Derivadas Parciais

Capítulo 14

14.2

Limites e Continuidade

Nesta seção, aprenderemos sobre:

Limites e continuidade de vários tipos de funções.

LIMITES E CONTINUIDADE

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

quando *x* e *y* se aproximam de 0 [e, portanto, o ponto (*x*, *y*) se aproxima da origem].

LIMITES E CONTINUIDADE

As tabelas a seguir mostram valores de $f(x, y)$ e $g(x, y)$, com precisão de três casas decimais, para pontos (x, y) próximos da origem.

Essa tabela mostra valores de *f*(*x*, *y*).

TABELA 1 Valores de $f(x, y)$

x \ y	−1,0	−0,5	−0,2	0	0,2	0,5	1,0
−1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455
−0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
−0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0	0,841	0,990	1,000		1,000	0,990	0,841
0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455

Essa tabela mostra valores de $g(x, y)$.

TABELA 2 Valores de $g(x, y)$

x \ y	−1,0	−0,5	−0,2	0	0,2	0,5	1,0
−1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000
−0,5	−0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	−0,600
−0,2	−0,923	−0,724	0,000	1,000	0,000	−0,724	−0,923
0	−1,000	−1,000	−1,000		−1,000	−1,000	−1,000
0,2	−0,923	−0,724	0,000	1,000	0,000	−0,724	−0,923
0,5	−0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	−0,600
1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000

Observe que nenhuma das funções está definida na origem.

- Parece que, quando (x, y) se aproxima de (0, 0), os valores de f (x, y) se aproximam de 1, ao passo que os valores de g(x, y) não se aproximam de valor algum.

LIMITES E CONTINUIDADE

Essa nossa observação baseada em evidências numéricas está correta, e podemos escrever

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

não existe.

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

para indicar que:

- Os valores de $f(x, y)$ se aproximam do número L quando o ponto (x, y) se aproxima do ponto (a, b) ao longo de qualquer caminho contido no domínio da função f.

Em outras palavras, podemos tornar os valores de $f(x, y)$ tão próximos de L quanto quisermos tomando pontos (x, y) suficientemente próximos do ponto (a, b), mas não iguais a (a, b).

- Uma definição mais precisa é a seguinte:

Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b).

Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b) é** L.

Definição 1

Escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

se:

- Para todo número $\varepsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que, se

$$(x, y) \in D \quad \text{e} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad \text{então} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Outras notações para o limite da Definição 1 são

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = L \qquad \text{e} \qquad f(x, y) \to L \text{ quando } (x, y) \to (a, b)$$

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Observe que:

- $|\, f(x, y) - L \,|$ corresponde à distância entre os números *f* (*x*, *y*) e *L*;

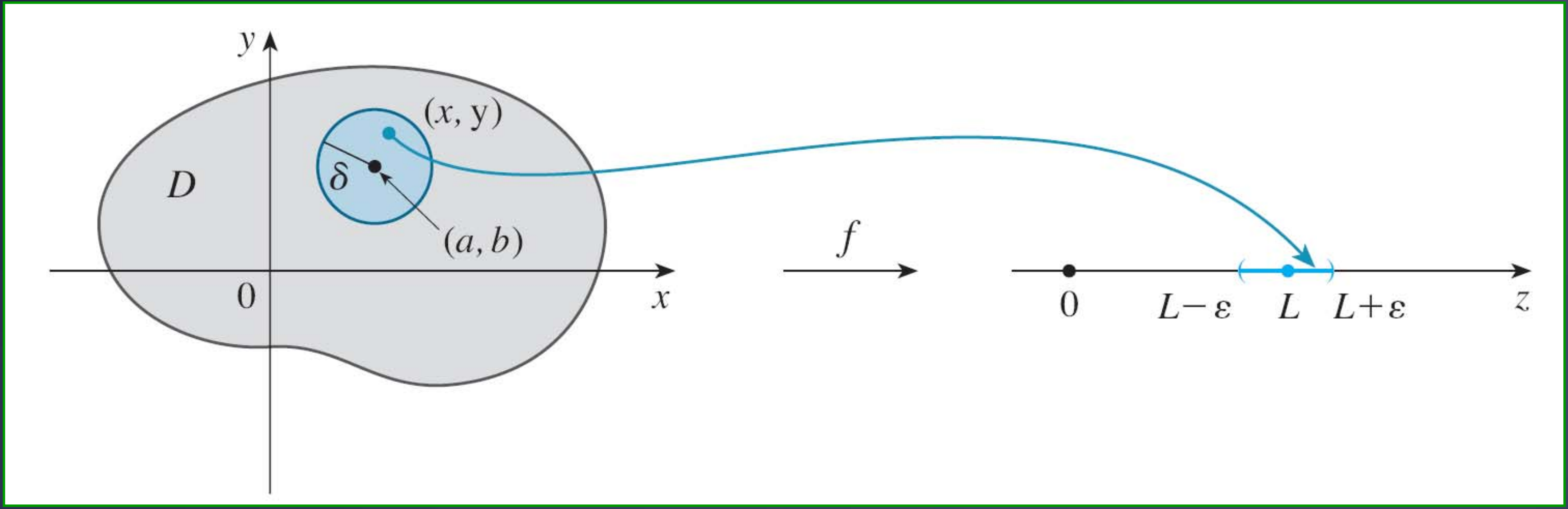
- $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ é a distância entre o ponto (*x*, *y*) e o ponto (*a*, *b*).

