Derivadas Parciais

Capítulo 14

14.3
Derivadas Parciais

Nesta seção, nós aprenderemos sobre:
Os vários aspectos de derivadas parciais.

INTRODUÇÃO

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa do que a indicada no termômetro.

HUMIDEX

O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o *humidex* (ou índice de temperatura-umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade.

HUMIDEX

O humidex I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for T e a umidade relativa for H.

- Deste modo, I é uma função de T e H.
- Podemos escrever $I = f(T, H)$.

HUMIDEX

A tabela de valores de I a seguir é a parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico.

		Umidade relativa (%)								
	T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Temperatura real (°C)	26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
	28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
	32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
	34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
	36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

HUMIDEX

Vamos nos concentrar na coluna assinalada.

- Ela corresponde à umidade relativa de $H = 60\%$.
- Então, estaremos considerando o humidex como uma função de uma única variável T para um valor fixado de H.

		Umidade relativa (%)								
	T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Temperatura real (°C)	26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
	28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
	32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
	34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
	36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

HUMIDEX

Vamos escrever $g(T) = f(T, 60)$.

Então, $g(T)$ descreve:

- como o humidex I aumenta à medida que a temperatura real T aumenta quando a umidade relativa é 60%.

HUMIDEX

A derivada de *g* quando *T* 30 ºC é a taxa de variação de *I* com relação a *T* quando *T* = 30 ºC:

$$\boxed{g'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}}$$

HUMIDEX

Podemos aproximar seu valor usando a tabela e tomando h = 2 e –2.

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1{,}5$$

HUMIDEX

Tomando a média desses valores, podemos dizer que a derivada *g'*(30) é aproximadamente 1,75.

- Isso significa que, quando a temperatura real é de 30 ºC e a umidade relativa é de 60%, a temperatura aparente (humidex) aumenta cerca de 1,75 ºC para cada grau que a temperatura real aumenta.

HUMIDEX

Olhemos agora para a linha sombreada da tabela.

- Ela corresponde à temperatura fixa de T = 30ºC.

		Umidade relativa (%)								
	T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Temperatura real (ºC)	26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
	28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
	32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
	34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
	36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

HUMIDEX

Os números da linha correspondem aos valores da função $G(H) = f(30, H)$.

- Eles descrevem como o humidex cresce com o aumento de umidade relativa H quando a temperatura real é de $T = 30°C$.

HUMIDEX

A derivada dessa função quando H = 60% é a taxa de variação de I com relação a H quando H = 60%:

$$G'(60) = \lim_{h \to 0} \frac{G(60 + h) - G(60)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30, 60 + h) - f(30, 60)}{h}$$

HUMIDEX

Tomando h = 5 and –5, aproximamos o valor de $G'(60)$ usando os valores tabelados:

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0{,}4$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = 0{,}2$$

HUMIDEX

Tomando a média desses valores, obtemos a estimativa $G'(60) \approx 0,3$

- Isso nos diz que, quando a temperatura é de 30 °C e a umidade relativa é de 60%, o humidex aumenta em cerca de 0,3 °C para cada ponto porcentual que a umidade relativa aumenta.

DERIVADAS PARCIAIS

Em geral, se f é uma função de duas variáveis x e y, suponha que deixemos somente x variar enquanto mantemos fixo o valor de y, por exemplo, fazendo $y = b$, onde b é uma constante.

- Estaremos então considerando, realmente, uma função de uma única variável x, a saber $g(x) = f(x, b)$.

Equação 1

Se g tem derivada em a, nós a chamaremos **derivada parcial de f em relação a x em (a, b).**

E a denotaremos por $f_x(a, b)$.

Assim, $f_x(a, b) = g'(a)$ onde $g(x) = f(x, b)$.

Equação 2

Pela definição de derivada, temos

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

e assim a Equação 1 fica

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

DERIVADAS PARCIAIS

Da mesma forma, a **derivada parcial de *f* em relação a *y* em (*a*, *b*)**, denotada por $f_y(a, b)$, é obtida

- mantendo-se *x* fixo ($x = a$)
- determinando-se a derivada em *b* da função $G(y) = f(a, y)$

Então,

$$f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

DERIVADAS PARCIAIS

Com essa notação para as derivadas parciais, podemos escrever as taxas de variação do índice de calor I com relação à temperatura real T e umidade relativa H quando T = 30 ºC e H = 60% como segue:

$$f_T(30, 60) \approx 1{,}75 \qquad\qquad f_H(30, 60) \approx 0{,}3$$

DERIVADAS PARCIAIS

Se agora deixamos o ponto (a, b) variar nas Equações 2 e 3, f_x e f_y se tornam funções de duas variáveis.

DERIVADAS PARCIAIS Equação 4

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais são as funções f_x e f_y e definidas por:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

NOTAÇÕES

Existem diversas notações alternativas para as derivadas parciais.

- Por exemplo, em vez de f_x, podemos escrever f_1 ou $D_1 f$ (para indicar a derivação em relação à *primeira* variável) ou $\partial f/\partial x$.

- Mas aqui $\partial f/\partial x$ não pode ser interpretada como uma razão de diferenciais.

NOTAÇÃO PARA AS DERIVADAS PARCIAIS

Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

DERIVADAS PARCIAIS

Para calcular as derivadas parciais, tudo o que temos a fazer é:

- Nos lembrarmos, a partir da Equação 1, que a derivada parcial com relação a x é a derivada *ordinária* da função g de uma única variável obtida mantendo-se fixo o valor de y.

REGRA PARA DETERMINAR A DERIVADA PARCIAL DE $z = f(x, y)$

Então, temos a seguinte regra.

1. Para encontrar f_x, trate y como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a x.

2. Para encontrar f_y, trate x como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a y.

Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

determine $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Mantendo *y* constante e derivando em relação a *x*, obtemos

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

E assim,

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Mantendo *x* constante e derivando em relação a *y*, obtemos

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

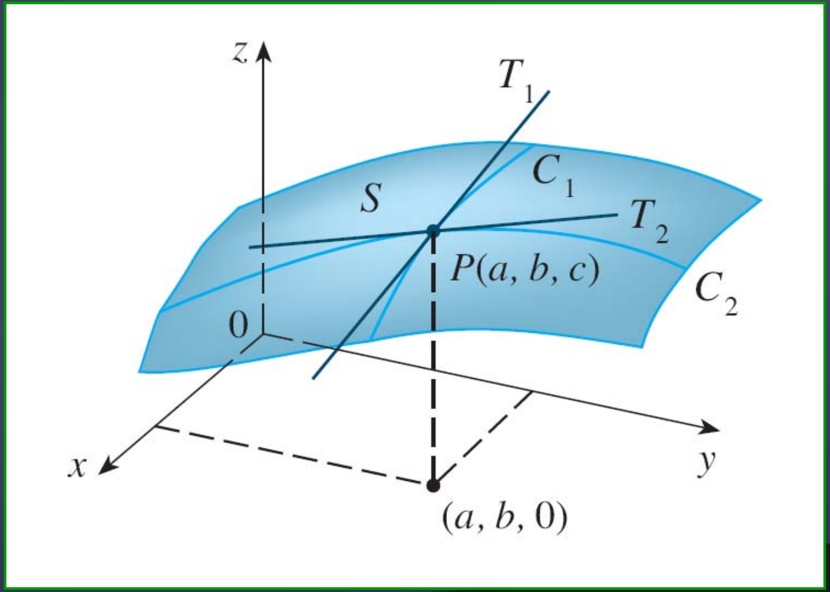
E assim,

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Para dar uma interpretação geométrica para as derivadas parciais, lembremo-nos de que a equação $z = f(x, y)$ representa uma superfície S (o gráfico de f).

