**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**
**INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA - IFM**
**2º Semestre de 2020 (2021)**

# Física

Arlan Ferreira

# Sumário

## Unidade I – Conversão de unidades

| | Prefixo | Símbolo | Potência de 10 |
|---|---|---|---|
| Múltiplo | *tera* | $T$ | $10^{12}$ |
| | *giga* | $G$ | $10^{9}$ |
| | *mega* | $M$ | $10^{6}$ |
| | *quilo* | $k$ | $10^{3}$ |
| Submúltiplo | *centi* | $c$ | $10^{-2}$ |
| | *mili* | $m$ | $10^{-3}$ |
| | *micro* | $\mu$ | $10^{-6}$ |
| | *nano* | $n$ | $10^{-9}$ |
| | *pico* | $p$ | $10^{-12}$ |
| | *femto* | $f$ | $10^{-15}$ |

**Tabela 1** - Múltiplos e Submúltiplos de potência de 10.

**Exemplos**

| | | |
|---|---|---|
| comprimento: $1mm = 1 \cdot \underbrace{10^{-3}}_{m} m$ | comprimento: $1cm = \underbrace{10^{-2}}_{c} m$ | tamanho: $128MB = 128 \cdot \underbrace{10^{6}}_{M} B$ |
| comprimento: $5\mu m = 5 \cdot \underbrace{10^{-6}}_{\mu} m$ | comprimento: $1km = \underbrace{1000}_{k} m$ | tamanho: $500GB = 500 \cdot \underbrace{10^{9}}_{G} B$ |
| tempo: $8ns = 8 \cdot \underbrace{10^{-9}}_{n} s$ | massa: $1kg = \underbrace{1000}_{k} g$ | tamanho: $2TB = 2 \cdot \underbrace{10^{12}}_{T} B$ |

| Unidade de comprimento | | |
|---|---|---|
| 1km | 1000 m | |
| 1m | 100 cm | |
| 1dm | 10 cm | |
| pol | 2,54 cm | |
| pé | 30,48 cm | |
| 1 milha | 1609 m | |
| **Unidade de Área** | | |
| 1ha (hectare) | 10000m$^2$ | |
| 1km$^2$ | 10$^6$m$^2$ | |
| 1m$^2$ | 10000cm$^2$ | |
| **Unidade de Volume** | | |
| 1m$^3$ | 1000L | |
| 1dm$^3$ | 1 L | |
| 1000cm$^3$ | 1 L | |
| 1galão | 3,788 L | |
| **Unidade de Massa** | | |
| 1000kg | 1 ton | |
| 1kg | 1000g | |
| 1 onça | 28,35 g | |
| 1 libra | 453,6 g | |
| **Unidade de Potência** | | |
| 1cv | 735,5 W | |
| 1HP | 745,7 W | |

**Tabela 2** - Alguns valores de conversão.

| Nome | Maiúscula | Minúscula | Nome | Maiúscula | Minúscula |
|---|---|---|---|---|---|
| **Alfa** | $\mathrm{A}$ | $\alpha$ | **Pi** | $\Pi$ | $\pi$ |
| **Beta** | $\mathrm{B}$ | $\beta$ | **Rô** | $\mathrm{P}$ | $\rho$ |
| **Gama** | $\Gamma$ | $\gamma$ | **Sigma** | $\Sigma$ | $\sigma$ |
| **Delta** | $\Delta$ | $\delta$ | **Fi** | $\Phi$ | $\varphi$ |
| **Teta** | $\Theta$ | $\theta$ | **Psi** | $\Psi$ | $\psi$ |
| **Lambda** | $\Lambda$ | $\lambda$ | **Ômega** | $\Omega$ | $\omega$ |
| **Mu** | $\mathrm{M}$ | $\mu$ | **Tau** | $\mathrm{T}$ | $\tau$ |

**Tabela 3 -** Letras Gregas Usuais.

| Sinal | Significado | Sinal | Significado |
|---|---|---|---|
| $=$ | igual a | $-$ | subtração |
| $>$ | maior que | $\div$ ou $/$ | divisão |
| $\geq$ | maior ou igual a | $\cdot$ ou $\times$ | multiplicação |
| $<$ | menor que | $\Rightarrow$ | implica que |
| $\leq$ | menor ou igual a | | |
| $\simeq$ ou $\approx$ | aproximadamente | | |
| $+$ | adição | | |

**Tabela 4 -** Sinais matemáticos e simbologias usadas.

## Sistema Internacional de Unidades (SIU)

O sistema Internacional de Unidades (SIU) veio para padronizar as unidades das grandezas físicas. A tabela abaixo mostra as sete grandezas elementares, tais que todas as outras unidades podem ser escritas como uma possível combinação dessas grandezas elementares. O termo elementar é para indicar que apenas '*um elemento*' é suficiente para descrever a grandeza.

| Grandeza Elementar | Unidade | Símbolo |
|---|---|---|
| [Comprimento]=L | metro | m |
| [Massa]=M | quilograma | kg |
| [Tempo]=T | segundo | s |
| [Temperatura absoluta] | kelvin | K |
| [Quantidade de substância] | mol | mol |
| [Corrente elétrica] | ampère | A |
| [Intensidade Luminosa] | candela | cd |

**Tabela 5 -** Unidades Elementares do SIU.

Exemplos de grandezas que não são elementares

a) Velocidade $[v]=m/s \Longrightarrow$ combinação de comprimento L (m) e tempo T (s).
b) Aceleração $[a]=m/s^2 \Longrightarrow$ combinação de comprimento L (m) e tempo $T^2$ ($s^2$).
c) Força $[F]=N$ (Newton)$=1kg\cdot m/s^2$, $\Longrightarrow$ combinação de massa M (kg), comprimento L (m) e tempo $T^2$ ($s^2$).
d) Energia $[E]=J\ (Joule)=kg\cdot m^2/s^2 \Longrightarrow$ combinação de massa M (kg), comprimento $L^2$ ($m^2$) e tempo $T^2$ ($s^2$).

Essas são as unidades definidas pelo SIU. No entanto, unidades de comprimento, tempo, área, volume, etc, já vinham sendo utilizadas há séculos por diferentes países. Por exemplo, uma unidade de volume que é muito comum nos EUA é o galão (1galao =3,785L). Devido a cada país utilizar seu próprio sistema de unidades, faz-se necessário converter as unidades de um sistema para outro.

## Conversão de Unidades

O método aqui apresentado é o chamado "conversão em cadeia". O método consiste em multiplicar a grandeza que se deseja converter por "1", pois ao multiplicarmos qualquer número por '*um*' não alteramos a igualdade. Quando se tem uma igualdade do tipo

$$a = b,$$

então, se dividirmos *a* por *b* (ou vice-versa), temos que $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right) = 1$, para todo $a \neq 0$.

Aqui vamos precisar relembrar algumas regras de potenciação.

**Regras para potenciação**

Nomenclatura: $(\text{base})^{\text{expoente}}$

$I)$ $\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$ (bases diferentes e expoentes iguais)

$II)$ $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ (bases iguais e expoentes diferentes)

$III)$ $\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}}$

$IV)$ $\boxed{\frac{1}{a} = a^{-1}}$ ou $\boxed{\frac{1}{a^{-1}} = a}$ para $a \neq 0$. E $\boxed{\frac{1}{a^n} = a^{-n}}$ ou $\boxed{\frac{1}{a^{-n}} = a^n} \Rightarrow \boxed{a^0 = 1}$

$V)$ $\boxed{a^n \div a^m = a^{n-m}}$

Para conversão de unidades, precisamos usar a regra (I): $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Exemplos

E.1) Converta *10km* para *cm* (dados: *100cm=1m* e *1000m=1km*).

Solução:

$$i)\, 100cm = 1m \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{100cm}{1m}\right) = \left(\frac{1m}{100cm}\right) = (1),$$

$$ii)\, 1000m = 1km \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1000m}{1km}\right) = \left(\frac{1km}{1000m}\right) = (1),$$

$$L = 10km \cdot (1) \cdot (1) = 10\cancel{km} \cdot \left(\frac{100cm}{1\cancel{m}}\right) \cdot \left(\frac{1000\cancel{m}}{1\cancel{km}}\right) = \boxed{1000000cm} = \boxed{10^6 cm}.$$

E.2) Converta *8km²* para *m²*.

Solução:

$$i)\, 1000m = 1km \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1000m}{1km}\right) = \left(\frac{1km}{1000m}\right) = (1),$$ agora eleve tudo ao quadrado

$$\left(\frac{1000m}{1km}\right)^2 = \left(\frac{1km}{1000m}\right)^2 = (1)^2,$$ reveja a regra I de potenciação,

$$A = 8km^2 \cdot (1)^2 = 8km^2 \cdot \left(\frac{1000m}{1km}\right)^2 = 8\cancel{km^2} \cdot \left(\frac{1000^2 m^2}{1^2 \cancel{km^2}}\right) = \boxed{8000000m^2} = \boxed{8 \cdot 10^6 m^2}.$$

E.3) Converta *1000cm³* para *m³*.

