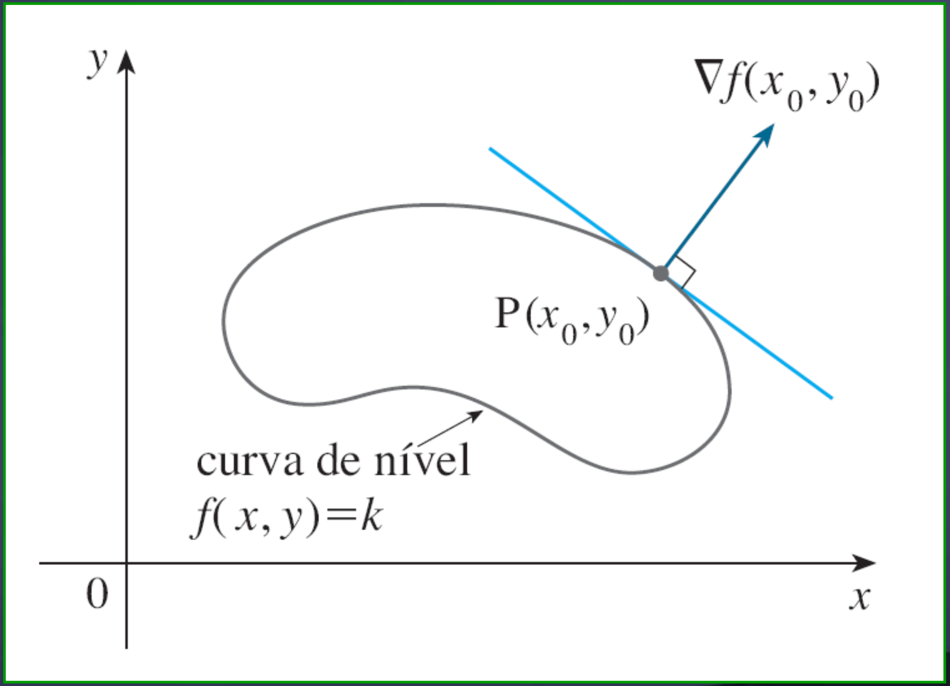
IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

Novamente o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ dá a direção de maior crescimento de *f*.

Além disso, por considerações semelhantes à nossa discussão sobre o plano tangente, podemos mostrar que $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à curva de nível $f(x, y) = k$ que passa por *P*.

IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

Mais uma vez, isso é plausível intuitivamente, visto que os valores de *f* se mantêm constantes quando nos movemos ao longo da curva de nível.



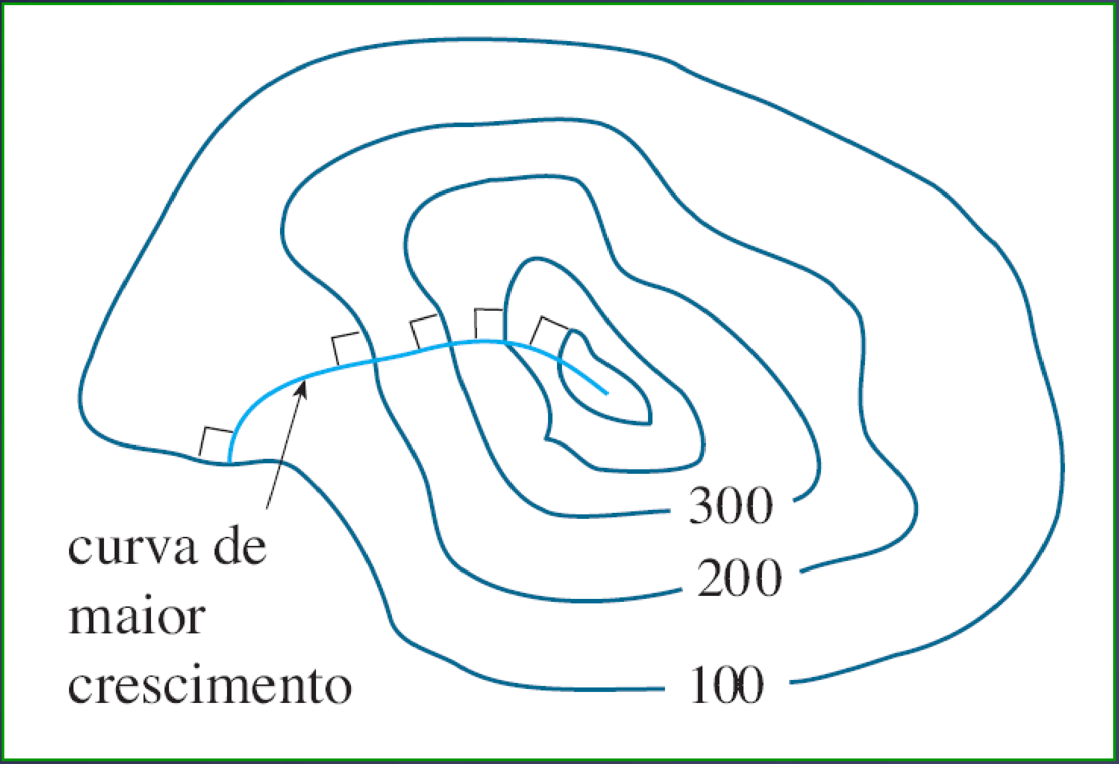
CENGAGE Learning™

IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

Se considerarmos um mapa topográfico de um morro e se $f(x, y)$ representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas (x, y), então a curva de aclive máximo pode ser desenhada, fazendo-a perpendicular a todas as curvas de contorno.