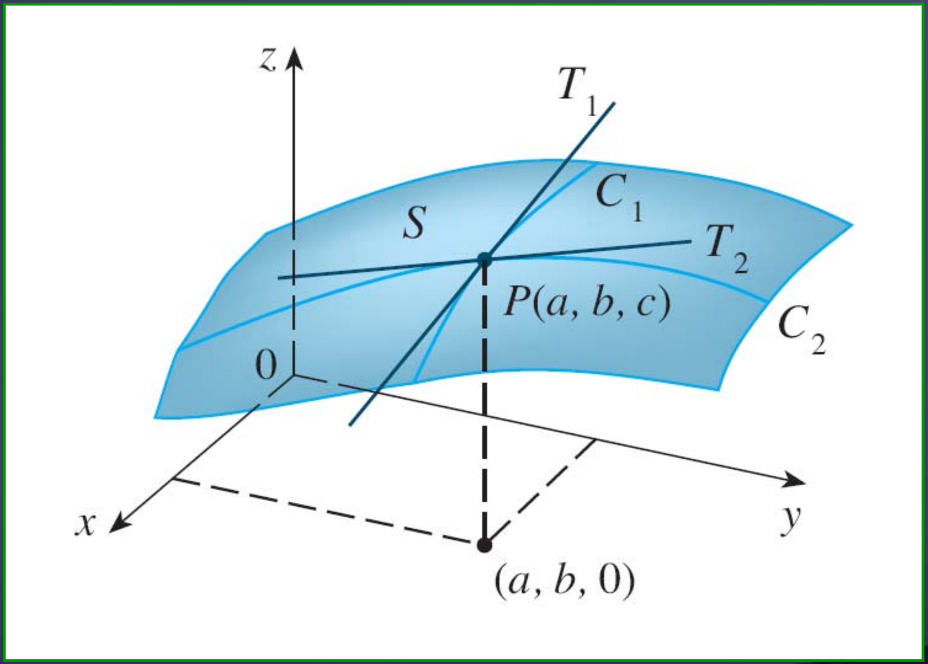
- Se $f(a, b) = c$, então o ponto $P(a, b, c)$ pertence a S.



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Fixando $y = b$, restringimos nossa atenção à curva C_1 na qual o plano vertical $y = b$ intercepta S.

- Ou seja, C_1 é o corte de S no plano $y = b$.

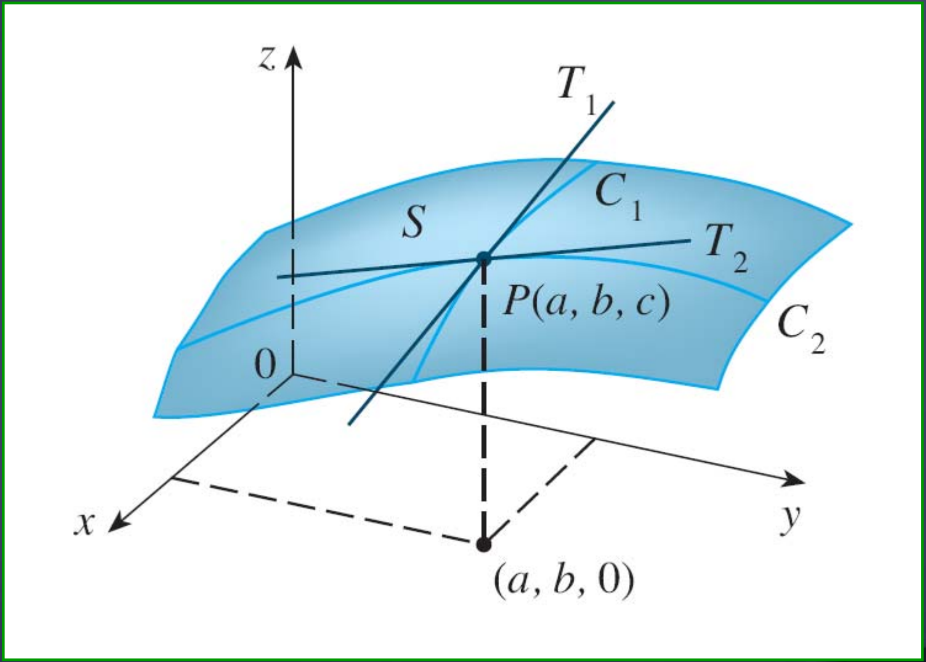


CENGAGE Learning™

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Da mesma forma, o plano vertical $x = a$ intercepta S na curva C_2.

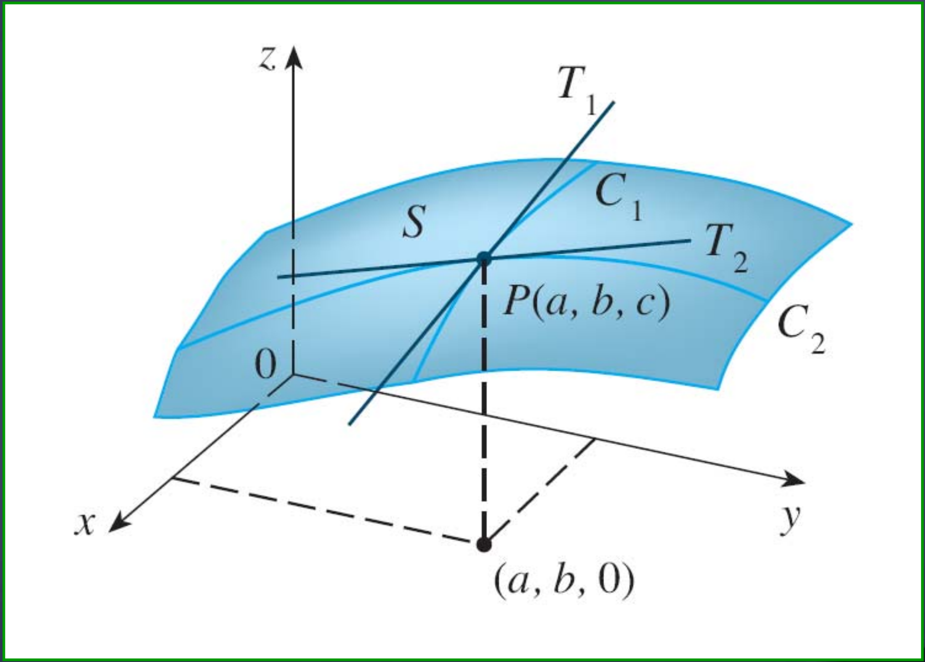
As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto P.



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Observe que a curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$.