*Solução:*

$i)\, 100cm = 1m \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{100cm}{1m}\right) = \left(\dfrac{1m}{100cm}\right) = (1)$, agora eleve tudo ao cubo,

$\left(\dfrac{100cm}{1m}\right)^3 = \left(\dfrac{1m}{100cm}\right)^3 = (1)^3$, reveja a regra I de potenciação

$$V = 1000cm^3 \cdot (1)^3 = 1000cm^3 \cdot \left(\dfrac{1m}{100cm}\right)^3 = 1000\cancel{cm^3} \cdot \left(\dfrac{1^3 m^3}{100^3 \cancel{cm^3}}\right) = \boxed{10^{-3} m^3}.$$

**Exercícios**

| |
|---|
| a) $8m \xrightarrow{\text{converta para}} km$ |
| b) $70\dfrac{km}{h} \xrightarrow{\text{converta para}} \dfrac{m}{s}$ |
| c) $8\dfrac{km}{h \cdot \min} \xrightarrow{\text{converta para}} \dfrac{m}{s^2}$ |
| d) $1000cm^3 \xrightarrow{\text{converta para}} m^3$ |

## Operações com frações

**Adição (+) e subtração (-):** Fração é algo da forma $f = \dfrac{\text{numerador}}{\text{denominador}} = \dfrac{a}{b}$. Todo número pode ser considerado uma fração, por exemplo, o número 3 é equivalente a 3/1, o número 4 é equivalente a 8/2 ou 24/6 e assim por diante. Considere as frações: $f_1 = \dfrac{a_1}{b_1}$ *e* $f_2 = \dfrac{a_2}{b_2}$. A adição ou subtração entre frações é dada por:

$$f_1 \pm f_2 = \dfrac{a_1}{b_1} \pm \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{\dfrac{\cancel{b_1} \cdot b_2}{\cancel{b_1}} \cdot a_1 \pm \dfrac{b_1 \cdot \cancel{b_2}}{\cancel{b_2}} \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} = \boxed{\dfrac{b_2 \cdot a_1 \pm b_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}}$$

. Com essa relação, você não precisa mais se preocupar com o *MMC*, ele já está embutido.

Exemplos

**E.1)** Some ou subtraia as frações abaixo:

a) some $f_1$ com $f_2$: $f_1 = \dfrac{1}{2}$ e $f_2 = \dfrac{3}{4}$.

*Solução:* $f_1 + f_2 = \dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{b_2 \cdot a_1 + b_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} = \boxed{\dfrac{4 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \dfrac{4+6}{8} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}}$

b) some $f_1$ com $f_2$: $f_1 = \dfrac{5}{8}$ e $f_2 = \dfrac{2}{7}$.

*Solução:* $f_1 + f_2 = \dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{5}{8} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{b_2 \cdot a_1 + b_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} = \boxed{\dfrac{7 \cdot 5 + 8 \cdot 2}{8 \cdot 7} = \dfrac{51}{56}}$

c) subtraia $f_1$ - $f_2$: $f_1 = \dfrac{1}{8}$ e $f_2 = \dfrac{2}{7}$.

*Solução:* $f_1 - f_2 = \dfrac{a_1}{b_1} - \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{2}{7} = \dfrac{b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} = \boxed{\dfrac{7 \cdot 1 - 8 \cdot 2}{8 \cdot 7} = \dfrac{7-16}{56} = -\dfrac{9}{56}}$

d) subtraia $f_1$ - $f_2$: $f_1 = \dfrac{2}{3}$ e $f_2 = \dfrac{1}{5}$.

*Solução:* $f_1 - f_2 = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} = \boxed{\frac{5 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{10-3}{15} = \frac{7}{15}}$

**1)** Adicione ou subtraia as frações abaixo:

| | | |
|---|---|---|
| a) $f_1 = 5/6$ | $f_2 = 1/9$ | $f_1 + f_2 =$ |
| b) $f_1 = 7/2$ | $f_2 = 4/9$ | $f_1 - f_2 =$ |
| c) $f_1 = 1/6$ | $f_2 = 7/3$ | $f_1 + f_2 =$ |
| d) $f_1 = 5/6$ | $f_2 = 4$ | $f_1 - f_2 =$ |
| e) $f_1 = 4/9$ | $f_2 = 1$ | $f_1 + f_2 =$ |
| f) $f_1 = 5$ | $f_2 = 1/6$ | $f_1 + f_2 =$ |
| g) $f_1 = 2/3$ | $f_2 = 8/7$ | $f_1 - f_2 = \frac{2}{3} - \frac{8}{7} = \frac{7 \cdot 2 - 3 \cdot 8}{3 \cdot 7} = \frac{14-24}{21} = \frac{-10}{21}$ |
| h) $f_1 = 1/8$ | $f_2 = 5/9$ | $f_1 + f_2 =$ |
| i) $f_1 = 3/5$ | $f_2 = 3/8$ | $f_1 - f_2 =$ |
| j) $f_1 = 2/7$ | $f_2 = 2/3$ | $f_1 + f_2 =$ |
| l) $f_1 = 2/5$ | $f_2 = 3/7$ | $f_1 - f_2 =$ |
| m) $f_1 = 1/3$ | $f_2 = 6/9$ | $f_1 + f_2 =$ |

## Multiplicação

A regra é bem simples. Considere as frações: $f_1 = \frac{a_1}{b_1}$ e $f_2 = \frac{a_2}{b_2}$. A multiplicação é: $f_1 \cdot f_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \boxed{\frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}}$.

*Exemplos*

**a)** multiplique $f_1$ por $f_2$: $f_1 = \frac{1}{2}$ e $f_2 = \frac{3}{4}$. A multiplicação é: $f_1 \cdot f_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \boxed{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}}$.

**b)** multiplique $f_1$ por $f_2$: $f_1 = \frac{3}{2}$ e $f_2 = \frac{5}{8}$. A multiplicação é: $f_1 \cdot f_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \boxed{\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 8} = \frac{15}{16}}$.

**c)** multiplique $f_1$ por $f_2$: $f_1 = -\frac{4}{5}$ e $f_2 = \frac{8}{3}$. A multiplicação é: $f_1 \cdot f_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \boxed{\frac{-4 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{-32}{15}}$.

**d)** multiplique $f_1$ por $f_2$: $f_1 = \frac{1}{2}$ e $f_2 = 4$. A multiplicação é: $f_1 \cdot f_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \boxed{\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2}$.

**1)** Multiplique as frações abaixo:

| | | |
|---|---|---|
| a) $f_1 = 5/6$ | $f_2 = 1/9$ | $f_1 \cdot f_2 =$ |
| b) $f_1 = 7/2$ | $f_2 = 4/9$ | $f_1 \cdot f_2 =$ |

| | | |
|---|---|---|
| c) $f_1 = 1/6$ | $f_2 = 7/3$ | $f_1 \cdot f_2 =$ |
| d) $f_1 = 5/6$ | $f_2 = 4$ | $f_1 \cdot f_2 =$ |
| e) $f_1 = 4/9$ | $f_2 = 1$ | $f_1 \cdot f_2 =$ |
| f) $f_1 = 5$ | $f_2 = 1/6$ | $f_1 \cdot f_2 = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ |
| g) $f_1 = 2/3$ | $f_2 = 8/7$ | $f_1 \cdot f_2 =$ |
| h) $f_1 = 1/8$ | $f_2 = 5/9$ | $f_1 \cdot f_2 =$ |
| i) $f_1 = 3/5$ | $f_2 = 3/8$ | $f_1 \cdot f_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{40}$ |
| j) $f_1 = 2/7$ | $f_2 = 2/3$ | $f_1 \cdot f_2 =$ |
| l) $f_1 = 2/5$ | $f_2 = 3/7$ | $f_1 \cdot f_2 =$ |
| m) $f_1 = 1/3$ | $f_2 = 6/9$ | $f_1 \cdot f_2 =$ |

## Divisão

A regra para divisão é também bem simples: Para se dividir duas frações ($f_1$ e $f_2$), conserve a primeira e multiplique pelo inverso da segunda. Veja que $\frac{f_1}{f_2} = f_1 \cdot \frac{1}{f_2} = f_1 \cdot f_2^{-1}$.

Considere as frações: $f_1 = \frac{a_1}{b_1}$ e $f_2 = \frac{a_2}{b_2}$. A divisão é: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{a_1}{b_1}}{\frac{a_2}{b_2}} = \boxed{\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2}}$.

Exemplos:

a) divida $f_1$ por $f_2$ : $f_1 = \frac{1}{2}$ e $f_2 = \frac{3}{4}$. Solução: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}}$.

b) divida $f_1$ por $f_2$ : $f_1 = \frac{1}{3}$ e $f_2 = \frac{5}{4}$. Solução: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{4}} = \boxed{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}}$.

c) divida $f_1$ por $f_2$ : $f_1 = \frac{5}{2}$ e $f_2 = \frac{5}{8}$. Solução: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{8}} = \boxed{\frac{\cancel{5}}{2} \cdot \frac{8}{\cancel{5}} = \frac{8}{2} = 4}$.

d) divida $f_1$ por $f_2$ : $f_1 = \frac{1}{3}$ e $f_2 = \frac{9}{2}$. Solução: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{9}{2}} = \boxed{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}}$.