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Assim, a Definição 1 diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena se tomarmos a distância de (x, y) a (a, b) suficientemente pequena (mas não nula).

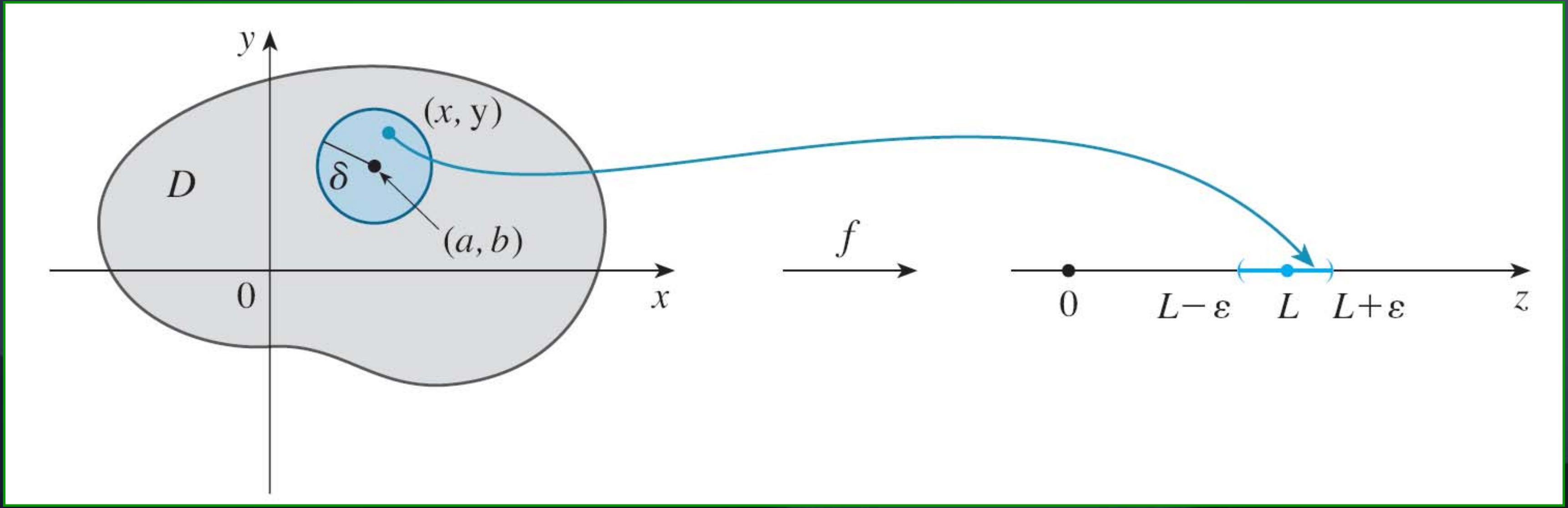
LIMITE DE UMA FUNÇÃO

A figura ilustra a Definição 1 por meio de um diagrama de setas.