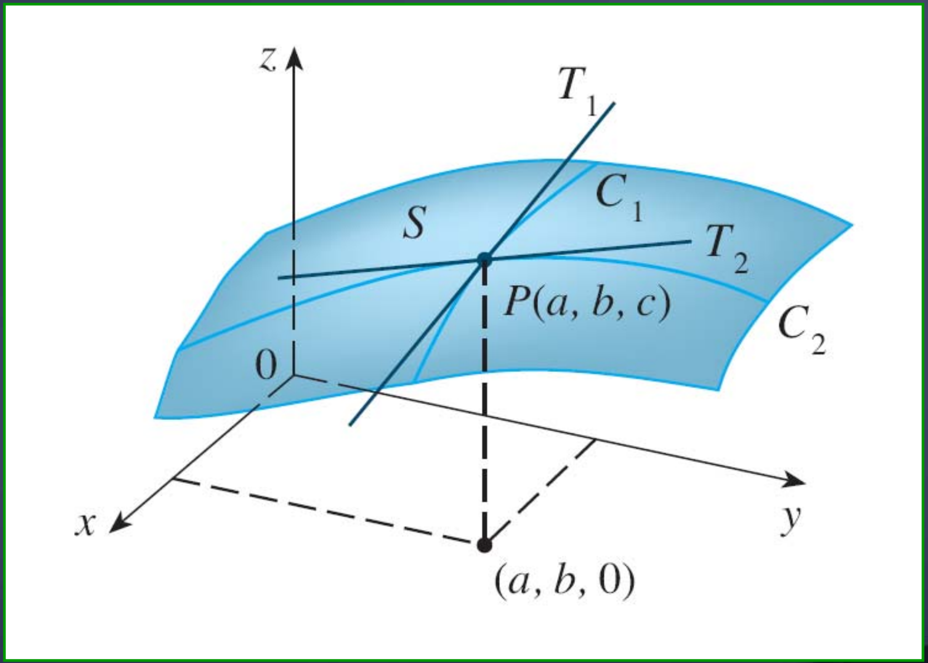
- De modo que a inclinação da tangente T_1 em P é: $g'(a) = f_x(a, b)$



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

A curva C_2 é o gráfico da função $G(y) = f(a, y)$.

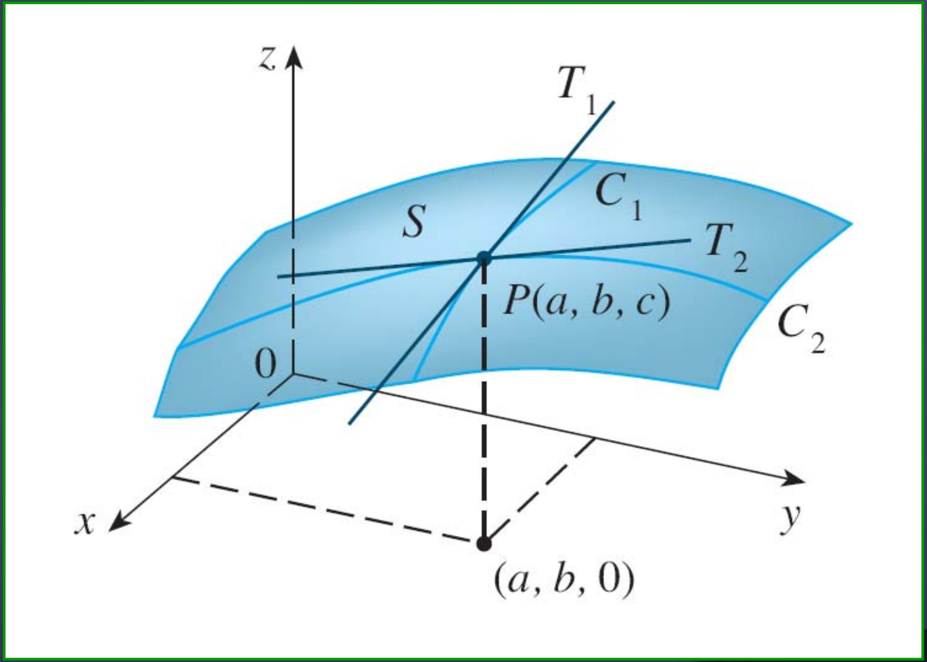
- De modo que a inclinação da tangente T_2 em P é: $G'(b) = f_y(a, b)$.



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Então, as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ podem ser interpretadas geometricamente como:

- as inclinações das retas tangentes em $P(a, b, c)$ aos cortes C_1 e C_2 de S nos planos $y = b$ e $x = a$.



INTERPRETAÇÃO COMO TAXAS DE VARIAÇÃO

Como vimos no caso da função humidex, as derivadas parciais podem ser interpretadas como *taxas de variação*.

- Se $z = f(x, y)$, então $\partial z/\partial x$ representa a taxa de variação de z com relação a x quando y é mantido fixo.

- Da mesma forma, $\partial z/\partial y$ representa a taxa de variação de z em relação a y quando x é mantido fixo.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA EXEMPLO 2

Se

$$f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$$

encontre $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA EXEMPLO 2

Temos:

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -4y$$

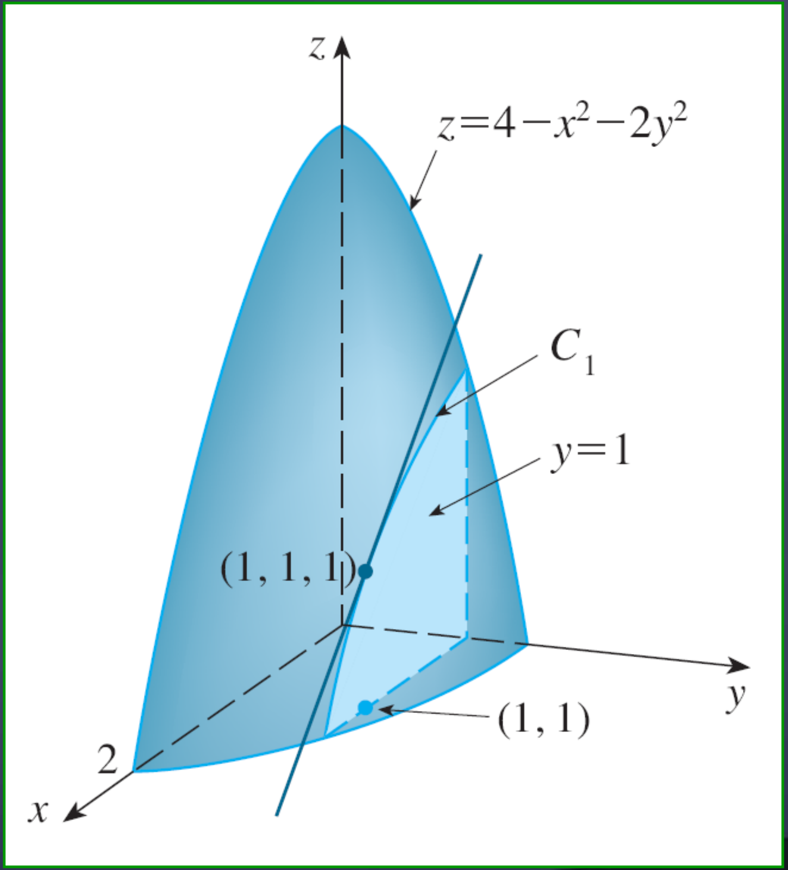
$$f_x(1, 1) = -2 \qquad f_y(1, 1) = -4$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA EXEMPLO 2

O gráfico de *f* é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$

O plano vertical $y = 1$ intercepta-o na parábola $z = 2 - x^2$, $y = 1$.

