Mecânica Estatística 2024/1 – PPGFis UFPel
Prof. José Rafael Bordin
Lista I – Termodinâmica
Resolva os exercícios **DETALHADAMENTE**.
Lista a ser entregue em aula ou através do e-mail jrbordin@ufpel.edu.br até o dia 24/05/2024.

1 – Prove a equivalência entre os enunciados de Kelvin e de Clausius para a Segunda Lei.

2 – Faça um ciclo de Carnot com um gás ideal que satisfaz $PV = Nk_b\Theta$, onde Θ é escala de temperatura do gás ideal, e cuja energia interna é função somente de Θ – entretanto, não podes assumir que $E \propto \Theta$ – para mostrar a equivalência entre Θ e a escala termodinâmica T.

3 – Considere um sistema onde a energia pode variar na forma de calor ou na forma de trabalho mecânico, $dE = đQ - đW$. Mostre que a equação de estado do gás ideal implica em $E = E(T)$. Qual seria a equação mais geral possível consistente com uma energia interna que dependa somente da temperatura? Considere agora um modelo que inclua volume excluído e interações - como o de van der Walls. Qual a dependência da energia interna? E de C_V?

4 – Um gás de caroço duro – sem interações, mas com volume excluído – pode ser descrito pela equação de estado $P(V - Nb) = Nk_BT$, onde b é o volume de cada partícula. Para este sistema:

(a) Encontre as relações de Maxwell envolvendo $\partial S/\partial V|_{T,N}$.

(b) Mostre que $E = E(T, N)$.

(c) Mostre que $\gamma \equiv C_P/C_V = 1 + Nk_b/C_V$.

(d) Mostre que uma transformação adiabática deste gás satisfaz $P(V - Nb)^\gamma =$ constante.

5 – As estrelas e planetas – incluindo o sistema solar – se originaram de nuvens de gás diluido de partículas, separadas o suficiente de outras nuvens de poeira para serem consideradas como sistemas isolados. Sob a ação da gravidade, as partículas se uniram para formar as estrelas e os planetas. Apesar de sabermos que a resposta para questões envolvendo a Vida, o Universo e tudo o mais é 42, responda com base no conceito de Entropia e na Segunda Lei:

(a) O movimento e a ordenação dos planetas é muito mais organizada que a nuvem de poeira que originou eles. Isso é uma violação da Segunda Lei?

(b) Os processos nucleares nas estrelas convertem prótons em elementos muito mais massivos, como carbono. Esta organização leva a uma redução da entropia?

(c) A evolução da vida e da inteligência exige ainda mais organização. Como foi possível surgir a vida na Terra sem violar a Segunda Lei.

6 – Quando existe uma interface entre dois fluidos – como água e ar ou líquido e sólido – as propriedades desta interface podem ser descritas pela função de

estado tensão superficial $\mathcal{S}$. Ela é definida em termos do trabalho necessário para aumentar a área superficial em dA através de $đW = \mathcal{S}dA$.

(a) Considerando que o trabalho realizado contra uma tensão superficial é uma variação infinitesimal no raio, mostre que a pressão dentro de uma gota esférica de água de raio R é maior que a pressão externa por um fator de $2\mathcal{S}/R$. Qual a pressão do ar dentro de uma bolha de sabão de raio R?

(b) Surfactantes são moléculas anfifílicas (com uma cabeça polar hidrofílica e uma cauda carbônica hidrofóbica) que, quando em solução aquosa, preferem se espalhar na interface água-ar. Assim, surfactantes atuam como tensoativos, alterando a tensão superficial. A tensão superficial água-ar é reduzida drasticamente por Nk_bT/A, onde N é o número de moléculas de surfactantes numa superfície A. Explique esse resultado qualitativamente. Dica: considere os surfactantes como um gás bidimensional.

(c) Observações mais cuidadosas mostram que, se a concentração de surfactante é alta,

$$\left.\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial A}\right|_T = \frac{Nk_BT}{(A-Nb)^2} - \frac{2a}{A}\left(\frac{N}{A}\right)^2$$

e

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \mathcal{S}}\right|_A = -\frac{A-Nb}{Nk_b},$$

onde a e b são constantes. Obtenha a expressão para $\mathcal{S}(A,T)$ e explique qualitativamente a origem das correções descritas por a e b. Obtenha a expressão para $C_\mathcal{S} - C_A$.

7 – A supercondutividade foi originalmente observada em metais, quando alguns metais são resfriados a baixas temperaturas T e campo magnético B. Os calores específicos destas duas fases, no limite de campo magnético nulo, são

$$\begin{cases} C_s(T) = V\alpha T^3 & \text{fase supercondutora} \\ C_n(T) = V[\beta T^3 + \gamma T] & \text{fase normal} \end{cases} \quad (0)$$

(a) Partindo da terceira lei, calcule as entropias em cada fase a campo nulo.

(b) Obtenha a temperatura de transição T_C entre a fase normal e a fase supercondutora como função de α, β e γ. Leve em consideração o resultado experimental de que não há calor latente nesta transição.

(c) A temperatura nula, os elétrons no supercondutor formam pares de Cooper ligados. Isto diminui a energia interna em $V\Delta$, ou seja, $E_n(T=0) = E_0$ e $E_s(T=0) = E_0 - E\Delta$ para o metal e o supercondutor. Calcule a energia interna de ambas as fases no limite $T \to \infty$.

(d) Obtenha o gap de energia Δ em termos de α, β e γ. Para isso, compare as energias livres de Gibbs de cada fase.

(e) A existência de um campo magético B resulta em um trabalho magnético $dE = TdS + BdM + \mu dN$, onde M é a magnetização. A fase supercondutora é um diamagneto perfeito, expulsando o campo magnético do seu interior, tal que $M_s = -VB/(4\pi)$ – nas unidades apropriadas. Por outro lado, a fase metálica normal é não magnética, com $M_n = 0$. Com isto (e o calculado anteriormente), mostre que a fase supercondutora torna-se normal para campos magnéticos maiores que

$$B_c(T) = B_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_C^2}\right),$$

obtendo também a expressão para B_0.

8 – Experimentos indicam que, para um range finito de temperaturas, um deslocamento x em um filamento requer uma força

$$J = ax - bT + cTx$$

onde a, b, e c são constantes. Ainda, sua capacidade calorífica a deslocamento constante é proporcional a T, ou seja, $C_x = A(x)T$.

(a) Use a relação de Maxwell apropriada para calcular $(\partial S/\partial x)_T$.

(b) Mostre que, de fato, A é independente de x.

(c) Obtenha a expressão pra $S(T, x)$. Assuma que $S_0 = S(0, 0)$.

(d) Calcule o calor específico a tensão constante, ou seja, $C_J = T(\partial S/\partial T)_J$ em função de T e J.