Derivadas Parciais

Capítulo 14

14.5
Regra da Cadeia

Nesta seção, aprenderemos sobre:

A Regra da Cadeia e sua aplicação em diferenciação.

A REGRA DA CADEIA

Lembremo-nos de que a Regra da Cadeia para uma função de uma única variável nos dava uma regra para derivar uma função composta.

A REGRA DA CADEIA — Equação 1

Se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, onde f e t são funções diferenciáveis, então y é indiretamente uma função diferenciável de t e

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

A REGRA DA CADEIA

Para as funções de mais de uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de derivação de uma função composta.

A REGRA DA CADEIA

A primeira versão (Teorema 2) diz respeito ao caso onde $z = f(x, y)$ e cada uma das variáveis x e y é, por sua vez, função de uma variável t.

- Isso significa que z é indiretamente uma função de t, $z = f(g(t), h(t))$, e a Regra da Cadeia dá uma fórmula para derivar z como uma função de t.

A REGRA DA CADEIA

Estamos admitindo que *f* seja diferenciável (Definição 14.4.7).

Lembremo-nos de que este é o caso quando f_x e f_y são contínuas (Teorema 14.4.8).

A REGRA DA CADEIA (CASO 1) — Teorema 2

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t.

Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Uma variação de Δt em t produz uma variação de Δx em x e Δy em y. Isso produz uma variação de Δz em z, e da Definição 14.4.7 temos

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial y}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

- Se as funções ε_1 e ε_2 não estiverem definidas em (0, 0), poderemos defini-las como 0 lá.

A REGRA DA CADEIA (CASO 1) Demonstração

Dividindo ambos os lados da equação por Δ*t*, temos

$$\frac{z}{t} \qquad \frac{f}{x}\,\frac{x}{t} \qquad \frac{f}{y}\,\frac{y}{t} \qquad {}_{1}\,\frac{x}{t} \qquad {}_{2}\,\frac{y}{t}$$

Se fizermos $\Delta t \to 0$, então

$$\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \to 0$$

porque g é diferenciável e, portanto, contínua.

Da mesma forma, $\Delta y \to 0$. Por outro lado, isso implica que $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$.

Então,

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

A REGRA DA CADEIA (CASO 1)

Como frequentemente escrevemos *∂z/∂x* no lugar de *∂f/∂x*, podemos reescrever a Regra da Cadeia na forma

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

A REGRA DA CADEIA (CASO 1) EXEMPLO 1

Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \text{sen}\ 2t$ e $y = \cos t$, determine dz/dt quando $t = 0$.

- A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\text{sen}\ t)$$

A REGRA DA CADEIA (CASO 1) EXEMPLO 1

Não é necessário substituir as expressões de *x* e de *y* em função de *t*.

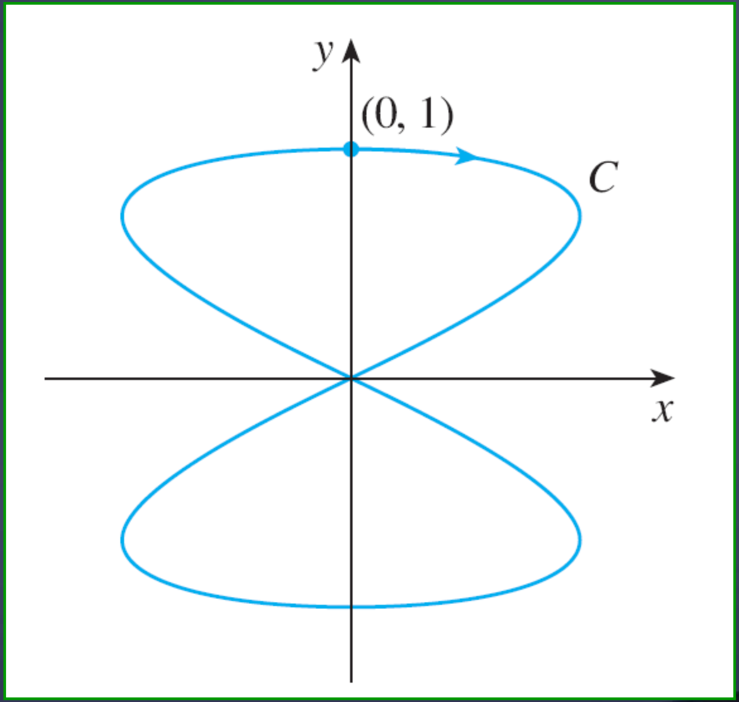
- Simplesmente observe que, quando $t = 0$, temos $x = \text{sen } 0 = 0$ e $y = \cos 0 = 1$.
- Logo,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2 \cos 0) + (0 + 0)(-\text{sen } 0) = 6$$