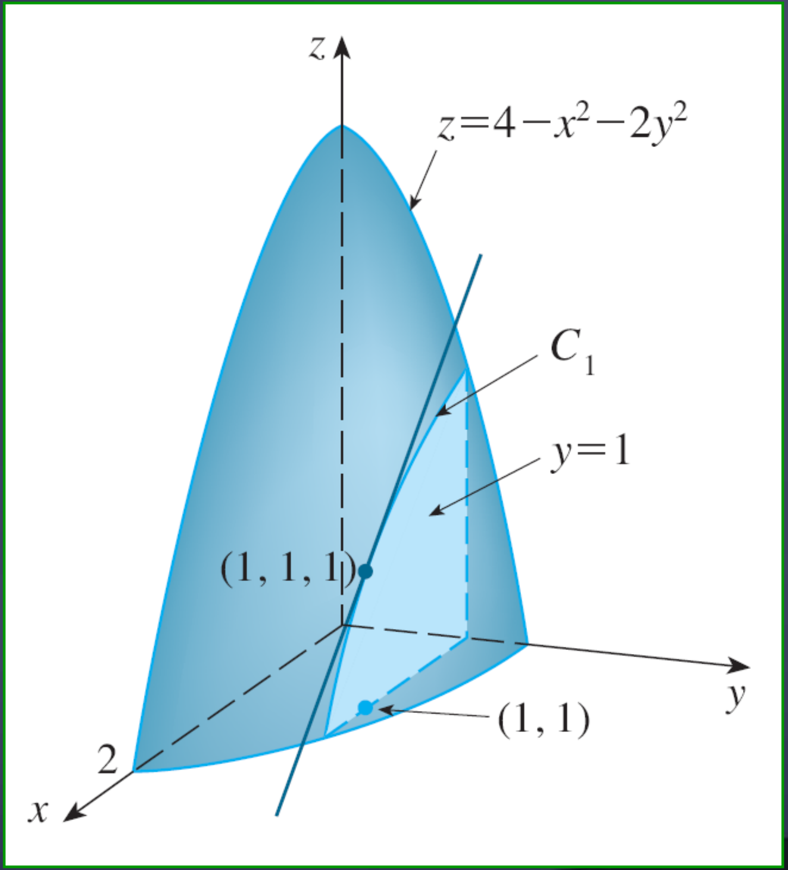
- Como na discussão precedente, indicamos esta curva por C_1.



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA EXEMPLO 2

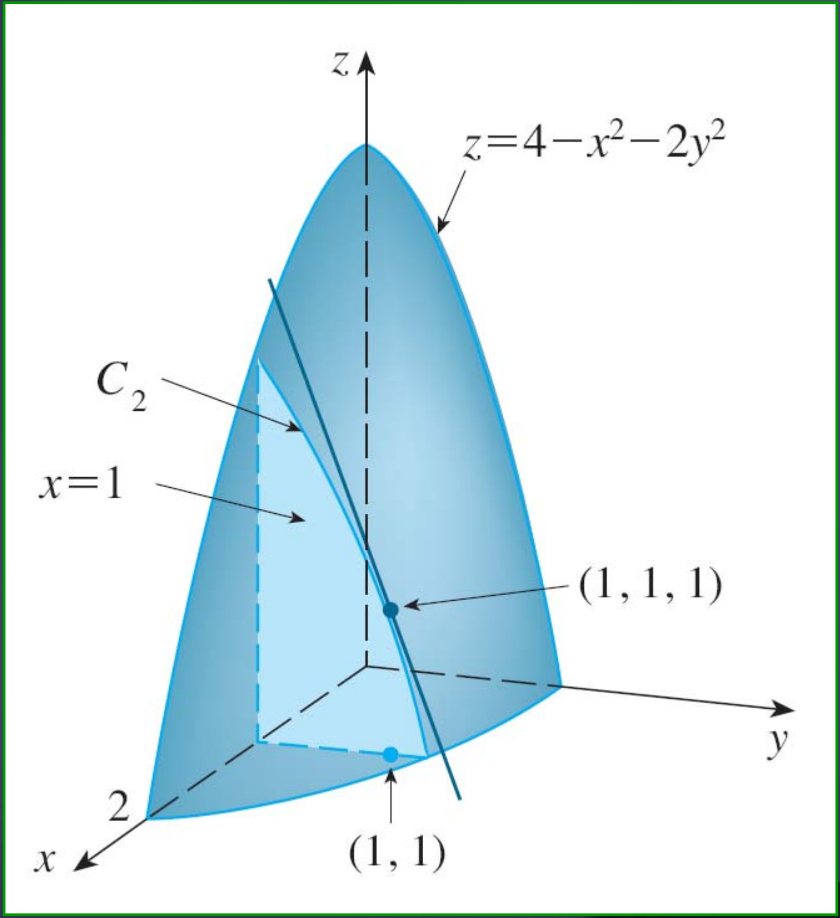
A inclinação da reta tangente à parábola no ponto (1, 1, 1) é

$$f_x(1, 1) = -2$$



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA EXEMPLO 2

Da mesma forma, a curva C_2 na qual o plano $x = 1$ intercepta o paraboloide é a parábola $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$.



- A inclinação da reta tangente em (1, 1, 1) é

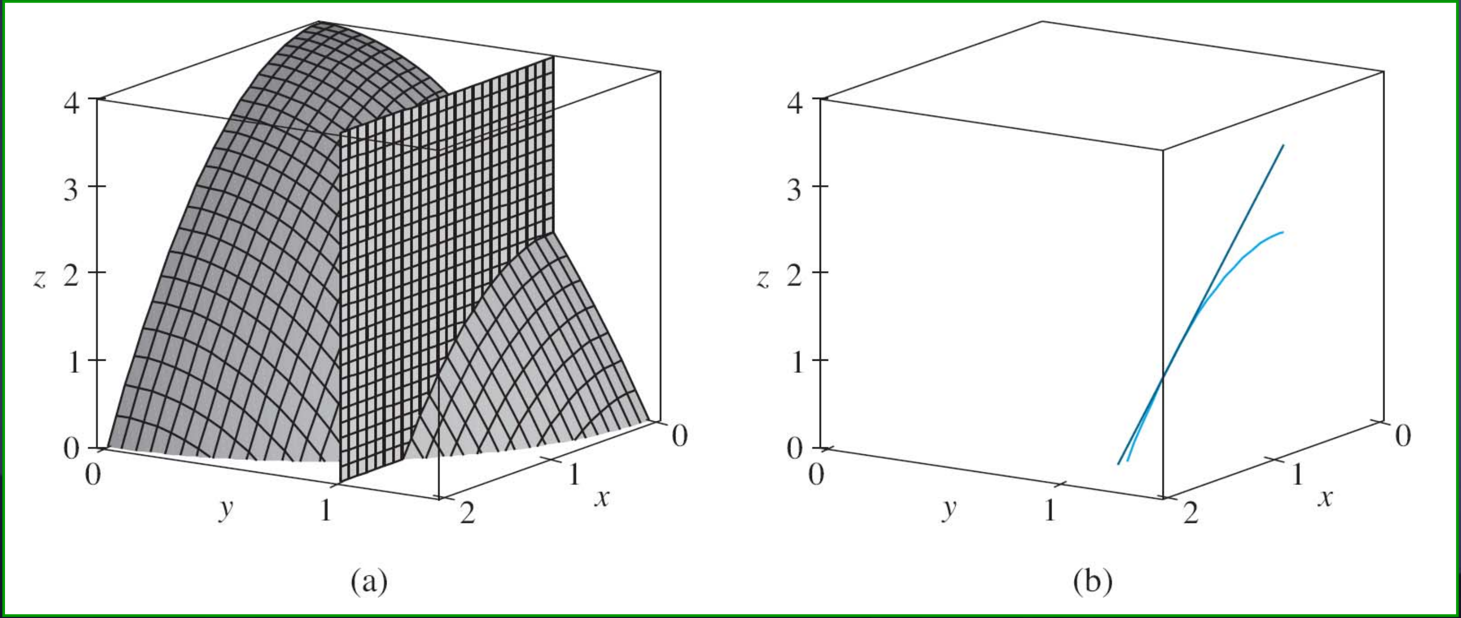
$$f_y(1, 1) = -4$$

CENGAGE Learning™

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Esse é o gráfico desenhado pelo computador correspondente à primeira figura no Exemplo 2.