**1)** Divida as frações na tabela abaixo:

| | | |
|---|---|---|
| a) $f_1 = 5/6$ | $f_2 = 1/9$ | $f_1 \div f_2 = \dfrac{f_1}{f_2} =$ |
| b) $f_1 = 7/2$ | $f_2 = 4/9$ | $f_1 \div f_2 = \dfrac{f_1}{f_2} =$ |
| c) $f_1 = 1/6$ | $f_2 = 7/3$ | $f_1 \div f_2 = \dfrac{f_1}{f_2} =$ |
| d) $f_1 = 5/6$ | $f_2 = 4$ | $f_1 \div f_2 = \dfrac{f_1}{f_2} =$ |
| e) $f_1 = 4/9$ | $f_2 = 1$ | $f_1 \div f_2 = \dfrac{f_1}{f_2} =$ |
| f) $f_1 = 5$ | $f_2 = 1/6$ | $f_1 \div f_2 = \dfrac{f_1}{f_2} = 5 \cdot \dfrac{6}{1} = \dfrac{30}{1} = 30$ |
| g) $f_1 = 2/3$ | $f_2 = 8/7$ | $f_1 \div f_2 = \dfrac{f_1}{f_2} =$ |
| h) $f_1 = 1/8$ | $f_2 = 5/9$ | $f_1 \div f_2 = \dfrac{f_1}{f_2} =$ |
| i) $f_1 = 3/5$ | $f_2 = 3/8$ | $f_1 \div f_2 = \dfrac{f_1}{f_2} =$ |
| j) $f_1 = 2/7$ | $f_2 = 2/3$ | $f_1 \div f_2 = \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{\cancel{2}}{7} \cdot \dfrac{3}{\cancel{2}} = \dfrac{3}{7}$ |

## Equação do Primeiro e Segundo Grau

- Equação do Primeiro Grau é da forma: $a \cdot x + b = 0$, onde existe apenas <u>um</u> valor para a variável $x$ *(raiz da equação)*: $\boxed{x = \dfrac{-b}{a}}$ $(a \neq 0)$.

*Exemplos*

1) Resolver as equações abaixo para $x$.

a) $5 \cdot x + 10 = 0, \overset{isolar\ x}{\Rightarrow} 5 \cdot x = -10 \Rightarrow x = -10/5 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

b) $2 \cdot x - 8 = 0, \overset{isolar\ x}{\Rightarrow} 2 \cdot x = 8 \Rightarrow x = 8/2 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

c) $2 \cdot x - 10 = 8, \overset{isolar\ x}{\Rightarrow} 2 \cdot x = 8 + 10 \Rightarrow 2 \cdot x = 18 \Rightarrow x = 18/2 \Rightarrow \boxed{x = 9}$

d) $\dfrac{3}{2} \cdot x - 14 = x, \overset{isolar\ x}{\Rightarrow} \dfrac{3}{2} \cdot x = x + 14 \Rightarrow \dfrac{3}{2} \cdot x - x = 14 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot x = 14 \Rightarrow \boxed{x = 28}$

Ordem de precedência dos operadores (+, -, ÷ e ×). A operação deve ser executada da esquerda pra direita, sendo que a prioridade é executar primeiro a multiplicação e divisão ( × e ÷). Por último, efetuar a adição ou subtração (+ ou -). O parêntese () é usado para quebrar essa prioridade. Exemplos:

*i*) $(6 + 8x) \div 5 + x = 0 \Rightarrow \dfrac{6}{5} + \dfrac{8x}{5} + x = 0$

*ii*) $6 + 8x \div 5 + x = 0 \Rightarrow 6 + \dfrac{8x}{5} + x = 0$

*iii*) $3/2x + 8 = 5/8x \Rightarrow \dfrac{3}{2}x + 8 = \dfrac{5}{8}x$

*iv*) $3/(2x) + 8 = 5/8x \Rightarrow \dfrac{3}{2 \cdot x} + 8 = \dfrac{5}{8}x$

***Exercícios***

| | |
|---|---|
| *1) 2·x-8=0* | *x=4* |
| | |

| | |
|---|---|
| 2) $8\cdot x-(3+2x)=0$ | $x=1/2$ |
| | |
| 3) $8\cdot x-3+2x=0$ | $x=3/10$ |
| | |
| 4) $-x+5=4\cdot x+9$ | $x=-4/5$ |
| | |
| 5) $-4\cdot x+12=-4$ | $x=4$ |
| | |
| 6) $3/2x+8=5/8x$ | $x=-64/7$ |
| | |
| 7) $(6+8x)\div 5+x=2$ | $x=4/13$ |
| | |
| 8) $6+8\cdot x\div 5+x=2$ | $x=-20/13$ |

- Equação do Segundo Grau é da forma: $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0 \quad (a\neq 0)$, sendo que existem dois possíveis valores para $x$ ($x_1$ e $x_2$). Esses valores são chamados <u>raízes da equação</u> e são obtidos usando a fórmula de Bhaskara:

| | |
|---|---|
| Para $\boxed{a\cdot x^2+b\cdot x+c=0, \quad a\neq 0}$ calcula-se $\boxed{\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c}$, primeira raiz: $\boxed{x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}}$, segunda raiz: $\boxed{x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}}$. | Análise de $\boxed{\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c}$ para os possíveis valores das raízes $x_1$ e $x_2$: <br> Se $\Delta>0\Rightarrow$ existem duas raízes reais e diferentes: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$ e $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$ <br> Se $\Delta=0\Rightarrow$ existem duas raízes reais e iguais: $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2\cdot a}$ <br> Se $\Delta<0\Rightarrow$ existem duas raízes complexas: $x_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}$ e $x_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}$, $\boxed{i=\sqrt{-1}}$. |

*Exemplos*

1) Resolver as equações do segundo grau abaixo.

a) $\underbrace{1}_{a}\cdot x^2\underbrace{-4}_{b}\cdot x\underbrace{+1}_{c}=0, \quad \Rightarrow \Delta=\underbrace{(-4)^2}_{b^2}-4(\underbrace{1}_{a})(\underbrace{1}_{c})=16-4=12>0$ (duas raízes reais e diferentes)

$$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{12}}{2\cdot 1}=\frac{4+\sqrt{12}}{2}=3,73,$$

$$x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{12}}{2\cdot 1}=\frac{4-\sqrt{12}}{2}=0,27.$$

b) $2\cdot x^2-4\cdot x+2=0, \quad \Rightarrow \Delta=(-4)^2-4(2)(2)=16-16=0$ (duas raízes reais e iguais)

$$x_1=x_2=\frac{-(-4)}{2\cdot 2}=\frac{4}{4}=1,00.$$

c) $6\cdot x^2+2\cdot x+3=0, \quad \Rightarrow \Delta=(2)^2-4(6)(3)=4-72=-68<0$ (duas raízes complexas),

$$x_1=\frac{-(2)+\sqrt{(-68)}}{2\cdot 6}=\frac{-(2)+\sqrt{-1}\cdot\sqrt{68}}{2\cdot 6}=\frac{-2+i\sqrt{68}}{12}=\frac{-2}{12}+\frac{i\sqrt{68}}{12}=-0,17+i\cdot 0,69,$$

$$x_2=\frac{-(2)-\sqrt{(-68)}}{2\cdot 6}=\frac{-(2)-\sqrt{-1}\cdot\sqrt{68}}{2\cdot 6}=\frac{-2-i\sqrt{68}}{12}=\frac{-2}{12}-\frac{i\sqrt{68}}{12}=-0,17-i\cdot 0,69.$$

$x_1={}^*x_2$ (raízes complexas sempre aparecem aos pares, uma o complexo conjugado da outra).

***Exercícios***

| | |
|---|---|
| 1) $2\cdot x^2-5\cdot x+2=0$ | (2,00; 0,50) |
| | |
| 2) $x^2-3\cdot x+1=0$ | (2,62; 0,38) |
| | |
| 3) $-2\cdot x^2+x+2=0$ | (-1,28; 0,78) |
| | |
| 4) $x-x^2+3=0$ | (-1,30; 2,30) |

| | |
|---|---|
| | |
| 5) $x^2+2\cdot x+1=0$ | (-1,00; -1,00) |
| | |
| 6) $-x^2-2\cdot x-1=0$ | (-1,00; -1,00) |
| | |
| 7) $x^2-3\cdot x+9/4=0$ | (1,50; 1,50) |
| | |
| 8) $2/3\cdot x^2-4/5\cdot x+3/2=0$ | (-1,01; 1,85) |
| | |
| 9) $x^2-3\cdot x+3=0$ | (1,50+i·0,87; 1,50-i·0,87) |
| | |
| 10) $-2\cdot x^2+4\cdot x-3=0$ | (1,00+i·0,71; 1,00-i·0,71) |

### Módulo de uma variável

Quando uma variável pode assumir valores positivos ou negativos, se for de interesse apenas em calcular o *módulo* da variável ($|...|$, *apenas o seu valor positivo*), então ignoramos o sinal, caso ele seja negativo, e apresentamos apenas o seu valor positivo, formalmente, a definição de módulo é

$$|x| = \begin{cases} x, & se \quad x > 0, \\ -x, & se \quad x < 0. \end{cases}$$

Exemplos: Calcular o módulo das variáveis: $x=-9m$, $x=7m$ e $\upsilon=-8m/s$.

Solução: $|x=-9m| = -(-9m) = 9m;$ $\quad |x=7m| = 7m;$ $\quad |\upsilon=-8m/s| = -(-8m/s) = 8m/s.$

## Isolar uma variável

Um problema que será muito comum neste curso, será resolver uma equação na qual envolva isolar uma variável que está elevada a um expoente diferente de *1*.