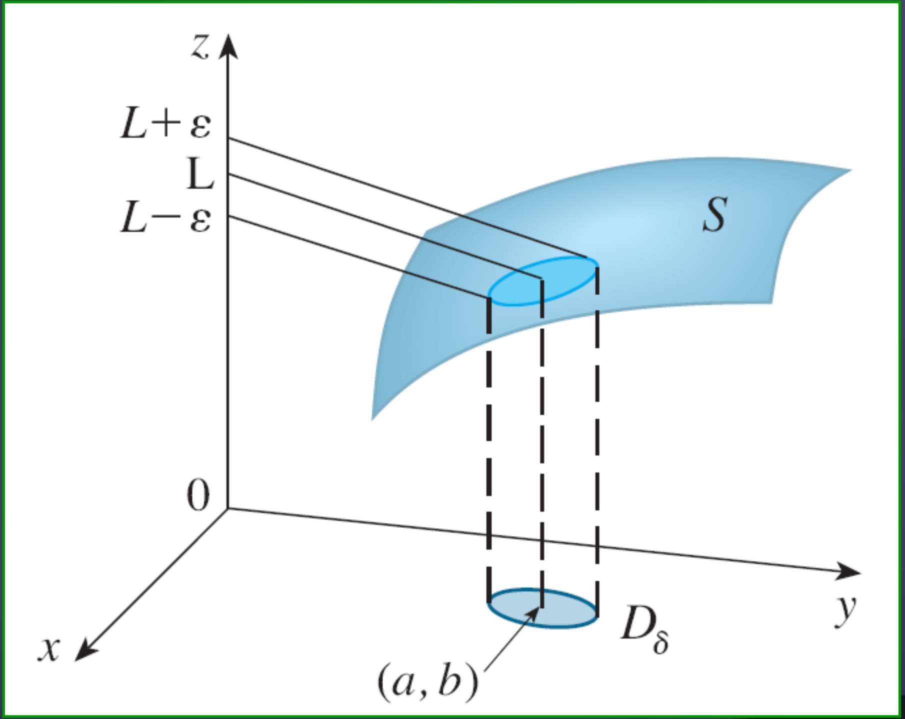


LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Se nos for dado um pequeno intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ em torno de L, então podemos determinar uma bola aberta D_δ com centro em (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que f leve todos os pontos de D_δ [exceto possivelmente (a, b)] no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.



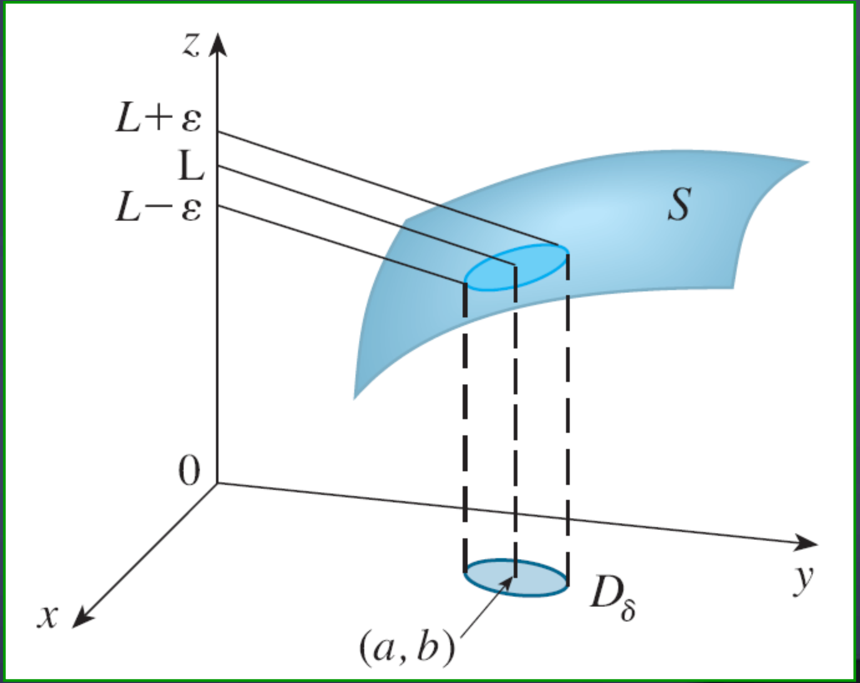
Outra ilustração da Definição 1 é dada na figura, onde a superfície *S* representa o gráfico de *f*.



LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Se $\varepsilon > 0$ é dado, podemos achar $\delta > 0$ tal que, se (x, y) pertence a bola aberta D_δ e $(x, y) \neq (a, b)$, então

- sua imagem em S estará entre os planos horizontais $z = L - \varepsilon$ e $z = L + \varepsilon$.



FUNÇÕES DE UMA ÚNICA VARIÁVEL

Para as funções de uma única variável, quando fazemos *x* tender a *a*, só existem duas direções possíveis de aproximação: pela esquerda ou pela direita.