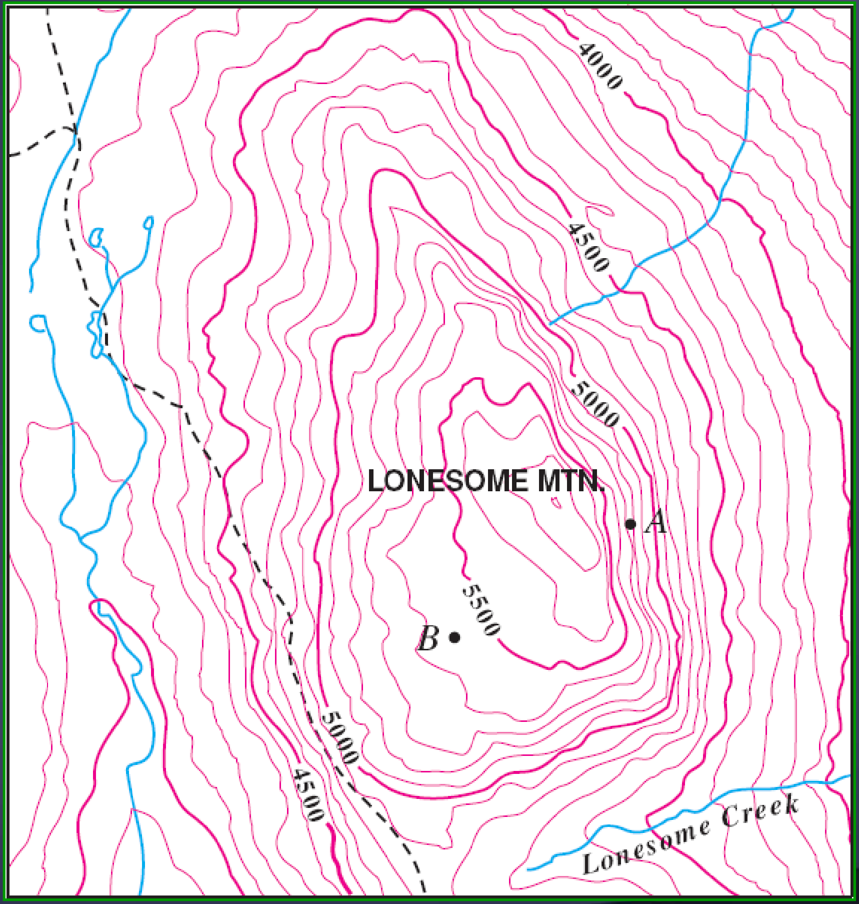
IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

Veja o desenho da curva.



IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

Esse fenômeno pode ser observado numa das figuras da Seção 14.1, onde o Riacho Lonesome segue a curva de declive máximo.



IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

Os sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam alguns vetores gradientes.

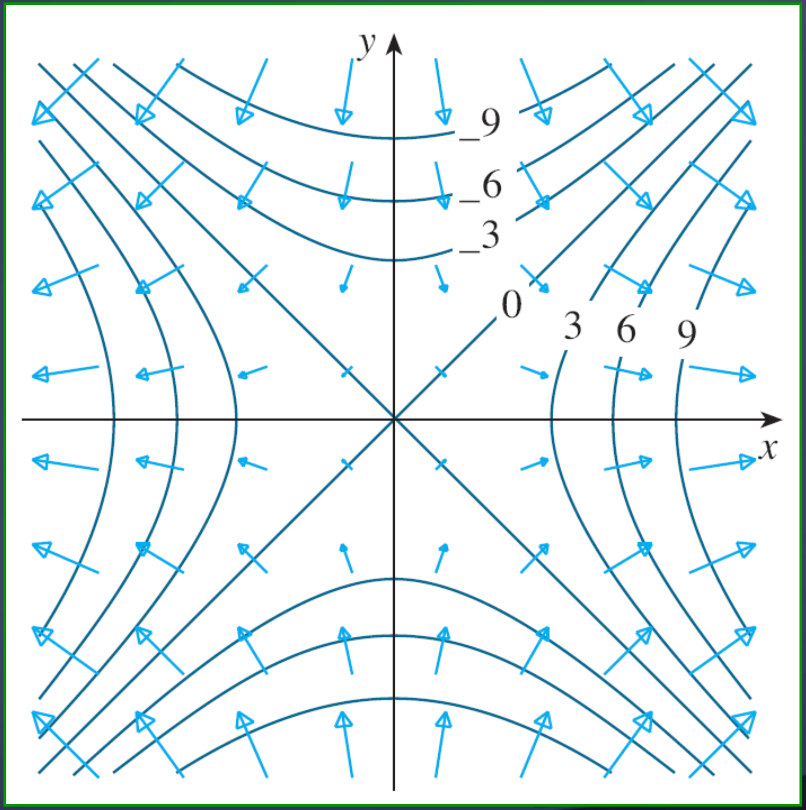
Cada vetor gradiente $\nabla f(a, b)$ é traçado partindo-se do ponto (a, b).

CAMPO DE VETOR GRADIENTE

A figura mostra como fica um desses desenhos (chamados *campos de vetores gradientes*) para a função

$f(x, y) = x^2 - y^2$

sobreposto a um mapa de contornos de f.



IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

Como esperado, os vetores gradientes

- apontam na direção de “subida de morro”;
- são perpendiculares às curvas de nível.