- Por exemplo, o volume de uma esfera de raio $R$ é dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \tag{1.1}$$

($\pi \approx 3.14$). Nesta situação, se é fornecido o volume $V$ e é necessário calcular o raio $R$, então precisamos isolar a variável $R$, ou seja, devemos escrever $R$=[?]. Para tal, vamos colocar a variável que desejamos isolar no lado esquerdo da igualdade, ou seja: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = V \quad \Rightarrow \quad 4\pi R^3 = 3V \quad \Rightarrow \quad R^3 = \frac{3V}{4\pi}$. Agora precisamos eliminar o expoente *3* do raio $R$. Para tal objetivo, vamos usar a regra de potenciação III. Vamos elevar todos os membros da igualdade (*esquerdo e direito*), por um expoente $n$ tal elimine o expoente 3 de $R$,

$$\left(R^3\right)^n = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^n. \tag{1.2}$$

Como nosso objetivo e deixar a variável $R$ elevada ao expoente *1*, então devemos ter que: $\left(R^3\right)^n = R^{3\cdot n} = R^1$. Como as bases ($R$) são iguais $R^{3\cdot n} = R^1$, isso implica que os expoentes também devem ser iguais, $3 \cdot n = 1 \Longrightarrow n = 1/3$. Este é o expoente que devemos elevar todos os membros da equação (1.2), ou seja, $\left(R^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{R^{\frac{3}{3}} = R^1 = R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}$, este é o resultado final.

- A energia cinética $K$ de uma partícula de massa $m$ e velocidade $\upsilon$ é definida como: $K=\frac{1}{2}m\upsilon^2$. Agora se precisarmos, novamente, isolar a variável $\upsilon$, então vamos proceder de forma análoga a raio da esfera R,

$$\boxed{K=\frac{1}{2}m\upsilon^2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}m\upsilon^2=K} \Rightarrow \boxed{m\upsilon^2=2\cdot K} \Rightarrow \boxed{\upsilon^2=\frac{2\cdot K}{m}} \Rightarrow \boxed{\left(\upsilon^2\right)^n=\upsilon^{2\cdot n}=\left(\frac{2\cdot K}{m}\right)^n}. \qquad (1.3)$$

Como queremos deixar a velocidade $\upsilon$ elevada ao expoente 1, devemos ter que $2{\cdot}n{=}1 \Rightarrow n=\frac{1}{2}$. Este é o expoente que devemos elevar todos os membro da equação (1.3): $\left(\upsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2\cdot K}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ desenvolvendo,

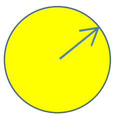
$\boxed{\upsilon^{\frac{2}{2}}=\upsilon^1=\upsilon=\left(\frac{2\cdot K}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}$. De regra geral, sempre devemos elevar ambos os lados da equação a um expoente que é o inverso do que desejamos eliminar.

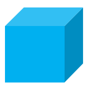
- A energia potencial elástica $U_e$ armazenada em uma mola de constante elástica $k$ quando comprimida ou distendida por uma distância $z$ *(em relação a sua posição de equilíbrio)*, é dada por $U_e=\frac{1}{2}k\cdot z^2$. Agora se precisarmos, novamente, isolar a variável $z$, então

$$\boxed{U_e=\frac{1}{2}k\cdot z^2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}k\cdot z^2=U_e} \Rightarrow \boxed{k\cdot z^2=2\cdot U_e} \Rightarrow \boxed{z^2=\frac{2\cdot U_e}{k}} \Rightarrow \boxed{\left(z^2\right)^n=z^{2\cdot n}=\left(\frac{2\cdot U_e}{k}\right)^n}. \qquad (1.4)$$

Agora faça você mesmo o valor do expoente $n$ e a variável $z$.

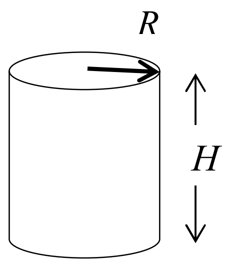
**Exercícios para você fazer**

i) A área de um círculo  de raio $R$ é dada por: $A=\pi R^2$ ($\pi$=*3.14*). Escreva o raio $R$ em função da área $A$.

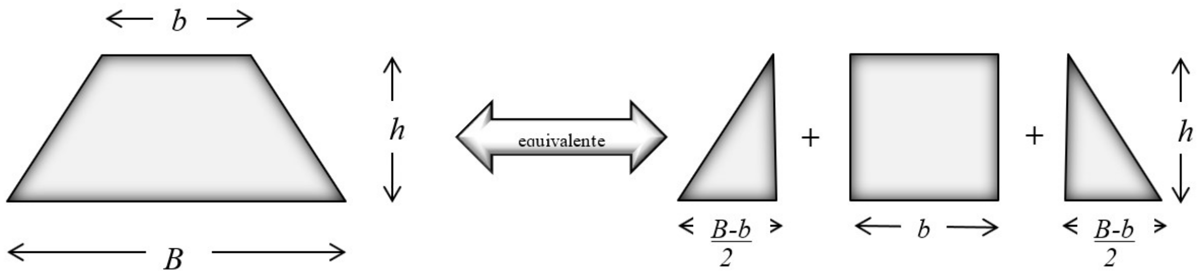
ii) O volume de um cubo  de arestas $L$ é $V=L^3$. Escreva a aresta $L$ em função do volume $V$.

iii) A densidade volumétrica de um corpo homogêneo é definida como sendo $\rho=\frac{m}{V}$, onde $m$ é a massa e $V$ é o volume do corpo. Para um cubo de arestas $L$, escreva como esta grandeza varia em função da massa $m$. Se você aumentar a massa $m$, as arestas $L$ aumentam ou diminuem?

iv) O volume de um cilindro de raio $R$ e altura $H$ é: $V=\pi R^2 H$. Escreva o valor de $R$ em função de $V$ e $H$.




v) A área $A$ de um trapézio de base maior $B$, base menor $b$ e altura $h$ é dada por: $\boxed{A=\left(\frac{B+b}{2}\right)\cdot h}$. Isole $b$.




## Isolar uma variável quando esta se encontra no expoente

Anteriormente, a variável a se isolar estava elevada a algum expoente. Agora, o expoente é a própria variável. Sempre que uma variável aparecer no expoente, devemos tomar o logaritmo em ambos os lados da igualdade. Na tabela abaixo, está as principais propriedades do *logaritmo* que serão usadas.

**Propriedades do Logaritmo**

1) $\log_{base}(A \cdot B) = \log_{base}(A) + \log_{base}(B)$

2) $\log_{base}\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_{base}(A) - \log_{base}(B)$

3) $\log_{base}(A^n) = n \cdot \log_{base}(A)$

4) $\log_{base}(base^X) = X$ para $base > 1$

5) $base^{\log_{base} X} = X$ para $base > 1$

**Mudança de Base**

$$\underbrace{\log_{10}(A)}_{\text{Base 10}} \xrightarrow{\text{Nova Base D}} \frac{\log_D(A)}{\log_{10}(D)}, \qquad D > 1$$

**Composição de função inversa**

$$f(x) \underset{inversa}{\overset{inversa}{\rightleftarrows}} f^{-1}(x)$$

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

**Base 10**

$\log_{10}\left(10^x\right) = x$ (regra 4)

$10^{(\log_{10} x)} = x$ (regra 5)

**Base $e = 2.7182...$, $\log_e x = \ln x$**

$e^{(\ln x)} = x$

$\ln\left(e^x\right) = x$

*Exemplos*

**E.1)** No decaimento radioativo, $N$ representa o número de átomos radioativos em uma amostra que ainda não emitiram radiação no tempo $t$. Esse número $N$ é dado por

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \tag{1.5}$$

onde $N_0$ é o número de átomos radioativos que ainda não emitiram radiação no tempo $t=0$ e $\lambda$ é a constante de desintegração nuclear, que depende de cada elemento radioativo. Nosso objetivo é isolar o valor do tempo $t$ na equação (1.5). Vamos começar tomando o logaritmo, na base $e$, em ambos os lados da equação:

$\ln\left(N(t)\right) = \ln\left(N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}\right)$, tomamos o log em ambos os lados da equação

$\ln\left(N(t)\right) = \ln\left(N_0\right) + \ln\left(e^{-\lambda \cdot t}\right)$, usamos a regra 1)

$\ln\left(N(t)\right) = \ln\left(N_0\right) - \lambda \cdot t \cdot \underbrace{\ln\left(e^1\right)}_{1}$, usamos a regra 3)

$\lambda \cdot t = \ln\left(N_0\right) - \ln\left(N(t)\right)$, isolamos $\lambda t$

$\lambda \cdot t = \ln\left(\dfrac{N_0}{N(t)}\right)$, usamos a regra 2) para deixar a equação mais elegante

$$\boxed{t = \frac{\ln\left(\frac{N_0}{N(t)}\right)}{\lambda} \quad \text{ou} \quad t = \frac{-\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{\lambda}}$$ objetivo alcançado.