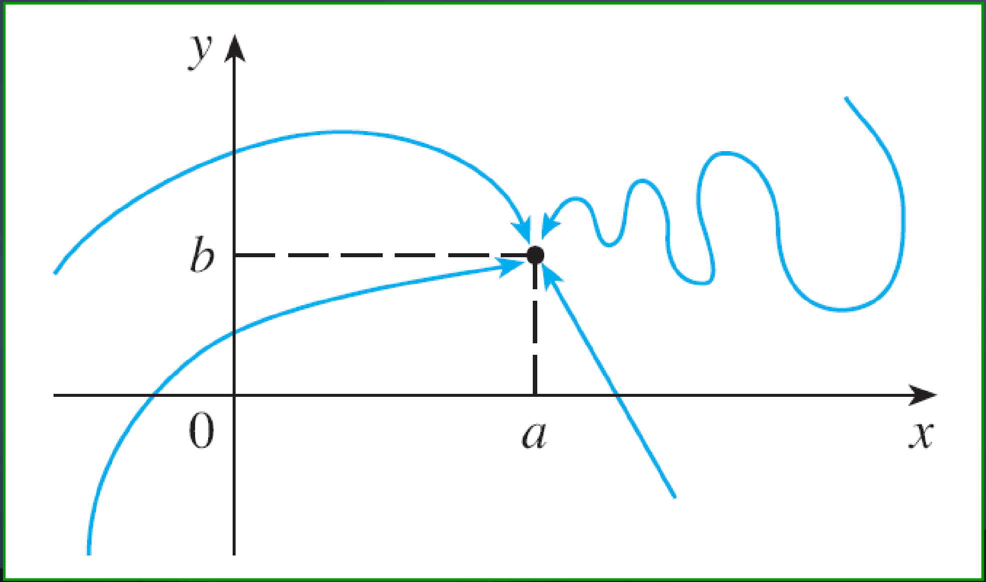
- Lembremos a partir do Capítulo 2, no Volume I, que, se $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$, então $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples.

FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Isso porque existem infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (a, b) por uma quantidade infinita de direções e de qualquer maneira que se queira, bastando que (x, y) se mantenha no domínio de f.



LIMITE DE UMA FUNÇÃO

A Definição 1 diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena tomando uma distância de (x, y) a (a, b) suficientemente pequena (mas não nula).

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

A definição refere-se somente à *distância* entre (x, y) e (a, b); não se refere à direção de aproximação.

Portanto, se o limite existe, f (x, y) deve se aproximar do mesmo valor-limite, independentemente do modo como (x, y) se aproxima de (a, b).

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Assim, se acharmos dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais *f* (*x*, *y*) tenha limites diferentes, segue então que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Se

- $f(x, y) \to L_1$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_1

e

- $f(x, y) \to L_2$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_2,

com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ não existe.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO EXEMPLO 1

Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

- Seja $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$.

Vamos primeiro nos aproximar de (0, 0) ao longo do eixo *x.*

- Tomando, $y = 0$ temos $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todo $x \neq 0$.
- Logo, $f(x, y) \to 1$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo do eixo x.

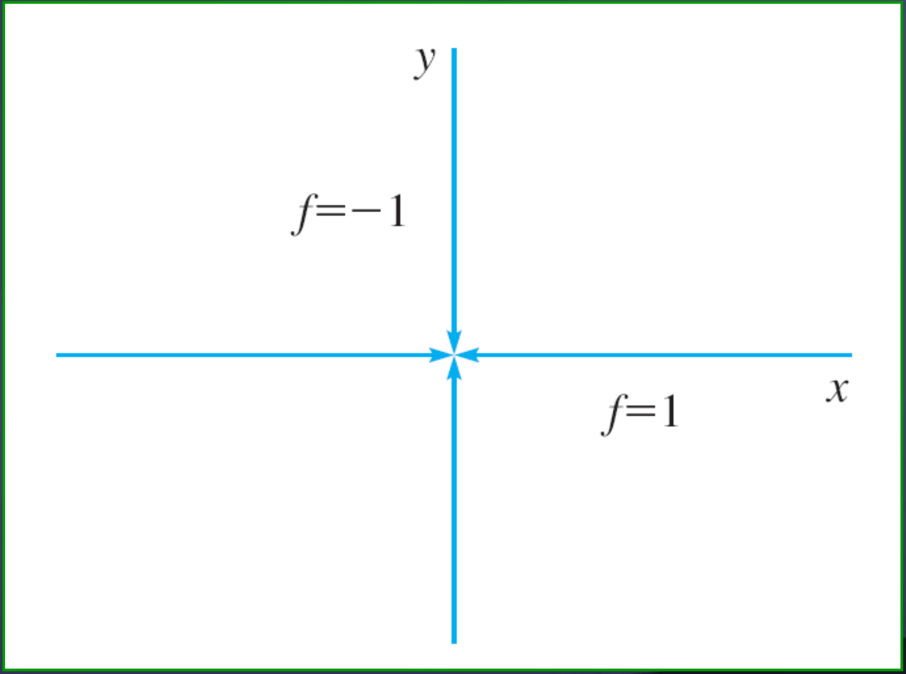
LIMITE DE UMA FUNÇÃO — EXEMPLO 1

Agora, vamos nos aproximar ao longo do eixo *y*, colocando $x = 0$.