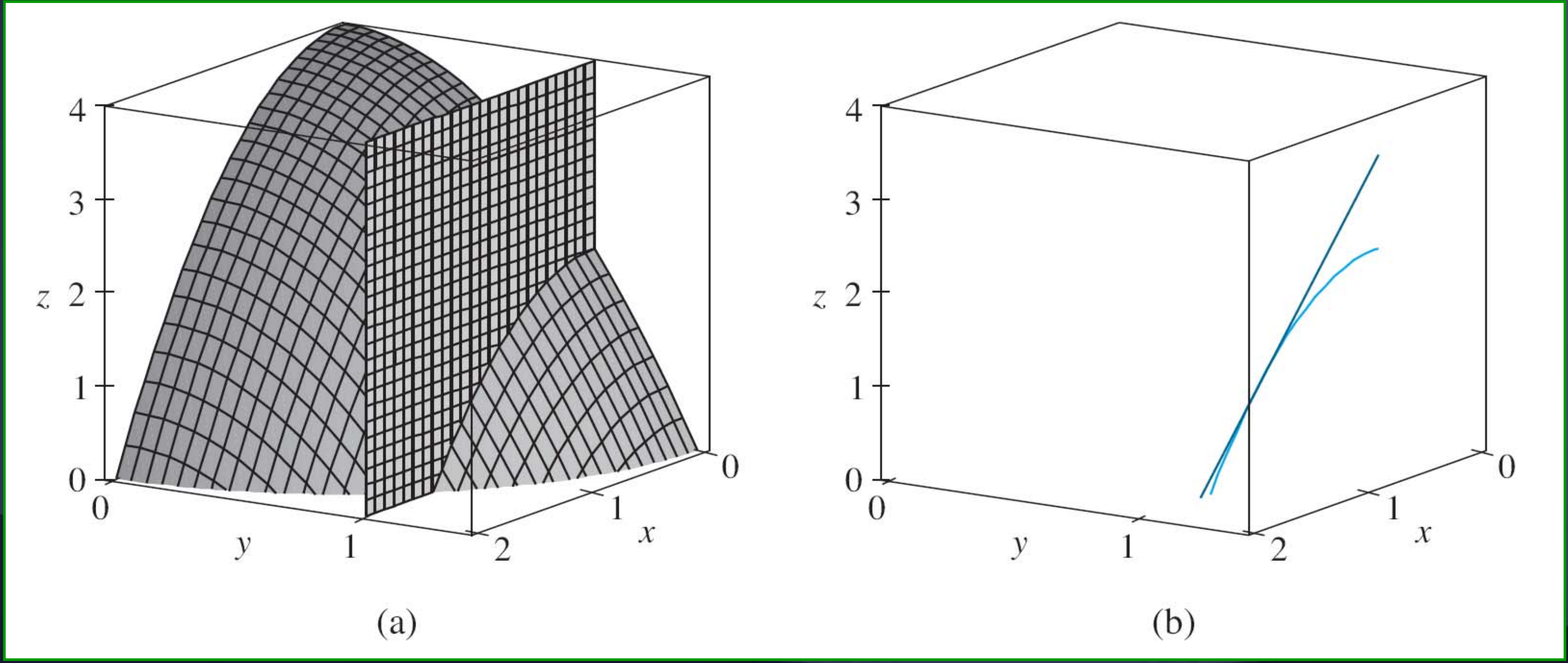
- A Parte (a) exibe o plano $y = 1$ interceptando a superfície para formar a curva C_1.
- A Parte (b) mostra C_1 e T_1.



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

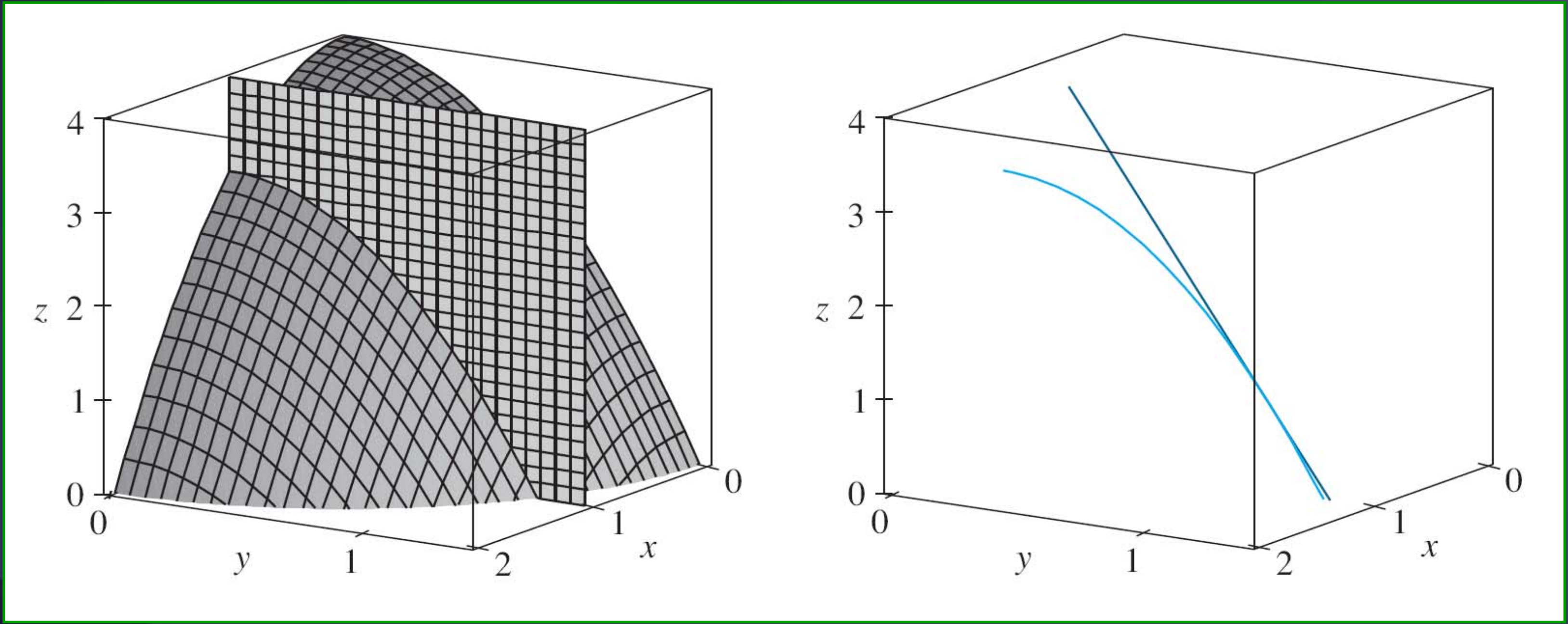
Usamos a equação vetorial:

- $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 2 - t^2 \rangle$ para C_1
- $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1 - 2t \rangle$ para T_1



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Do mesmo modo, essa figura corresponde à segunda figura no Exemplo 2.