**2)** Resolva as equações abaixo para *x* (você pode usar qualquer base>*1*, é muito comum usar a base 10).

$a)\quad 2^x = 32 \;\Rightarrow\; \underbrace{\log_{10}(2^x)}_{\text{aplicar a regra 3}} = \log_{10}(32) \;\Rightarrow\; \underbrace{x \cdot \log_{10}(2)}_{\text{regra 3}} = \log_{10}(32) \;\Rightarrow\; x = \frac{\log_{10}(32)}{\log_{10}(2)} = 5.$

$b)\quad 5^x = 25$

$c)\quad 10^x = 1000$

$d)\quad 2^x = 40$

$e)\quad 4{,}3^x - 50 = 0$

$f)\quad 15^x - 5^{2x^2} = 0$

$g)\quad 4^x - 10 \cdot x = 0$ (este caso não tem como isolar analiticamente $x$ e calcular o seu valor)

$h)\quad 5^{x^2} - 50 = 0 \;\Rightarrow\; 5^{x^2} = 50 \Rightarrow \underbrace{\log_{10}\left(5^{x^2}\right)}_{\text{aplicar a regra 3}} = \log_{10}(50) \;\Rightarrow \underbrace{x^2 \cdot \log_{10}(5)}_{\text{regra 3}} = \log_{10}(50) \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{\log_{10}(50)}{\log_{10}(5)}}$

$i)\quad 5^{x^2} - 50^x = 0 \Rightarrow 5^{x^2} = 50^x \Rightarrow \log_{10}\left(5^{x^2}\right) = \log_{10}\left(50^x\right) \Rightarrow x^2 \cdot \log_{10}(5) = x\log_{10}(50) \Rightarrow \underbrace{x^2 \cdot \log_{10}(5) - x \cdot \log_{10}(50) = 0}_{\text{resolver esta equação do 2ºgrau para x}}$

Nota:
A equação no item (g) não pode ser resolvida analiticamente, mas é possível resolvê-la numericamente plotando a função $y(x) = 4^x \quad e \quad g(x) = 10 \cdot x$ e verificar onde ocorre a interseção dessas duas funções, ou seja, calcular o valor de *x* onde $y(x) = g(x)$. Na Figura 1, tem-se o plot das duas funções mostrando que existem dois valores de *x* em que a equação é satisfeita, ou seja, $4^x = 10 \cdot x$ para *x=0,117* e *x=2,236*.

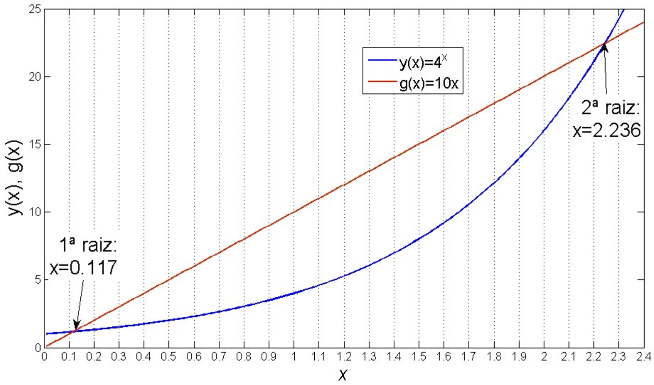



**Figura 1** – Método gráfico para determinar o(s) valor(es) de *x* onde $4^x=10x$.

## Razão entre variáveis

Será muito comum você ter que calcular alguma equação da forma: $\boxed{taxa = \frac{X}{Y}}$, onde *taxa* é a razão de *X* por *Y*. Estas duas últimas grandezas podem ser qualquer coisa. Quando *X* é espaço e *Y* é o tempo, então *taxa* é a velocidade; quando *X* é o volume e *Y* o tempo, então *taxa* é a vazão de água; quando *X* é a massa e *Y* o volume, então *taxa* é a densidade, etc. Se *taxa* for sempre constante, então podemos calcular *X*, quando *Y* for conhecido,

$$taxa = \frac{X}{Y}, \text{ (isolar } X) \Rightarrow \boxed{X = Y \cdot taxa}.$$

O mesmo é verdade para o cálculo de *Y*, quando *X* é fornecido,

$$taxa=\frac{X}{Y},\ (\text{isolar } Y)\Rightarrow\quad Y\cdot taxa = X\quad\Rightarrow\quad \boxed{Y=\frac{X}{taxa}}.$$

*Exemplos*

**E.1)** A definição de velocidade média é $\upsilon=\frac{\Delta L}{\Delta t}$, onde *ΔL* é a variação do espaço e *Δt* é a variação do tempo. Dado que a velocidade média de um carro é *υ=80km/h*, responda;

a) Qual é espaço percorrido em uma viagem que dura 5h?

*Solução: neste caso, precisamos isolar e calcular ΔL(espaço), portanto ΔL = υ Δt, pois sabemos que υ=80km/h e Δt=5h, substituindo:* $\Delta L=\upsilon\cdot\Delta t=80\frac{km}{\cancel{h}}\cdot 5\cancel{h}=\boxed{400km}$. *Fique atento para não misturar as unidades, pois se o tempo fornecido fosse 1200s, você teria que transformar este tempo em hora ou transformar a velocidade em km/s*

b) Calcule o intervalo de tempo (em hora e segundo) que dura uma viagem de 1200km.

*Solução: Agora precisamos calcular Δt, dado que υ=80km/h e ΔL=1200km. Sabendo que a definição de velocidade é:*

$$\upsilon=\frac{\Delta L}{\Delta t};\quad \text{isolar } \Delta t\Rightarrow\quad \Delta t\cdot\upsilon=\Delta L\quad\Rightarrow\quad \Delta t=\frac{\Delta L}{\upsilon}\Rightarrow\Delta t=\frac{1200\cancel{km}}{80\frac{\cancel{km}}{h}}=\boxed{15h}=15\cdot\overbrace{3600s}^{1h}=\boxed{54000s}\cdot$$

**E.2)** A taxa de crescimento de uma população de gado é *20boi/mes* (considere esta taxa sempre [1]constante).

a) qual é o aumento na população de gado daqui a 1 ano?

*Solução: Chame:* $taxa=\frac{população\_boi}{tempo}$*, onde taxa=20boi/mês, tempo=1 ano (=12mes) e população_boi é o número de bois que estamos querendo calcular.*

$$taxa=\frac{população\_boi}{tempo},(\text{isolar população\_boi})\Rightarrow população\_boi=tempo\cdot taxa=12\cancel{mes}\cdot 20\frac{boi}{\cancel{mes}}=\boxed{240boi}.$$

b) Calcule quanto tempo é necessário para que essa população de gado aumente em *3000 bois*.

*Solução: Agora vamos calcular o tempo que será necessário para que a população aumente em 3000bois.*

$$taxa=\frac{população\_boi}{tempo},(\text{isolar } tempo)\Rightarrow tempo=\frac{população\_boi}{taxa}=\frac{3000\cancel{boi}}{20\cancel{boi}/mes}=\boxed{150mes=12.5ano}.$$

## Grandezas Quantizadas

Algumas grandezas (*E*) que efetuamos medidas aparecem como múltiplos inteiros (*n*) de uma unidade elementar (*e*). Quando isso acontece, dizemos que a grandeza é *quantizada*. Por exemplo, o número de alunos em sala de aula é uma grandeza quantizada, pois não existe aluno fracionado, ou seja, não existe 10.34 aluno. Aqui vamos chamar a nossa grandeza elementar de *e* e *n* é um número inteiro adimensional, tal que a grandeza total *E* é dada por:

$$E=n\cdot e\qquad\qquad n=0,1,2,3,4,... \tag{1.6}$$

e se for de interesse calcular o número de *elementos n*, então $n=\frac{E}{e}$. Ou calcular a unidade elementar $e=\frac{E}{n}$.

*Exemplo*

**E.1)** Um grão de arroz tem massa média de *20mg* (ver tabela 1). Quantos grãos de arroz existem em *1kg*?

*Solução: neste caso, a grandeza elementar 'e' é a massa de um grão de arroz (20·10⁻³g) e queremos saber o número inteiro 'n' tal que multiplicado por um grão de arroz, forneça 1kg de arroz,*

[1] Em crescimento de população, normalmente a taxa é proporcional a população atual *N* (*dN/dt~N*), não sendo, portanto, constante ao longo do tempo. Neste caso, teríamos um crescimento exponencial. Para taxa constante, você deve impor que o boi que nasce não irá se reproduzir.

$$E = n \cdot e \quad \text{(isolar } n) \Rightarrow n = \frac{E}{e} \text{(substituindo o valor numérico)} \Rightarrow n = \frac{1kg}{20 \cdot \underbrace{10^{-3}}_{m} g}.$$

*Observe que a unidade do numerador kg é diferente da unidade do denominador g. Devemos deixar as unidades homogêneas (iguais), pois assim podemos cancelá-las. Podemos deixar tudo em grama ou tudo em quilo. Vamos deixar tudo em grama, onde temos apenas que substituir a unidade do numerador por grama (1kg=1000g, ver tabela 2)* $: n = \frac{1000\cancel{g}}{20 \cdot 10^{-3}\cancel{g}} = \frac{1000000}{20} = \boxed{50000}$. *Portanto, em 1kg de arroz existem, em média, 50mil grãos.*

## Algarismo significativos

Digitar esta seção

## Notação científica (potência de 10)

É uma maneira de escrever <u>números</u> que são muito grandes (174500000000) ou pequenos (0,000000136) em uma forma compacta. O uso dessa notação é baseado na potência de 10. Podemos escrever o número 3, como sendo $3 \cdot 10^0$. Podemos escrever o número 0,0000346 como sendo $3{,}46 \cdot 10^{-5}$; podemos escrever -125 como sendo $-1{,}25 \cdot 10^2$, e assim por diante. A representação de um número em notação científica é da forma:

$\boxed{a = x \cdot 10^n}$ onde $x$ é um número (mantissa) compreendido no intervalo $-10<x<10$. Exemplos: $x=2{,}00$, $x=5{,}21$, $x=-8{,}75$, etc. E $n$ é o expoente inteiro (positivo ou negativo) que iremos descobrir de acordo com o número de casas decimais que iremos deslocar, da direita para esquerda ou da esquerda para direita, respectivamente.