A REGRA DA CADEIA (CASO 1)

A derivada no Exemplo 1 pode ser interpretada como:

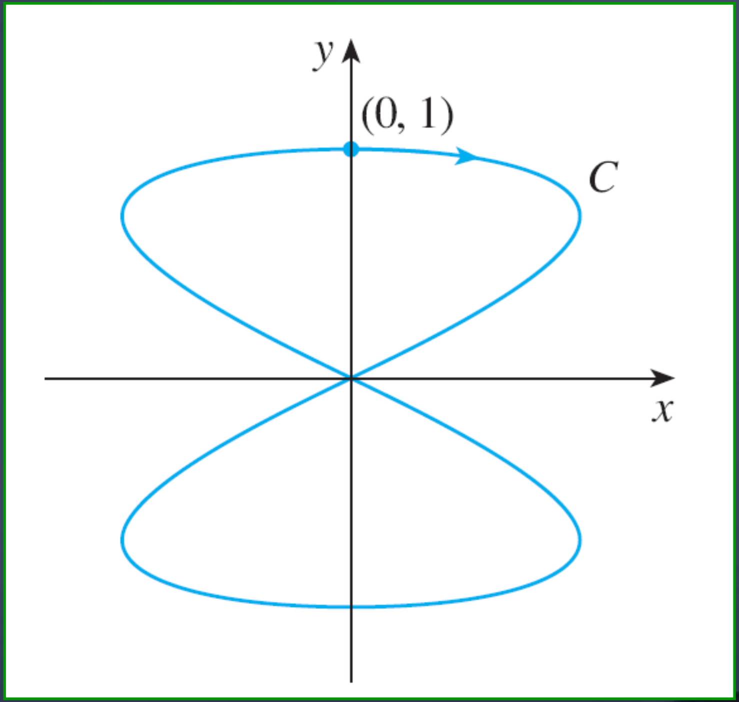
- a taxa de variação de z com relação a t quando o ponto (x, y) se move ao longo da curva C com equações paramétricas
  $x = \text{sen } 2t$, $y = \cos t$



A REGRA DA CADEIA (CASO 1)

Em particular, quando $t = 0$,

- O ponto (x, y) é $(0, 1)$.
- $dz/dt = 6$ é sua taxa de crescimento quando nos movemos ao longo da curva C passando por $(0, 1)$.



A REGRA DA CADEIA (CASO 1)

Se, por exemplo, $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ representar a temperatura no ponto (x, y), então

- a função composta $z = T(\text{sen } 2t, \cos t)$ representa a temperatura dos pontos da curva *C;*
- sua derivada dz/dt responde à taxa de variação de temperatura ao longo da curva *C*.

A REGRA DA CADEIA (CASO 1) EXEMPLO 2

A pressão P (em quilopascals), o volume V (em litros) e a temperatura T (em kelvins) de um mol de um gás ideal estão relacionados por meio da fórmula

$$PV = 8{,}31T$$

Determine a taxa de variação da pressão quando

- a temperatura é 300 K e está aumentando com a taxa de 0,1 K/s;
- o volume é 100 L e está aumentando com a taxa de 0,2 L/s.

A REGRA DA CADEIA (CASO 1) EXEMPLO 2

Se t representa o tempo decorrido, medido em segundos, então em um dado instante temos

- $T = 300$
- $dT/dt = 0,1$
- $V = 100$
- $dV/dt = 0,2$

A REGRA DA CADEIA (CASO 1) EXEMPLO 2

Como $P = 8{,}31\dfrac{T}{V}$, pela Regra da Cadeia:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8{,}31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8{,}31T}{V^2}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{8{,}31}{100}(0{,}1) - \frac{8{,}31(300)}{100^2}(0{,}2) = -0{,}04155$$

- A pressão está decrescendo com a taxa de 0,042 kPa/s.

A REGRA DA CADEIA (CASO 1)

Vamos considerar agora a situação onde $z = f(x, y)$, mas x e y são funções de outras duas variáveis s e t: $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$.