DERIVADAS PARCIAIS EXEMPLO 3

Se

$$f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}$$

Usando a Regra da Cadeia para funções de uma variável, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\frac{x}{(1+y)^2}$$

Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

Para achar $\partial z/\partial x$, derivamos implicitamente em relação a *x*, tomando o cuidado de tratar *y* como constante:

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

- Isolando $\partial z/\partial x$, nesta equação, obtemos

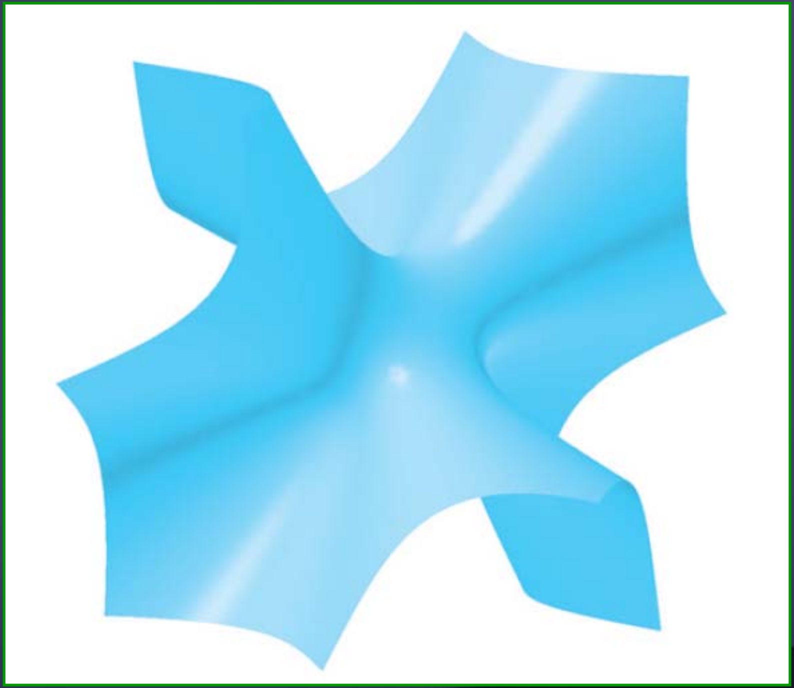
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

Da mesma forma, derivando implicitamente em relação a *y* temos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

Alguns sistemas de computação algébrica podem traçar superfícies definidas por equações implícitas com três variáveis.

- A figura mostra o desenho da superfície definida implicitamente pela equação do Exemplo 4.



FUNÇÃO DE MAIS DE DUAS VARIÁVEIS

As derivadas parciais também podem ser definidas para funções de três ou mais variáveis.

- Por exemplo, se *f* é uma função de três variáveis *x*, *y* e *z*, então sua derivada parcial em relação a *x* é definida como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

FUNÇÃO DE MAIS DE DUAS VARIÁVEIS

E pode ser encontrada:

- olhando-se y e z como constantes
- derivando-se $f\,(x, y, z)$ com relação a x.

FUNÇÃO DE MAIS DE DUAS VARIÁVEIS

Se $w = f(x, y, z)$, então $f_x = \partial w/\partial x$ pode ser interpretada como a taxa de variação de w em relação a x quando y e z são mantidos fixos.

- Entretanto, não podemos interpretá-la geometricamente porque o gráfico de f pertence ao espaço de dimensão quatro.

FUNÇÃO DE MAIS DE DUAS VARIÁVEIS

Em geral, se *u* é uma função de *n* variáveis $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sua derivada parcial em relação à *i*-ésima variável x_i é:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

FUNÇÃO DE MAIS DE DUAS VARIÁVEIS

E podemos também escrever:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

Determine f_x, f_y, e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

- Mantendo constantes y e z e derivando em relação a x, temos:

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

- Da mesma forma,

$$f_y = xe^{xy} \ln z \qquad f_z = e^{xy}/z$$

DERIVADAS EM ORDEM SUPERIOR

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais f_x e f_y são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais

$$(f_x)_x\,,\ (f_x)_y\,,\ (f_y)_x\,,\ (f_y)_y$$

chamadas **derivadas parciais de segunda ordem** de f.

NOTAÇÃO

Se $z = f(x, y)$, usamos a seguinte notação:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Portanto, a notação f_{xy} (ou $\partial^2 f/\partial y \partial x$) significa que primeiro derivamos com relação a x e depois em relação a y.

No cálculo de f_{yx}, a ordem é invertida.

Determine as derivadas parciais de segunda ordem de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

- No Exemplo 1 achamos que

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM EX. 6

- Logo,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 2xy^3\right) = 6x + 2y^3$$

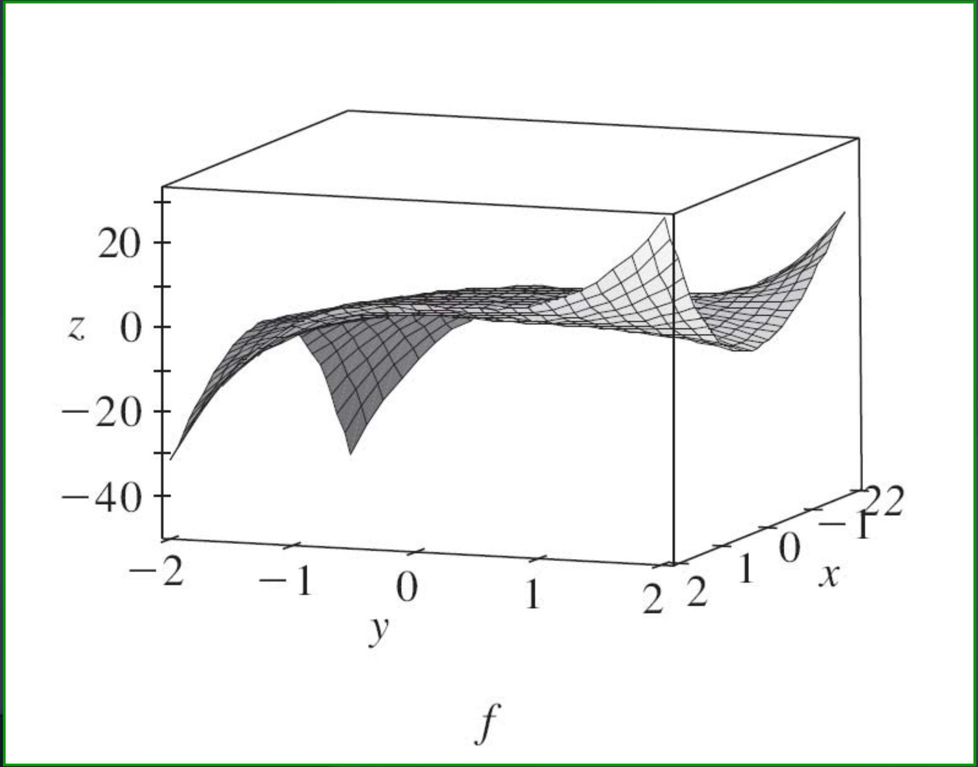
$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 2xy^3\right) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 - 4y\right) = 6xy^2$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 - 4y\right) = 6x^2y - 4$$