- Assim, $f(0, y) = -y^2/y^2 = -1$ para todo $y \neq 0$.
- Logo, $f(x, y) \to -1$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo do eixo y.

Como *f* tem dois limites diferentes ao longo de duas retas diferentes, o limite não existe.

- Isso confirma a conjectura que fizemos com base na evidência numérica no início desta seção.



LIMITE DE UMA FUNÇÃO EXEMPLO 2

Se $$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

será que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe?

Se $y = 0$, temos $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$.

- Portanto,

  $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo do eixo x.

Se $x = 0$, então $f(0, y) = 0/y^2 = 0$.

- Assim,

  $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo do eixo y.

Apesar de termos encontrado valores idênticos ao longo dos eixos, não podemos afirmar que o limite exista e seja 0.

Vamos agora nos aproximar de (0, 0) ao longo de outra reta; por exemplo, $y = x$.

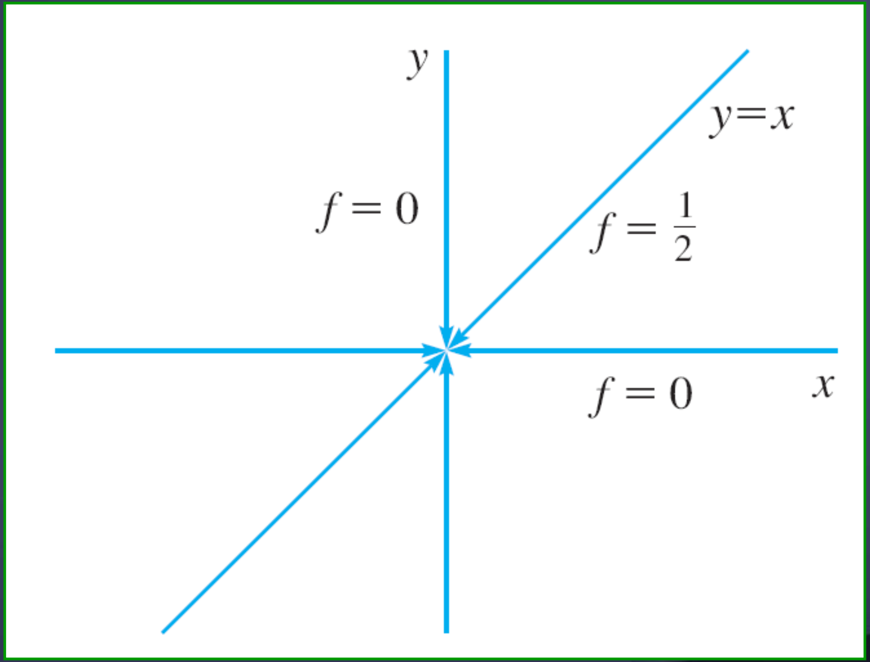
- Para todo $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

- Logo,

$$\boxed{f(x, y) \to \tfrac{1}{2} \qquad \text{quando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo de } y = x}$$

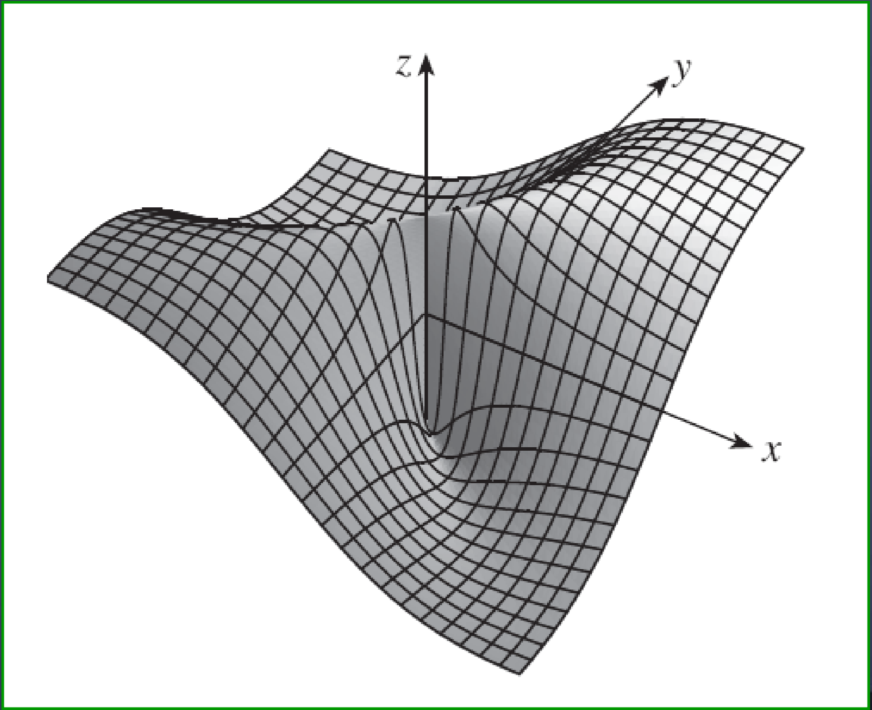
Como obtivemos valores diferentes para o limite ao longo de caminhos diferentes, podemos afirmar que o limite dado não existe.



LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Esta figura nos dá uma ideia do que acontece no Exemplo 2.

- A cumeeira que ocorre acima da reta $y = x$ corresponde ao fato de que $f(x, y) = ½$ para todos os pontos (x, y) dessa reta, exceto na origem.



Se

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

será que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe?

LIMITE DE UMA FUNÇÃO EXEMPLO 3

Considerando a solução do Exemplo 2, vamos tentar economizar tempo fazendo $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de uma reta não vertical que passa pela origem.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO EXEMPLO 3

Tomemos, $y = mx$, onde m é a inclinação da reta e

$$f(x,y) = f(x,mx)$$

$$= \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4}$$

$$= \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4}$$

$$= \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$

Portanto,

$f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de $y = mx$

- Logo, *f* tem o mesmo limite ao longo de qualquer reta não vertical que passe pela origem.

Mas isso ainda não garante que o limite seja 0, pois, se tomarmos agora

$(x, y) \to (0, 0)$ ao longo da parábola $x = y^2$

teremos:

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

- E assim,

$f(x, y) \to ½$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de $x = y^2$

Como caminhos diferentes levaram a resultados diferentes, o limite não existe.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Vamos agora olhar o caso em que o limite *existe*.

Como para a função de uma única variável, o cálculo do limite de funções com duas variáveis pode ser muito simplificado usando-se as propriedades dos limites.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

As Propriedades do Limite listadas na Seção 2.3 do Volume I podem ser estendidas para as funções de duas variáveis.

Por exemplo,

- o limite da soma é a soma dos limites;
- o limite do produto é o produto dos limites.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO Equação 2

Em particular, as seguintes equações são verdadeiras:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c$$

O Teorema do Confronto também vale.

Determine, se existir,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Como no Exemplo 3, podemos mostrar que o limite ao longo de uma reta qualquer que passa pela origem é 0.

- Isso não demonstra que o limite seja igual a 0.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO EXEMPLO 4

Mas ao longo das parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ também obtemos o limite 0.

- Isso nos leva a suspeitar que o limite exista e seja igual a 0.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO — EXEMPLO 4

Seja $\varepsilon > 0$.

Queremos achar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{então} \quad \left| \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

ou seja,

$$\text{se} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{então} \quad \frac{3x^2 |y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

Mas, $x^2 \leq x^2 + y^2$ uma vez que $y^2 \geq 0$

Logo, $x^2/(x^2 + y^2) \leq 1$ e portanto

$$\frac{3x^2\,|\,y\,|}{x^2+y^2} \leq 3\,|\,y\,| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2}$$

Então, se escolhermos $\delta = \varepsilon/3$ e fizermos $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ teremos:

$$\left| \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

$$= \varepsilon$$

Logo, pela Definição 1,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

Lembremo-nos de que o cálculo de limites de funções *contínuas* de uma única variável é fácil.

- Ele pode ser obtido por substituição direta.

- Isso porque, pela definição de função contínua,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

CENGAGE Learning™

CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Funções contínuas de duas variáveis também são definidas pela propriedade da substituição direta.

Definição 2

Uma função *f* de duas variáveis é dita **contínua em** (*a*, *b*) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Dizemos que *f* é **contínua em** *D* se *f* for contínua em todo ponto (*a*, *b*) de *D*.

CONTINUIDADE

O significado intuitivo de continuidade é que, se o ponto (x, y) varia de uma pequena quantidade, o valor de $f(x, y)$ variará de uma pequena quantidade.

- Isso quer dizer que a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou rupturas.

CONTINUIDADE

Usando as propriedades de limites, podemos ver que soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas são contínuos em seus domínios.

- Vamos usar esse fato para dar exemplos de funções contínuas.

POLINOMIAL

Uma **função polinomial de duas variáveis** (ou simplesmente polinômio) é uma soma de termos da forma $cx^m y^n$, onde:

- c é uma constante
- m e n são números inteiros não negativos.

FUNÇÃO RACIONAL VS. POLINOMIAL

Uma **função racional** é uma razão de polinômios. Por exemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

é um polinômio, ao passo que

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

é uma função racional.