- Então z é indiretamente uma função de s e t e desejamos determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

A REGRA DA CADEIA (CASO 1)

Lembre-se de que para calcular $\partial z/\partial t$, mantemos s fixo e calculamos a derivada ordinária de z em relação a t.

- Portanto, aplicando o Teorema 2, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

A REGRA DA CADEIA (CASO 1)

Argumento análogo serve para $\partial z/\partial s$.

Assim, demonstramos a seguinte versão da Regra da Cadeia.

A REGRA DA CADEIA (CASO 2) Teorema 3

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e de t.

- Então,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

A REGRA DA CADEIA (CASO 2) EXEMPLO 3

Se $z = e^x$ sen y, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$, determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

- Aplicando o Caso 2 da Regra da Cadeia, obtemos os seguintes resultados.

A REGRA DA CADEIA (CASO 2) EXEMPLO 3

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2 t) + 2ste^{st^2} \cos(s^2 t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$= 2ste^{st^2} \operatorname{sen}(s^2 t) + s^2 e^{st^2} \cos(s^2 t)$$

A REGRA DA CADEIA

O Caso 2 da Regra da Cadeia contém três tipos de variáveis:

- *s* e *t*, que são variáveis **independentes**;
- *x* e *y*, chamadas variáveis **intermediárias**;
- *z*, que é a variável **dependente**.

A REGRA DA CADEIA

Observe que o Teorema 3 tem um termo para cada variável intermediária e que cada um desses termos se assemelha à Regra da Cadeia unidimensional da Equação 1.

Para lembrar a Regra da Cadeia é útil desenhar o **diagrama em árvore.**

DIAGRAMA EM ÁRVORE

Desenhamos os ramos da árvore saindo da variável dependente *z* para as variáveis intermediárias *x* e *y* a fim de indicar que *z* é uma função de *x* e *y*.

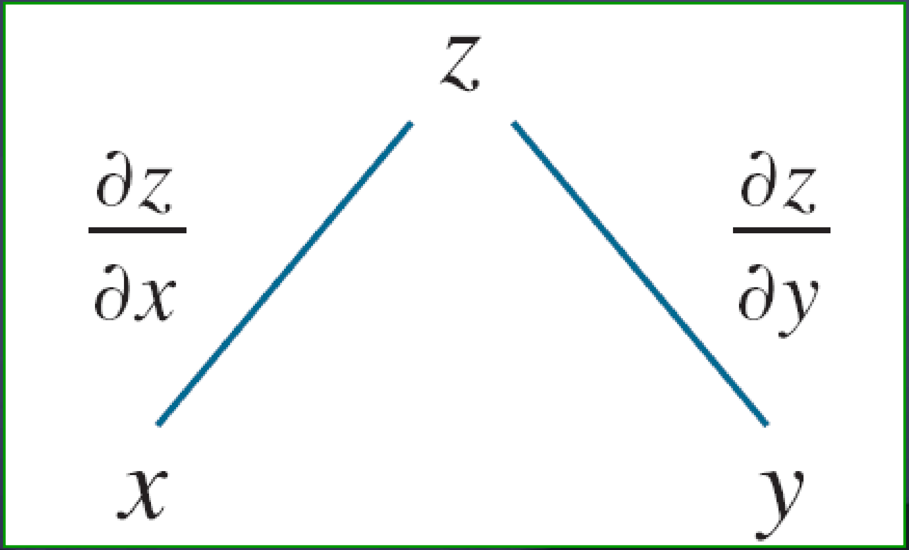


DIAGRAMA EM ÁRVORE

Então desenhamos os ramos saindo de *x* e *y* para as variáveis independentes *s* e *t*.

- Em cada ramo indicamos a derivada parcial correspondente.