### Representação de números maiores que 1 (em módulo)

Contar o número de casas decimais que é necessário deslocar a **virgula ,** da direita para a esquerda *(n)* $\Leftarrow$ antes de chegar ao último número ($x$). Exemplos:

**i)** $3\overset{2}{5}\overset{1}{9}\overset{\leftarrow}{=}$ é necessário deslocar a vírgula , duas casas ($n=2$) decimais, da direita pra esquerda, antes de chegar ao último número 3, $x=3{,}59$ . O nosso número 359 em notação científica ($x \cdot 10^n$) é $3{,}59 \cdot 10^2$.

**ii)** $8\overset{3}{2}\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{\leftarrow}{,}25 =$ é necessário deslocar a vírgula , três casas decimais ($n=3$), da direita para esquerda, antes de chegar ao último número 8 , $x=8{,}21$. O número 8210,25(truncado) em notação científica ($x \cdot 10^n$) é $8{,}21 \cdot 10^3$.

**iii)** $-6\overset{4}{9}\overset{3}{2}\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{\leftarrow}{=}$ é necessário deslocar quatro casas decimais ($n=4$), da direita para esquerda, antes de chegar ao último número 6, $x=-6{,}92$ (arredondar para 2 casas decimais apenas). O número -69210 (truncado) em notação científica ($x \cdot 10^n$) é $-6{,}92 \cdot 10^4$.

Quando você esquecer essa regra, basta saber que: $10=10^1$, $100=10^2$, e tente construir a sua metodologia.

**E.1)** Escreva os números abaixo em notação científica

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) 10 | $x=1{,}00$ | $n=1$ | $(x \cdot 10^n) = 1{,}00 \cdot 10^1$ *(exato)* |
| b) 45,8 | $x=4{,}58$ | $n=1$ | $(x \cdot 10^n) = 4{,}58 \cdot 10^1$ *(exato)* |
| c) 100 | $x=1{,}00$ | $n=2$ | $(x \cdot 10^n) = 1{,}00 \cdot 10^2$ *(exato)* |
| d) 780 | $x=7{,}80$ | $n=2$ | $(x \cdot 10^n) = 7{,}80 \cdot 10^2$ *(exato)* |
| e) 1000 | $x=$ | $n=$ | $(x\,10^n) =$ |
| f) 2481,78 | $x=2{,}48$ | $n=3$ | $(x \cdot 10^n) = 2{,}48 \cdot 10^3$ *(truncado)* |
| g) 10000 | $x=$ | $n=$ | $(x \cdot 10^n)=$ |
| h) 45487 | $x=$ | $n=$ | $(x \cdot 10^n)=$ |
| i) 100000 | $x=$ | $n=$ | $(x \cdot 10^n)=$ |
| j) 690322,32 | $x=6{,}90$ | $n=5$ | $(x \cdot 10^n) = 6{,}90 \cdot 10^5$ *(truncado)* |
| l) 1000000 | $x=$ | $n=$ | $(x \cdot 10^n)=$ |
| m) 7646630 | $x=$ | $n=$ | $(x \cdot 10^n)=$ |
| n) 2309737328 | $x=$ | $n=$ | $(x \cdot 10^n)=$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| o) 736936146579880 | $x$= | $n$= | $(x\cdot 10^n)$= |

## Representação de números menores que 1 (agora o expoente *n* é negativo)

Contar o número de casas decimais que é necessário deslocar **a vírgula ,** da esquerda para a direita ($n$)$\Rightarrow$ até ultrapassar o primeiro número diferente de zero ($x$). Exemplos:

**i)** $0\overset{\rightarrow\ 1}{,\ 3}59=$ é necessário deslocar a vírgula , uma casa ($n$=-*1*) decimal, da esquerda para direita, até ultrapassar o primeiro número diferente de zero (3), $x$=3,59. O nosso número 0,359 em notação científica ($x\cdot 10^n$) é $3{,}59\cdot 10^{-1}$.

**ii)** $-0\overset{\rightarrow\ 1\ 2}{,\ 08}21=$é necessário deslocar a vírgula , duas casas decimais ($n$=-*2*), da esquerda para direita, até ultrapassar o primeiro número diferente de zero (8), $x$=-*8,21*. O número -0,0821 em notação científica ($x\cdot 10^n$) é -$8{,}21\cdot 10^{-2}$.

**iii)** $0\overset{\rightarrow\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5}{,\ 00008}9244$ = é necessário deslocar a vírgula , cinco casas decimais ($n$=-*5*), da esquerda para direita, até ultrapassar o primeiro número diferente de zero (8) $x$=*8,92* (arredondar para 2 casas decimais apenas). O número 0,000089244 (truncado) em notação científica ($x\cdot 10^n$) é $8{,}92\cdot 10^{-5}$.

Quando você esquecer essa regra, basta saber que: $0{,}1=10^{-1}$, $0{,}01=10^{-2}$, e tente construir a sua metodologia.

**E.1)** Escreva os números abaixo em notação científica

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) 0,1 | $x$=*1,00* | $n$=-*1* | $(x\,10^n) = 1{,}00\cdot 10^{-1}$ *(exato)* |
| b) 0,35 | $x$=*3,50* | $n$=-*1* | $(x\,10^n) = 3{,}50\cdot 10^{-1}$ (exato) |
| c) 0,01 | $x$= | $n$= | $(x\,10^n)$ = |
| d) 0,056 | $x$=*5,60* | $n$=-*2* | $(x\,10^n) = 5{,}60\cdot 10^{-2}$ *(exato)* |
| e) 0,001 | $x$= | $n$= | $(x\,10^n)$ = |
| f) 0,008267 | $x$=*8,27* | $n$=-*3* | $(x\,10^n) = 8{,}27\cdot 10^{-3}$*(truncado)* |
| g) 0,0001 | $x$= | $n$= | $(x\,10^n)$ = |
| h) 0,00023889 | $x$= | $n$= | $(x\,10^n)$ = |
| i) 0,00001 | $x$= | $n$= | $(x\,10^n)$ = |
| j) 0,000028894 | $x$= | $n$= | $(x\,10^n)$ = |
| l) 0,000001 | $x$= | $n$= | $(x\,10^n)$ = |
| m) 0,00005888 | $x$= | $n$= | $(x\,10^n)$ = |
| n) 0,0000001 | $x$= | $n$= | $(x\,10^n)$ = |
| o) 0,0000008899 | $x$=*8,90* | $n$=-*7* | $(x\,10^n) = 8{,}90\cdot 10^{-7}$*(truncado)* |

## Multiplicação de números em notação científica

Para multiplicarmos dois números em notação científica, vamos utilizar a **regra II de potenciação,** para a base 10. Considere os números $a$ e $b$, representados como: $a = x_1\cdot 10^{n_1}$ e $b = x_2\cdot 10^{n_2} \Rightarrow$ $\boxed{a\cdot b = x_1\cdot x_2\cdot 10^{n_1+n_2}}$.

Exemplos:

**E.1)** Multiplique o número $a$ por $b$:

i) $a$=2 e $b$=$3{,}50\cdot 10^3$. Solução: $a\cdot b = (2)\cdot\left(3{,}50\cdot 10^3\right) = 2\cdot 3{,}50\cdot 10^3 = 7{,}0\cdot 10^3$.

ii) $a$=$3\cdot 10^2$ e $b$=$2{,}50\cdot 10^3$. Solução: $a\cdot b = \left(3{,}0\cdot 10^2\right)\cdot\left(2{,}50\cdot 10^3\right) = 3{,}0\cdot 2{,}50\cdot 10^{2+3} = 7{,}50\cdot 10^5$ .

iii) $a$=$4{,}58\cdot 10^5$ e $b$=$3{,}50\cdot 10^3$.

Solução: $a\cdot b = \left(4{,}58\cdot 10^5\right)\cdot\left(3{,}50\cdot 10^3\right) = 4{,}58\cdot 3{,}50\cdot 10^{5+3} = 16{,}03\cdot 10^8 = 1{,}60\cdot 10^1\cdot 10^8 = 1{,}60\cdot 10^9$ .

iv) $a$=$4{,}00\cdot 10^5$ e $b$=$5{,}50\cdot 10^{-4}$. Solução: $a\cdot b = \left(4{,}00\cdot 10^5\right)\cdot\left(5{,}50\cdot 10^{-4}\right) = 4{,}00\cdot 5{,}50\cdot 10^{5-4} = 22{,}00\cdot 10^1 = 2{,}20\cdot 10^2$ .

v) $a$=2,50·10$^{-3}$ e $b$=6,50·10$^{-2}$.