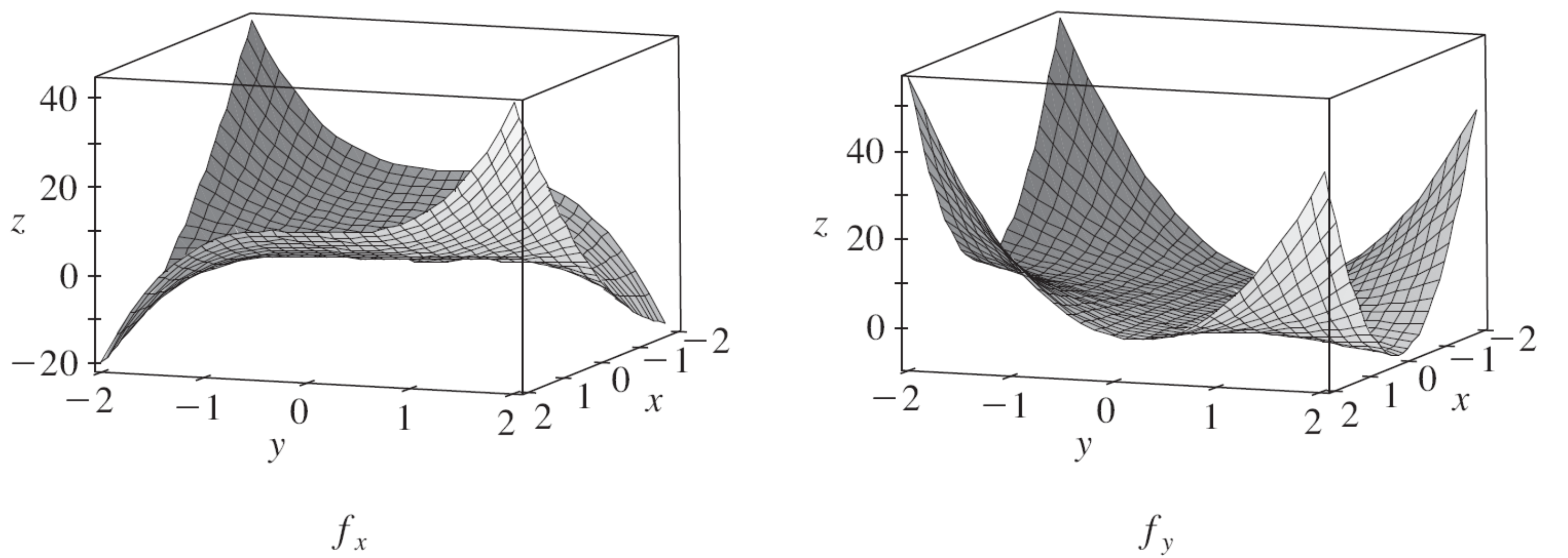
DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

A figura mostra o gráfico da função *f* no Exemplo 6 para: $-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$



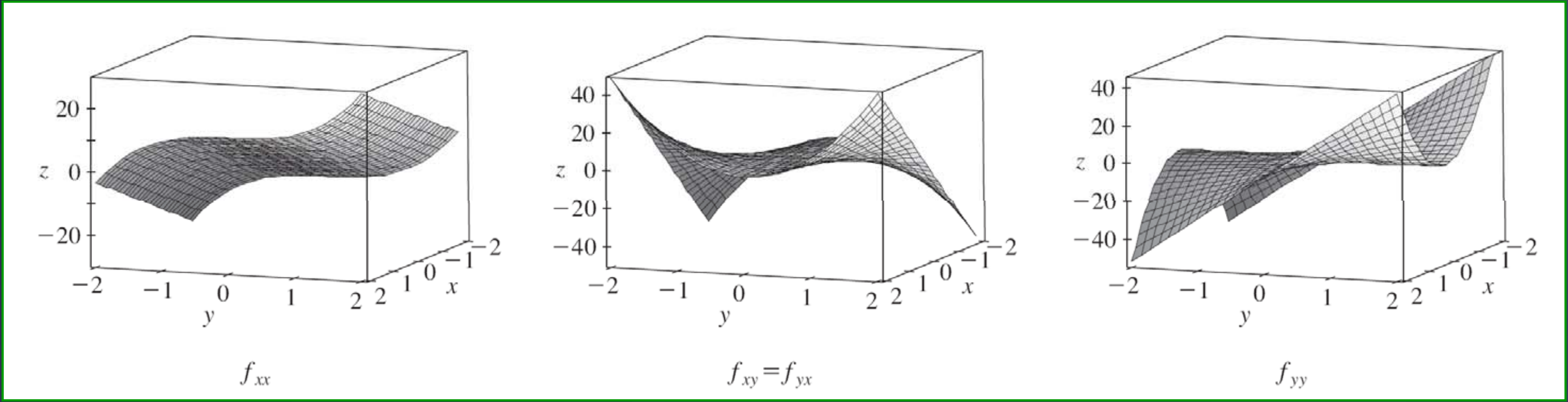
DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Essas mostram os gráficos das derivadas parciais de primeira ordem.



DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

E esses são os gráficos das derivadas parciais de segunda ordem.



DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Observe que $f_{xy} = f_{yx}$ no Exemplo 6.

- Isso não é só uma coincidência.
- As derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática.

DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

O próximo teorema, do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765), fornece condições sob as quais podemos afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$.

- A demonstração é feita no Apêndice F.

TEOREMA DE CLAIRAUT

Suponha que *f* seja definida em uma bola aberta *D* que contenha o ponto (*a*, *b*).

Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em *D*, então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

DERIVADAS EM ORDEM SUPERIOR

Derivadas parciais de ordem 3 ou maior também podem ser definidas.

- Por exemplo, $f_{xyy} = \left(f_{xy} \right)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \, \partial x}$

- Usando o Teorema de Clairaut podemos mostrar que

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

se essas funções forem contínuas.

Calcule f_{xxyz} se $f(x, y, z) = \text{sen}(3x + yz)$.

- $f_x = 3\cos(3x + yz)$
- $f_{xx} = -9\,\text{sen}(3x + yz)$
- $f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$
- $f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\,\text{sen}(3x + yz)$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

As derivadas parciais ocorrem em *equações diferenciais parciais* que exprimem certas leis físicas.

EQUAÇÃO DE LAPLACE

Por exemplo, a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é denominada **equação de Laplace** em homenagem a Pierre Laplace (1749-1827).

FUNÇÕES HARMÔNICAS

As soluções dessa equação são chamadas **funções harmônicas.**

- Elas são muito importantes no estudo de condução de calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

EQUAÇÃO DE LAPLACE   EXEMPLO 8

Mostre que a função $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ é solução da equação de Laplace.

- $u_x = e^x \operatorname{sen} y$
- $u_y = e^x \cos y$
- $u_{xx} = e^x \operatorname{sen} y$
- $u_{yy} = -e^x \operatorname{sen} y$
- $u_{xx} + u_{yy} = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$

- Portanto, *u* satisfaz a equação de Laplace.