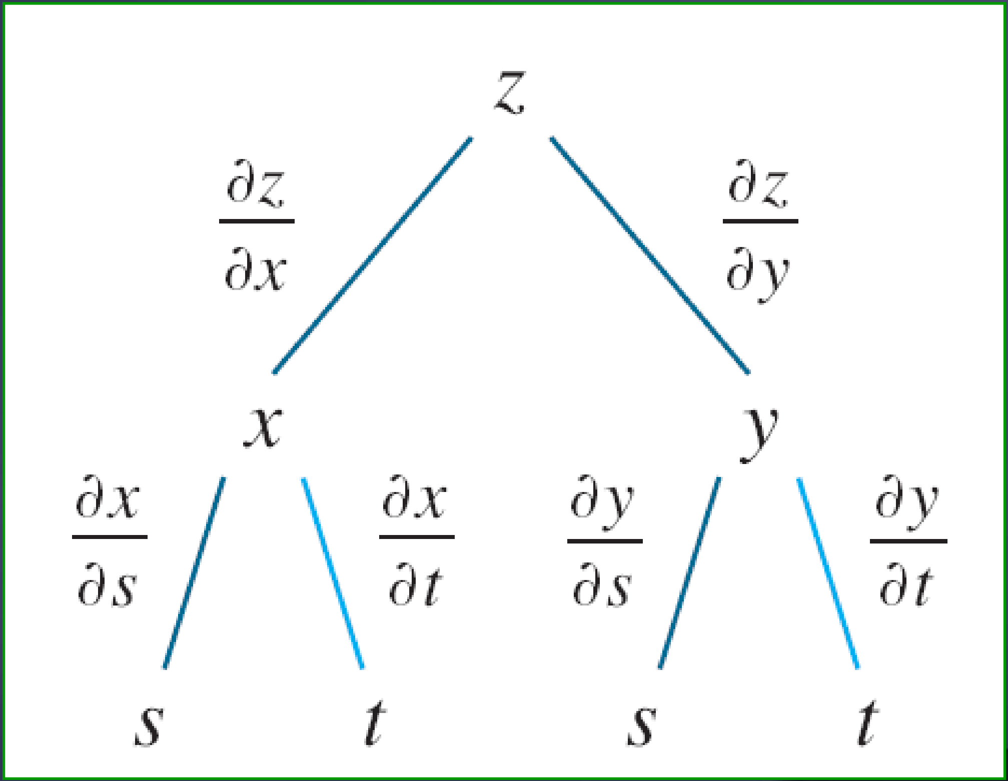


DIAGRAMA EM ÁRVORE

Para achar $\partial z/\partial s$, determinamos o produto das derivadas parciais ao longo de cada caminho de z a s e somamos esses produtos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

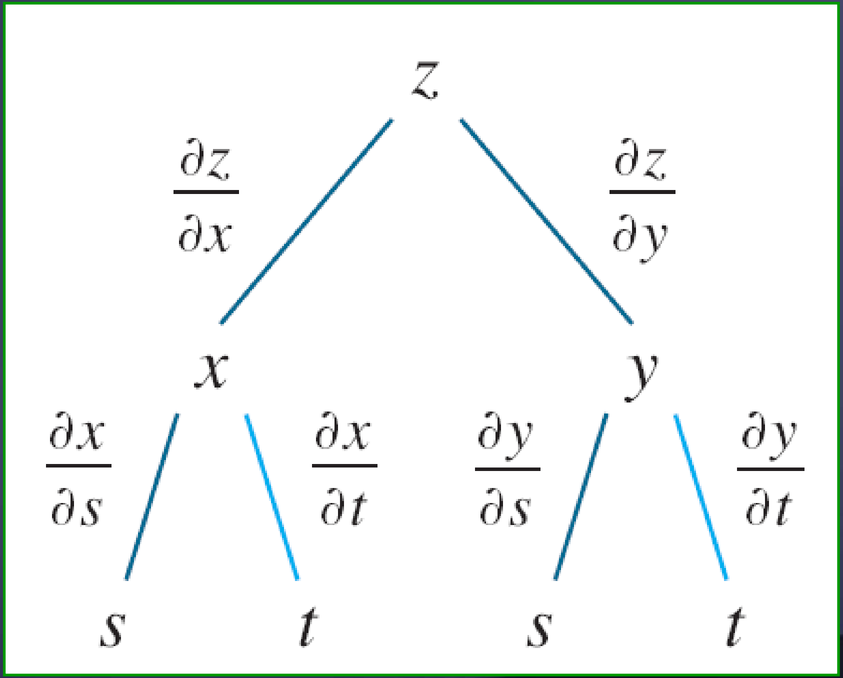
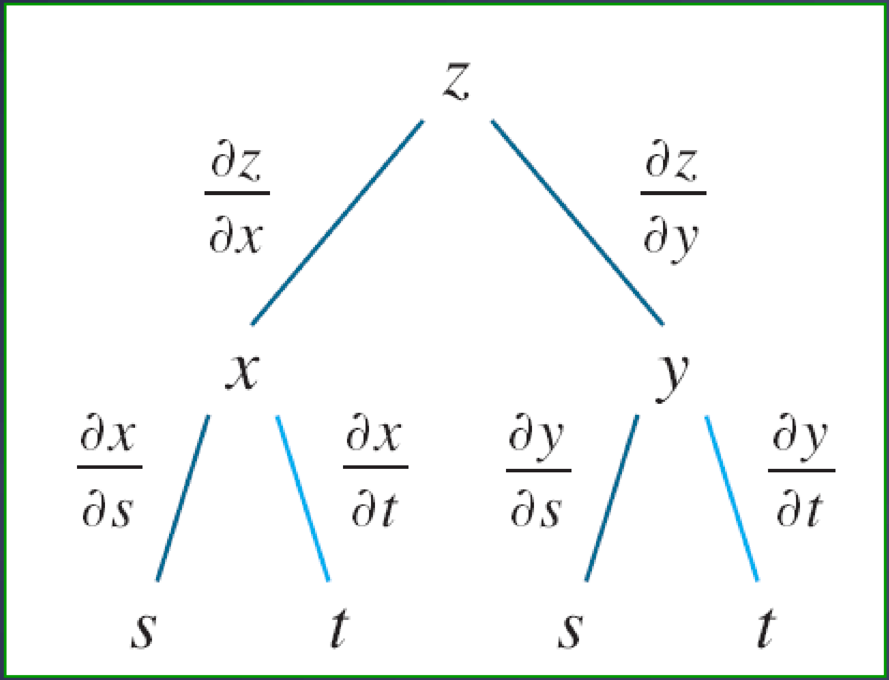