CONTINUIDADE

Os limites em (2) mostram que as funções

$$f(x, y) = x, \; g(x, y) = y, \; h(x, y) = c$$

são contínuas.

POLINÔMIOS CONTÍNUOS

Como qualquer polinômio pode ser obtido a partir das funções *f*, *g* e *h* por multiplicação e adição, segue que *todos os polinômios são funções contínuas em* R^2.

FUNÇÕES RACIONAIS CONTÍNUAS

Da mesma forma, qualquer função racional é contínua em seu domínio, porque ela é o quociente de funções contínuas.

Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$$

- $f(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ é um polinômio, logo, ela é contínua em qualquer lugar.

- Portanto, podemos calcular seu limite pela substituição direta:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$$

$$= 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2$$

$$= 11$$

Onde a função

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

é contínua?

CONTINUIDADE

EXEMPLO 6

A função *f* é descontínua em (0, 0), pois ela não está definida nesse ponto.

Como *f* é uma função racional, ela é contínua em seu domínio, o que corresponde ao conjunto

$$D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

Seja

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Aqui *g* está definida em (0, 0).
- Mas ainda assim *g* é descontínua em 0, porque

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ não existe (veja o Exemplo 1).

CONTINUIDADE EXEMPLO 8

Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Sabemos que f é contínua para $(x, y) \neq (0, 0)$ uma vez que ela é uma função racional definida nessa região.

Do Exemplo 4, temos que

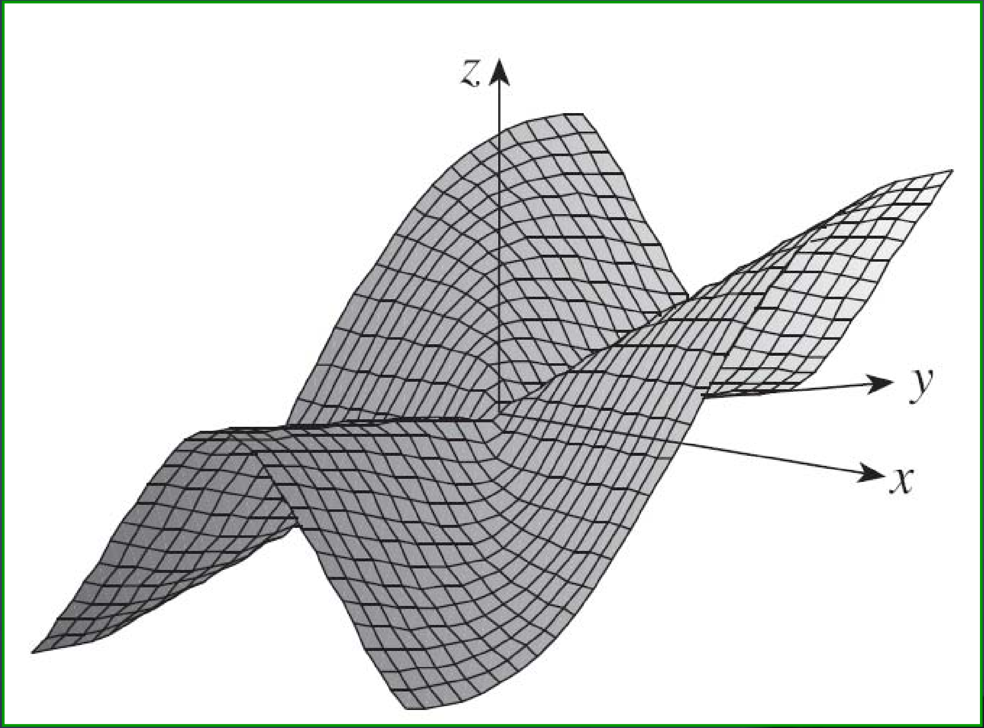
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$= 0 = f(0,0)$$

Portanto, *f* é contínua em (0, 0), e, consequentemente, contínua em R².

CONTINUIDADE

Veja o gráfico da função contínua do Exemplo 8.



COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Como para as funções de uma variável, a composição é outra maneira de combinar funções contínuas para obter outra também contínua.

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

De fato, pode ser mostrado que, se f é uma função contínua de duas variáveis e g é uma função contínua de uma única variável definida na imagem de f, a função composta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ também é contínua.

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES EXEMPLO 9

Onde a função $h(x, y) = \text{arctg}(y/x)$ é contínua?

- A função $f(x, y) = y/x$ é racional e, desse modo, contínua em todo lugar, exceto sobre a reta $x = 0$.

- A função $g(t) = \text{arctg}\ t$ é contínua em qualquer lugar.