Solução: $a\cdot b=\left(2,50\cdot 10^{-3}\right)\cdot\left(6,50\cdot 10^{-2}\right)=2,50\cdot 6,50\cdot 10^{-3-2}=16,25\cdot 10^{-5}=1,62\cdot 10^{1}\cdot 10^{-5}=1,62\cdot 10^{-4}$.

**1)** Multiplique os números abaixo e deixe seus resultados em notação científica.

| | | |
|---|---|---|
| a) $a=3,00\cdot 10^{3}$ | $b=2,00\cdot 10^{2}$ | $a\cdot b=$ |
| b) $a=8,00\cdot 10^{6}$ | $b=4,00\cdot 10^{2}$ | $a\cdot b=$ |
| c) $a=6,00\cdot 10^{4}$ | $b=1,50\cdot 10^{1}$ | $a\cdot b=$ |
| d) $a=3,00\cdot 10^{-3}$ | $b=2,00\cdot 10^{3}$ | $a\cdot b=$ |
| e) $a=3,50\cdot 10^{-3}$ | $b=4,00\cdot 10^{-4}$ | $a\cdot b=$ |
| f) $a=8,50\cdot 10^{4}$ | $b=4,16\cdot 10^{-6}$ | $a\cdot b=$ |
| g) $a=3,56\cdot 10^{3}$ | $b=5,06\cdot 10^{2}$ | $a\cdot b=$ |
| h) $a=3,56\cdot 10^{3}$ | $b=5,06\cdot 10^{2}$ | $a\cdot b=$ |
| i) $a=3,56\cdot 10^{3}$ | $b=5,06\cdot 10^{2}$ | $a\cdot b=$ |
| j) $a=3,56\cdot 10^{3}$ | $b=5,06\cdot 10^{2}$ | $a\cdot b=$ |
| l) $a$=0,1 | $b$=0,01 | $a\cdot b=$ |
| m) $a$=0,01 | $b$=0,002 | $a\cdot b=$ |
| n) $a$=1 | $b$=0,0001 | $a\cdot b=$ |
| o) $a$=0,0009900 | $b$=0,387 | $a\cdot b=$ |

## Divisão de números em notação científica

Para dividirmos dois números em notação científica, vamos utilizar a regra **V de potenciação,** para a base 10. Considere os números: $a=x_1\cdot 10^{n_1}$ e $b=x_2\cdot 10^{n_2}$, a divisão $a$ por $b$ é: $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{x_1}{x_2}\cdot 10^{n_1-n_2}}$. Exemplos:

**E.1)** Divida o número $a$ por $b$:

i) $a$=4,00·10$^{6}$ e $b$=2,00·10$^{3}$. Solução: $\frac{a}{b}=\frac{4,00\cdot 10^{6}}{2,00\cdot 10^{3}}=\frac{4,00}{2,00}\cdot 10^{6-3}=2,00\cdot 10^{3}$.

ii) $a$=3,50·10$^{3}$ e $b$=2,50·10$^{2}$. Solução: $\frac{a}{b}=\frac{3,50\cdot 10^{3}}{2,50\cdot 10^{2}}=\frac{3,50}{2,50}\cdot 10^{3-2}=1,40\cdot 10^{1}=14$.

iii) $a$=5,50·10$^{3}$ e $b$=8,44·10$^{6}$. Solução: $\frac{a}{b}=\frac{5,50\cdot 10^{3}}{8,44\cdot 10^{6}}=\frac{5,50}{8,44}\cdot 10^{3-6}=0,65\cdot 10^{-3}=6,50\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-3}=6,50\cdot 10^{-4}$.

**1)** Divida os números abaixo e deixe seus resultados em notação científica.

| | | |
|---|---|---|
| a) $a=3,00\cdot 10^{3}$ | $b=2,00\cdot 10^{2}$ | $\frac{a}{b}=$ |
| b) $a=8,00\cdot 10^{6}$ | $b=4,00\cdot 10^{2}$ | $\frac{a}{b}=$ |
| c) $a=6,00\cdot 10^{4}$ | $b=1,50\cdot 10^{1}$ | $\frac{a}{b}=$ |
| d) $a=3,00\cdot 10^{3}$ | $b=1,50\cdot 10^{2}$ | $\frac{a}{b}=$ |

| | | |
|---|---|---|
| e) $a=3{,}50\cdot10^3$ | $b=4{,}06\cdot10^4$ | $\frac{a}{b}=$ |
| f) $a=8{,}50\cdot10^4$ | $b=4{,}16\cdot10^6$ | $\frac{a}{b}=$ |
| g) $a=3{,}56\cdot10^3$ | $b=5{,}06\cdot10^2$ | $\frac{a}{b}=$ |
| h) $a=3{,}56\cdot10^3$ | $b=5{,}06\cdot10^2$ | $\frac{a}{b}=$ |
| i) $a=3{,}56\cdot10^3$ | $b=5{,}06\cdot10^2$ | $\frac{a}{b}=$ |
| j) $a=3{,}56\cdot10^3$ | $b=5{,}06\cdot10^2$ | $\frac{a}{b}=$ |
| l) $a$=0,1 | $b$=0,01 | $\frac{a}{b}=$ |
| m) $a$=0,01 | $b$=0,002 | $\frac{a}{b}=$ |
| n) $a$=1 | $b$=0,0001 | $\frac{a}{b}=$ |
| o) $a$=0,0009900 | $b$=0,00387 | $\frac{a}{b}=$ |

## Adição de números em notação científica

Para se adicionar dois números em notação científica, devemos deixar preferêncialmente esses dois números com sua base (*10*) elevada ao menor dos expoentes.

*Exemplos*

i) Dado que $a=4{,}00\cdot10^4$ e $b=2{,}00\cdot10^3$(menor expoente), a soma $a+b$ é escrita como:

$$4{,}00\cdot10^4+2{,}00\cdot10^3=4{,}00\cdot10^1\cdot\underline{10^3}+2{,}00\cdot\underline{10^3}=(4{,}00\cdot10^1+2{,}00)\cdot\underline{10^3}=42{,}0\cdot10^3=4{,}20\cdot10^4\,.$$

ii) Dado que $a=8{,}00\cdot10^5$ e $b=3{,}00\cdot10^3$, a soma $a+b$ é escrita como:

$$8{,}00\cdot10^5+3{,}00\cdot10^3=8{,}00\cdot10^2\cdot\underline{10^3}+3{,}00\cdot\underline{10^3}=(800{,}0+3{,}00)\cdot\underline{10^3}=803{,}0\cdot10^3=8{,}03\cdot10^5\,.$$

iii) Dado que $a=4{,}00\cdot10^7$ e $b=2{,}00\cdot10^3$, a soma $a+b$ é escrita como:

$$4{,}00\cdot10^7+2{,}00\cdot10^3=4{,}00\cdot10^4\cdot\underline{10^3}+2{,}00\cdot\underline{10^3}=(40000{,}0+2{,}00)\cdot\underline{10^3}=40002{,}0\cdot10^3\simeq4{,}00\cdot10^4\cdot10^3=4{,}00\cdot10^7.$$

Neste caso, devido o número $a$ ser muito maior que $b$, a soma não contribuiu em nada e permaneceu o valor do maior número ($a$).

**1)** Adicione os números abaixo e deixe seus resultados em notação científica.

| | | |
|---|---|---|
| a) $a=3{,}0\cdot10^3$ | $b=2{,}5\cdot10^3$ | $a+b=$ |
| b) $a=8{,}0\cdot10^6$ | $b=4{,}0\cdot10^5$ | $a+b=$ |
| c) $a=6{,}0\cdot10^4$ | $b=6{,}0\cdot10^3$ | $a+b=$ |
| d) $a=1{,}0\cdot10^3$ | $b=1{,}0\cdot10^2$ | $a+b=$ |
| e) $a=6{,}2\cdot10^4$ | $b=8{,}5\cdot10^4$ | $a+b=$ |
| f) $a=8{,}2\cdot10^5$ | $b=4{,}6\cdot10^6$ | $a+b=$ |
| g) $a=2{,}50\cdot10^3$ | $b=5{,}45\cdot10^2$ | $a+b=$ |
| h) $a=6{,}57\cdot10^4$ | $b=2{,}0\cdot10^3$ | $a+b=$ |
| i) $a=7{,}10\cdot10^1$ | $b=9{,}1\cdot10^2$ | $a+b=$ |

### Subtração de números em notação científica

A subtração de números em notação científica segue a mesma regra para adição, só que agora vai prevalecer o sinal do maior número. Pegando o exemplo anterior, no qual adicionamos, agora vamos subtrair.