DIAGRAMA EM ÁRVORE

Da mesma forma, para determinar $\partial z/\partial t$ usamos os caminhos de z a t .



A REGRA DA CADEIA

Consideremos agora uma situação mais geral na qual a variável dependente u é uma função de n variáveis intermediárias $x_1,\ldots, x_n$.

Cada uma das quais, por seu turno, é função de m variáveis independentes $t_1 ,\ldots, t_m$.

A REGRA DA CADEIA

Observe que existem *n* termos, um para cada variável intermediária.

A demonstração é semelhante à do Caso 1.

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) Teorema 4

Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onde cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2 \, . \, . \, . \, , t_m$.

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) Teorema 4

Então *u* é uma função diferenciável de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) EXEMPLO 4

Escreva a Regra da Cadeia para o caso onde $w = f(x, y, z, t)$ e

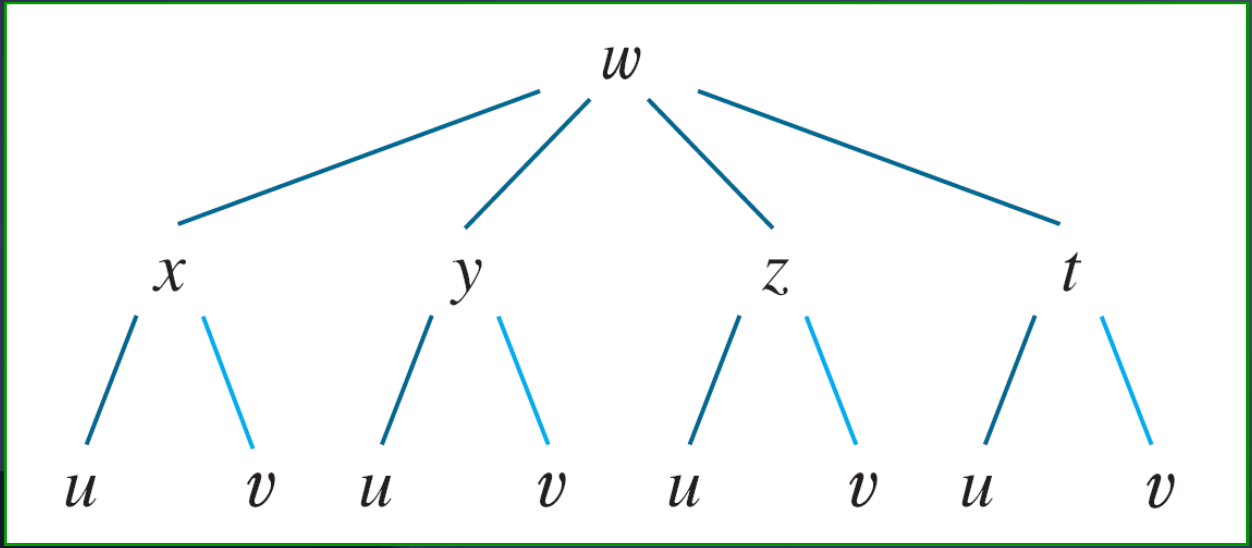
$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ t = t(u, v)$$