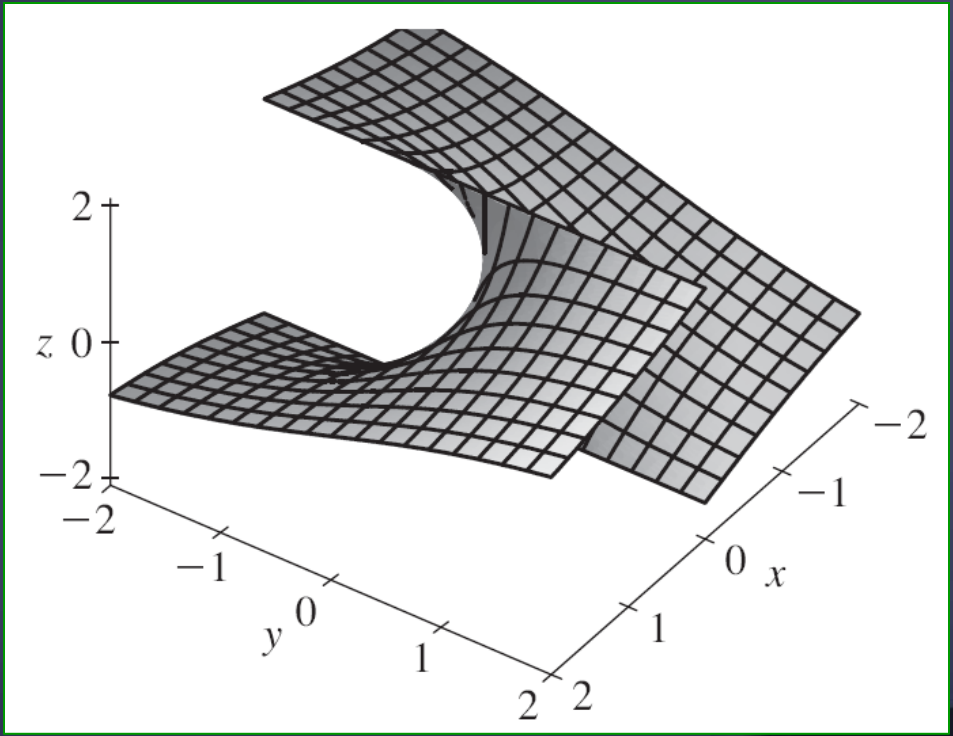
- Logo, a função composta

$$g(f(x, y)) = \text{arctg}(y, x) = h(x, y)$$

é contínua, exceto onde $x = 0$.

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES EXEMPLO 9

O desenho dessa figura mostra a ruptura existente no gráfico da função *h* acima do eixo *y*.



FUNÇÕES DE TRÊS OU MAIS VARIÁVEIS

Tudo o que fizemos até aqui pode ser estendido para as funções com três ou mais variáveis.

FUNÇÕES DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

A notação

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) = L$$

significa que os valores de $f(x, y, z)$ se aproximam do número L quando o ponto (x, y, z) se aproxima do ponto (a, b, c) ao longo de um caminho qualquer no domínio de f.

FUNÇÕES DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

Como a distância entre os dois pontos (x, y, z) e (a, b, c) em R^3 é dada por

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

podemos escrever de forma precisa uma definição da seguinte forma:

FUNÇÕES DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

Para todo número $\varepsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

se (x, y, z) está no domínio de f e

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$$

então

$$|f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

FUNÇÕES DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

A função *f* é **contínua** em (*a*, *b*, *c*) se

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$$

FUNÇÕES DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

Por exemplo, a função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

é uma função racional em três variáveis.

Portanto é contínua em todo ponto de R^3, exceto onde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

FUNÇÕES DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

Ou seja, é descontínua na esfera de centro na origem e raio 1.

FUNÇÕES DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

Se usarmos a notação vetorial introduzida no fim da Seção 14.1, poderemos escrever as definições de limite para as funções de duas ou três variáveis de uma forma compacta, como a seguir.

Equação 5

Se f é definida em um subconjunto D de R^n,

então $\lim_{x \to a} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo

número $\varepsilon > 0$, existe um número

correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\boxed{\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \text{ então } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon}$$

FUNÇÕES DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

Se $n = 1$, então $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{a} = a$

- Então, a Equação 5 é exatamente a definição do limite para as funções de uma única variável.

FUNÇÕES DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

Se n = 2, temos

$$\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$$

$$\mathbf{a} = \langle a, b \rangle$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

- Então, a Equação 5 se torna a Definição 1.

FUNÇÕES DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

Se $n = 3$, então

$$\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \langle a, b, c \rangle$$

- Então, a Equação 5 é a definição de limite de uma função de três variáveis.

FUNÇÕES DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

Em cada caso, a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$