EQUAÇÃO DA ONDA

A **equação da onda**

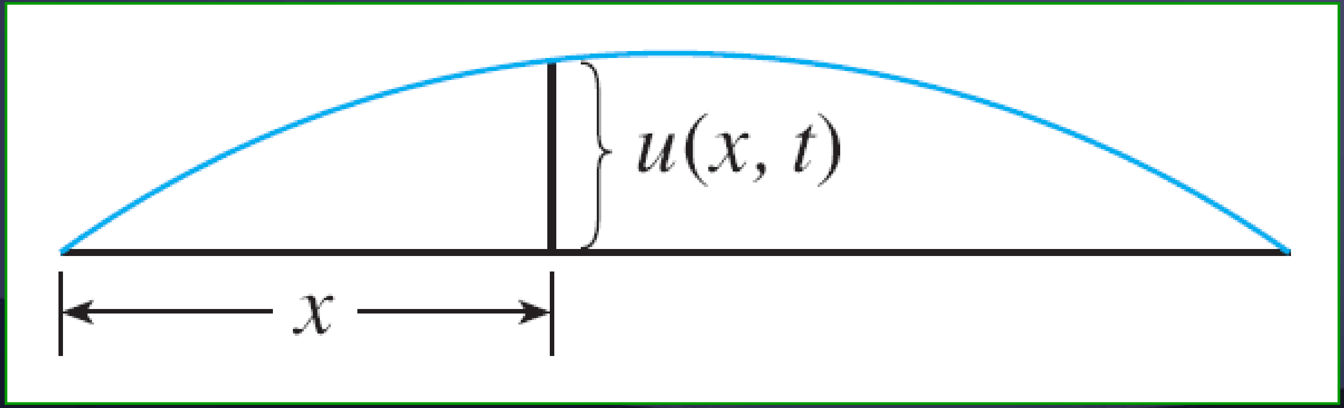
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve o movimento de uma onda, que pode ser do mar, de som, luminosa ou se movendo em uma corda vibrante.

EQUAÇÃO DA ONDA

Por exemplo, se $u(x, t)$ representa o deslocamento da corda vibrante de violino no instante t e à distância x de uma das extremidades da corda, então

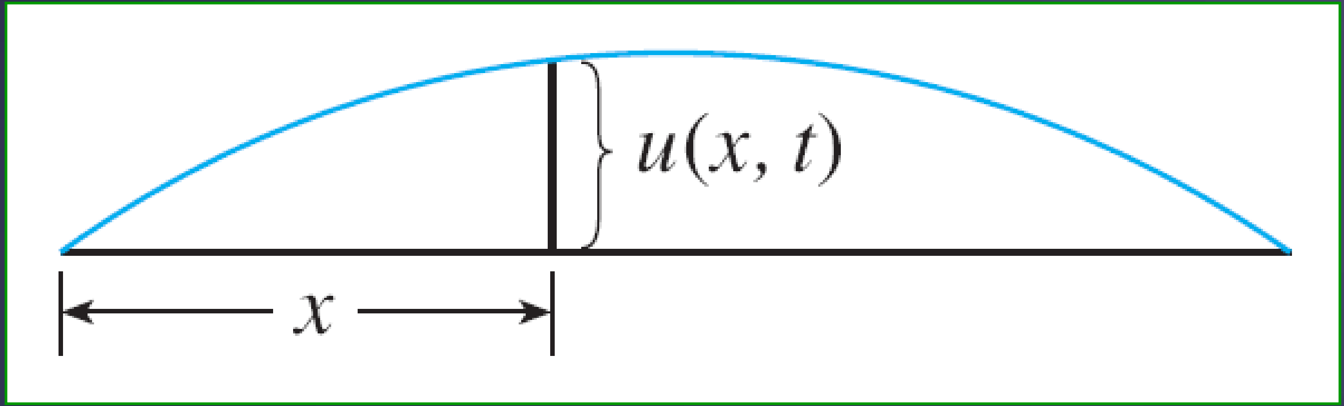
- $u(x, t)$ satisfaz a equação da onda.



EQUAÇÃO DA ONDA

A constante *a* depende:

- da densidade da corda
- da tensão aplicada nela.



EQUAÇÃO DA ONDA — EXEMPLO 9

Verifique que a função $u(x, t) = \text{sen}(x - at)$ satisfaz a equação da onda.

- $u_x = \cos(x - at)$
- $u_{xx} = -\text{sen}(x - at)$
- $u_t = -a \cos(x - at)$
- $u_{tt} = -a^2 \,\text{sen}(x - at) = a^2 u_{xx}$

- Então, u satisfaz a equação da onda.

FUNÇÃO DE PRODUÇÃO DE COBB-DOUGLAS

No Exemplo 3 da Seção 14.1 descrevemos o trabalho de Cobb e Douglas na modelagem da produção total *P* de um sistema econômico como função

- da quantidade de trabalho *L*
- do capital investido *K*.

FUNÇÃO DE PRODUÇÃO DE COBB-DOUGLAS

Usaremos agora as derivadas parciais para mostrar como a forma particular desse modelo deriva de certas hipóteses que eles fizeram sobre a economia.

PRODUTIVIDADE MARGINAL DO TRABALHO

Se a função de produção é denotada por $P = P(L, K)$, a derivada parcial $\partial P/\partial L$ é a taxa de variação da produção em relação à quantidade de trabalho.

- Os economistas chamam isso de produção marginal em relação ao trabalho, ou *produtividade marginal do trabalho*.

PRODUTIVIDADE MARGINAL DO CAPITAL

Da mesma forma, a derivada parcial $\partial P/\partial K$ é a taxa de variação da produção em relação ao capital investido, e é denominada *produtividade marginal do capital*.

HIPÓTESES DE COBB-DOUGLAS

Nesses termos, as hipóteses feitas por Cobb e Douglas podem ser enunciadas da seguinte forma:

i. Se ou o trabalho ou o capital se anulam, o mesmo acontece com a produção.

ii. A produtividade marginal do trabalho é proporcional à quantidade de produção por unidade de trabalho.

iii. A produtividade marginal do capital é proporcional à quantidade de produção por unidade de capital.

HIPÓTESE COBB-DOUGLAS ii

Como a produção por unidade de trabalho é *P/L*, a hipótese (ii) diz

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$$

para alguma constante *α*.

HIPÓTESE COBB-DOUGLAS ii   Equação 5

Se mantivermos K constante ($K = K_0$), então essa equação diferencial parcial se transforma na equação diferencial ordinária:

$$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

HIPÓTESE COBB-DOUGLAS ii Equação 6

Se resolvermos essa equação diferencial separável pelos métodos da Seção 9.3, obteremos

$$P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$$

- Observe que escrevemos a constante C_1 como função de K_0 porque ela pode depender do valor de K_0.

HIPÓTESE COBB-DOUGLAS iii

Analogamente, a hipótese (iii) diz que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

HIPÓTESE COBB-DOUGLAS iii Equação 7

Podemos resolver essa equação diferencial obtendo

$$P(L_0, K) = C_2(L_0)K^\beta$$

HIPÓTESE COBB-DOUGLAS Equação 8

Comparando as Equações 6 e 7, temos

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta}$$

onde b é uma constante independente de L e de K.

- A hipótese (i) mostra que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$

HIPÓTESES DE COBB-DOUGLAS

Observe que, pela Equação 8, se o trabalho e o capital são ambos aumentados por um fator *m*, temos

$$\begin{aligned} P(mL, mK) &= b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} \\ &= m^{\alpha+\beta} b L^{\alpha} K^{\beta} \\ &= m^{\alpha+\beta} P(L, K) \end{aligned}$$

HIPÓTESES DE COBB-DOUGLAS

Se $\alpha + \beta = 1$, então

$$P(mL, mK) = mP(L, K)$$

- O que significa que a produção também é aumentada pelo fator *m*.

HIPÓTESES DE COBB-DOUGLAS

Essa é a razão pela qual Cobb e Douglas supuseram que $\alpha + \beta = 1$ e, portanto,

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

- Essa é a função de produção de Cobb-Douglas, discutida na Seção 14.1.