- Aplicamos o Teorema 4 com $n = 4$ e $m = 2$.

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL)   EXEMPLO 4

A figura mostra o diagrama em árvore.

- Apesar de não termos escrito as derivadas nos ramos, entendemos que em um ramo que liga *y* a *u* a derivada parcial omitida é $\partial y/\partial u$.



A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) EXEMPLO 4

Com a ajuda do diagrama em árvore, podemos escrever as expressões pedidas:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) EXEMPLO 5

Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde

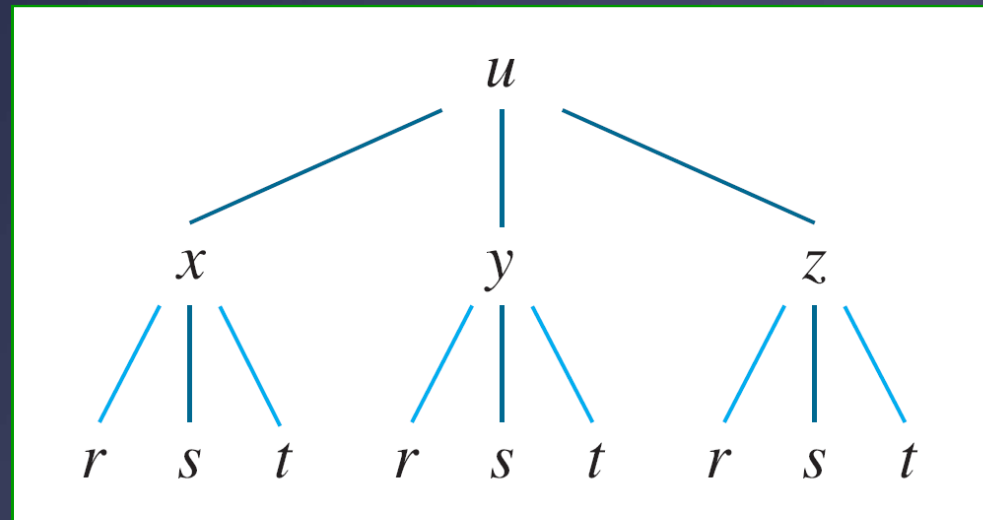
$$x = rse^t,\ y = rs^2e^{-t},\ z = r^2s \operatorname{sen} t$$

determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando

$$r = 2,\ s = 1,\ t = 0$$

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) EXEMPLO 5

Com o auxílio do diagrama em árvore, obtemos



$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) EXEMPLO 5

Quando $r = 2$, $s = 1$, e $t = 0$, temos

$x = 2$, $y = 2$, $z = 0$.

Portanto, $$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0)$$

$$= 192$$

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) EXEMPLO 6

Se $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) EXEMPLO 6

Seja $x = s^2 - t^2$ e $y = t^2 - s^2$.

- Então, $g(s, t) = f(x, y)$, e a Regra da Cadeia nos fornece

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
& t\frac{\partial g}{\partial s}+s\frac{\partial g}{\partial t} \\
& =\left(2st\frac{\partial f}{\partial x}-2st\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(-2st\frac{\partial f}{\partial x}+2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
& =0
\end{aligned}
$$

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) EXEMPLO 7

Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, determine:

a. $\partial z/\partial r$

b. $\partial^2 z/\partial r^2$

A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) EX. 7b – Eq.5

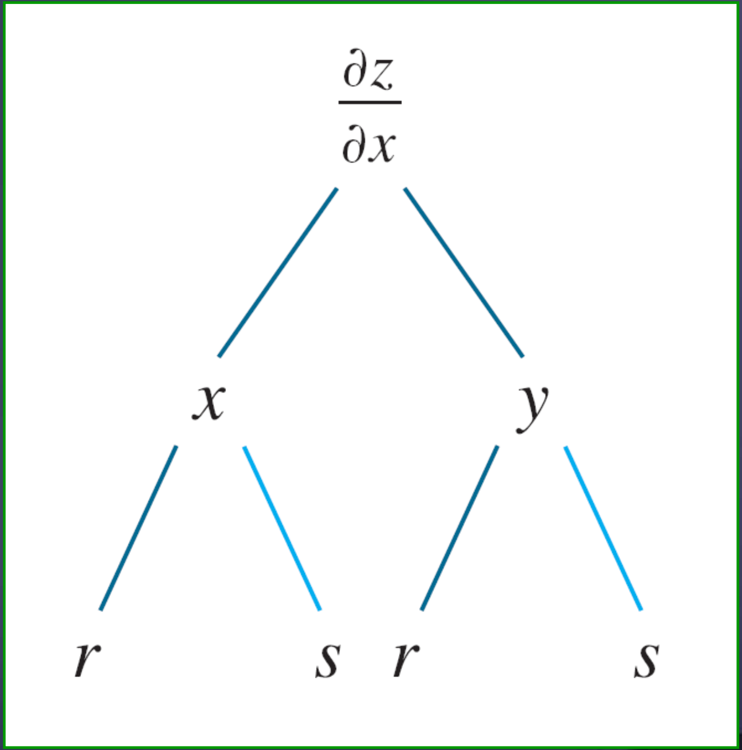
Aplicando a Regra do Produto na expressão da parte (a), obtemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) EXEMPLO 7b

Mas, usando a Regra da Cadeia novamente, obtemos os resultados que seguem.



A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) EXEMPLO 7b

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

A REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) EXEMPLO 7b

Colocando essas expressões na Equação 5 e usando a igualdade das derivadas parciais de segunda ordem mistas, obtemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

A Regra da Cadeia pode ser usada para dar uma descrição mais completa do processo de derivação implícita introduzida nas Seções 3.5, no Volume I, e 14.3.

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Suponhamos que a equação da forma $F(x, y) = 0$ defina y implicitamente como uma função diferenciável de x.

- Ou seja, $y = f(x)$, onde $F(x, f(x)) = 0$ para todo x no domínio de f.

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Se F é diferenciável, podemos aplicar o Caso 1 da Regra de Cadeia para derivar ambos os lados da equação $F(x, y) = 0$ com relação a x.

- Como x e y são ambas funções de x, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA Equação 6

No entanto, $dx/dx = 1$; então, se $\partial F/\partial y \neq 0$, isolamos dy/dx para obtermos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Para deduzir essa equação, assumimos que $F(x, y) = 0$ define y implicitamente em função de x.

O **Teorema da Função Implícita**, demonstrado em cálculo avançado, fornece condições sob as quais essa hipótese é válida.

TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

O Teorema afirma que:

- Suponha que F é definida em uma bola aberta contendo (a, b), onde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$, e F_x e F_y são funções contínuas nessa bola.

- Então, a equação $F(x, y) = 0$ define y como uma função de x perto do ponto (a, b) e a derivada dessa função é dada pela Equação 6.

Determine *y'* se $x^3 + y^3 = 6xy$.

- A equação dada pode ser escrita como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

e, dessa forma, a Equação 6 nos dá

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Suponha agora que z seja dado implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$ para todo (x, y) no domínio de f.

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Se *F* e *f* forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia para derivar a equação $F(x, y, z) = 0$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Mas,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

portanto, essa equação se torna:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Equação 7

Se $\partial F/\partial z \neq 0$, isolamos $\partial z/\partial x$ e obtemos a primeira fórmula das Equações 7.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

- A fórmula para $\partial z/\partial y$ é obtida de modo semelhante.

TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Novamente, uma versão do **Teorema da Função Implícita** nos dá as condições sob as quais nossa hipótese é válida.

TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Essa versão nos diz que:

- Suponha que F é definida dentro de uma esfera contendo (a, b, c), onde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$, e F_x, F_y, e F_z são contínuas dentro da esfera.

- Então, a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como uma função de x e y perto do ponto (a, b, c), e as derivadas parciais dessa função são dadas por (7).

Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

- Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$.

Então, das Equações 7, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$