Exemplos:

i) Dado que $a=4,00\cdot10^4$ e $b=2,00\cdot10^3$(menor expoente), a subtração $a$-$b$ é escrita como:

$$4,00\cdot10^4-2,00\cdot10^3=4,00\cdot10^1\cdot\underline{10^3}-2,00\cdot\underline{10^3}=(4,00\cdot10^1-2,00)\cdot\underline{10^3}=38,0\cdot10^3=3,80\cdot10^4.$$

ii) Dado que $a=8.00\cdot10^5$ e $b=3.00\cdot10^3$, a subtração $a$-$b$ é:

$$8,00\cdot10^5-3,00\cdot10^3=8,00\cdot10^2\cdot\underline{10^3}-3,00\cdot\underline{10^3}=(800,0-2,00)\cdot\underline{10^3}=798,0\cdot10^3=7,98\cdot10^5.$$

iii) Dado que $a=8,00\cdot10^5$ e $b=3,00\cdot10^6$, a subtração $a$-$b$ é:

$$8,00\cdot10^5-3,00\cdot10^6=8,00\cdot\underline{10^5}-3,00\cdot10^1\cdot\underline{10^5}=(8,00-3,00\cdot10^1)\cdot\underline{10^5}=-22,00\cdot10^5=-2,20\cdot10^6.$$

iv) Dado que $a=4,00\cdot10^7$ e $b=2,00\cdot10^3$, a subtração $a$-$b$ é:

$$4,00\cdot10^7-2,00\cdot10^3=4,00\cdot10^4\cdot\underline{10^3}-2,00\cdot\underline{10^3}=(40000,0-2,00)\cdot\underline{10^3}=39998\cdot10^3\simeq4,00\cdot10^4\cdot10^3=4,00\cdot10^7,$$

neste caso, devido $a$ ser muito maior que o número $b$, a subtração não contribuiu em nada e permaneceu o valor do maior número ($a$).

**1)** Subtraia os números abaixo e deixe seus resultados em notação científica.

| | | |
|---|---|---|
| a) $a=3,0\cdot10^3$ | $b=2,5\cdot10^3$ | $a-b=$ |
| b) $a=8,0\cdot10^6$ | $b=4,0\cdot10^5$ | $a-b=$ |
| c) $a=6,0\cdot10^4$ | $b=6,0\cdot10^3$ | $a-b=$ |
| d) $a=1,0\cdot10^3$ | $b=1,0\cdot10^2$ | $a-b=$ |
| e) $a=6,0\cdot10^4$ | $b=8,51\cdot10^4$ | $a-b=$ |
| f) $a=8,0\cdot10^5$ | $b=4,16\cdot10^6$ | $a-b=$ |
| g) $a=2,56\cdot10^3$ | $b=8,45\cdot10^2$ | $a-b=$ |
| h) $a=6,67\cdot10^4$ | $b=2,0\cdot10^3$ | $a-b=$ |
| i) $a=7,10\cdot10^1$ | $b=9,01\cdot10^0$ | $a-b=$ |

## Exercícios

**(Releia a seção "Conversão de Unidades" e consulte as tabelas sugeridas)**

**1)** Quantos segundos têm em:

a) uma hora (*h*),
b) um dia (*dia*),
c) um ano (*ano*).

**2)** Uma estrada de *100km* equivale a quantos ***m*** e a quantos ***cm***?

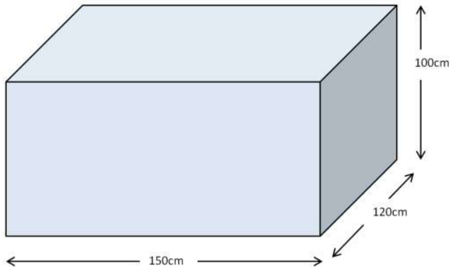
**3)** Uma área de $50000m^2$ equivale a quantos:

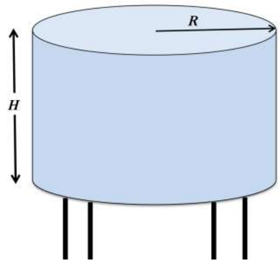
a) $km^2$? ($1000m=1km$)
b) *Hectares (ha)*? ($1ha=10^4m^2$)

**4)** A densidade do mercúrio é de $\rho_{Hg}=13600kg/m^3$. Expresse essa densidade em g/cm³.

**5)** A densidade da água é de $\rho = 1g/cm^3$. Expresse essa densidade em $kg/m^3$ e $g/dm^3$. Dado $10dm=1m$.

**6)** Calcule o volume (em $\boldsymbol{m^3}$ e $\boldsymbol{L}$) de uma caixa d'água com as dimensões: 150cm x 120cm x 100cm (**ver tabela 2**).




**7)** Calcule o volume (em $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{m^3}$) de uma caixa d'água circular de raio $R=1.2m$ e altura $H=4.0m$ (**ver tabela 2**). Dado: $V_{cilindro} = \pi \cdot R^2 \cdot H, \quad \pi \simeq 3.14$.

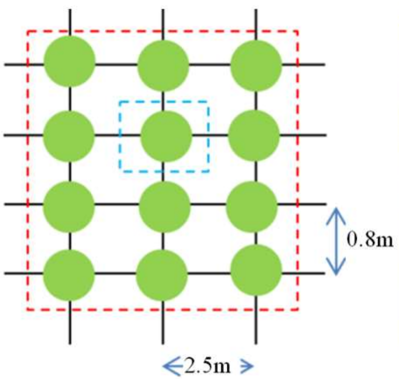
**8)** A vazão de água que sai de uma torneira é de $Q=100cm^3/s$. Expresse essa vazão em <u>$m^3/h$,</u> <u>$dm^3/s$</u> e <u>$L/s$</u>.

**(Releia a seção "Razão entre variáveis")**

**9)** O consumo médio de combustível de um carro popular é de *10km/L*. Quantos litros são necessários para esse carro percorrer uma distância de *600km*? Se o motorista viaja a *90km/h*, qual é o tempo de viagem?

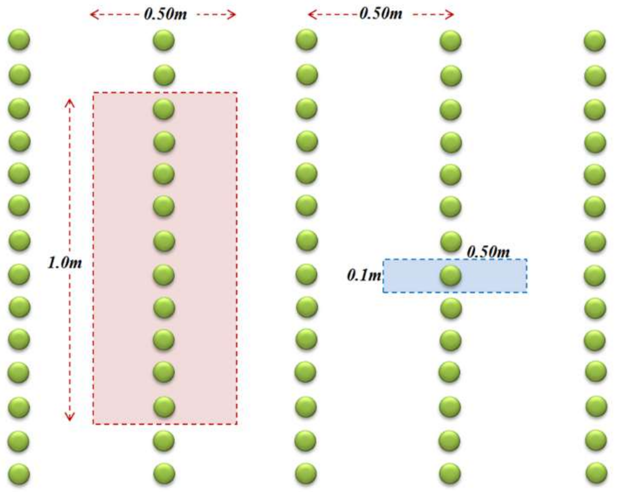
**10)** Você está viajando a uma velocidade constante de *50m/s*. Quanto tempo você irá precisar para percorrer *150km*? Expresse sua resposta em hora *(<u>h</u>)* e em segundo (<u>*s*</u>).

**11)** Considerando o plantio de café, onde cada planta de café (ver figura abaixo) se encontra espaçada de *2.5m* e a distância entre cada fileira é de *0.8m*. Calcule:




a) O número de planta por <u>metro quadro</u> e por <u>hectare</u> ($1ha=10^4m^2$).
b) O número de plantas existente em um plantio de $1km^2$.

**12)** No cultivo da soja, a planta necessita, em média, de um espaçamento entre linhas de *50cm(=0.5m)* e a densidade da planta de soja por linha deve ser de *10planta/m* (ver figura abaixo).




a) Calcule o número médio de plantas de soja por hectare (*1ha=10⁴m²*).

b) Dado que o rendimento médio da safra foi de *2100kg/ha*, calcule o rendimento médio por <u>planta</u> de soja (*kg/planta*).

c) Cada planta de soja produziu, em média, quantos grãos?(1grão= *0,18g*).

d) Para uma plantação de *30ha* de soja, calcule o dinheiro que você irá ganhar com a venda da colheita, sabendo que a saca(*60kg*) de soja está cotada a *R$ 63,00* (*dica: calcule o número de sacas em 30ha e multiplique por R$ 63*). *Monte o esquema do plantio igual ao exercício anterior, ou seja, linha por coluna.*

**13)** A taxa média de crescimento de uma planta fictícia é de $10^{-4} m/dia$.

a) Expresse essa taxa em *cm/s*.

b) Quantos dias são necessários para que essa planta cresça *0,2m*?

c) Após ter se passado *48 dias*, quanto a planta cresceu (em metro)?

**14)** Uma colônia de bactérias cresce a uma taxa de *200bactéria/s*. Quantas horas são necessárias para que a colônia atinja uma população de *300k* (ver tabela 1) de bactérias?

**15)** Em uma medição de população de coelhos, verificou-se que houve um aumento de 3000 coelhos em um intervalo de tempo de *1 mês (considere um mês igual a 30dia)*.

a) Qual é a taxa de crescimento de coelhos? (expresse sua resposta em *coelho/dia*).

b) Quanto tempo (*Δt em dia*) será necessário para que a população atinja *8000 coelhos*? (*considere que a taxa de crescimento é sempre constante*).

**16)** A taxa do batimento cardíaco de um ser humano é em torno de *80 batidas por minuto*. Se uma pessoa vive, em média, *75 anos*, quantas vezes seu coração terá batido ao longo de toda sua vida?

**(Releia a seção "Grandezas Quantizadas")**

**17)** A massa de <u>um</u> grão de soja é, em média, *0,18g*. Quantos grãos de soja existem em uma saca (*1saca= 60kg*)?

**18)** A massa de <u>um</u> grão de café é *0,15g*. Quantos grãos de café existem em uma saca (*1saca= 60kg*)?

**19)** A massa da bactéria *Escherichia coli* (*E. coli*) é em torno de $7 \cdot 10^{-16}$ kg. Calcule o número de bactérias em uma colônia de massa total $5 \cdot 10^{-8}$ g.

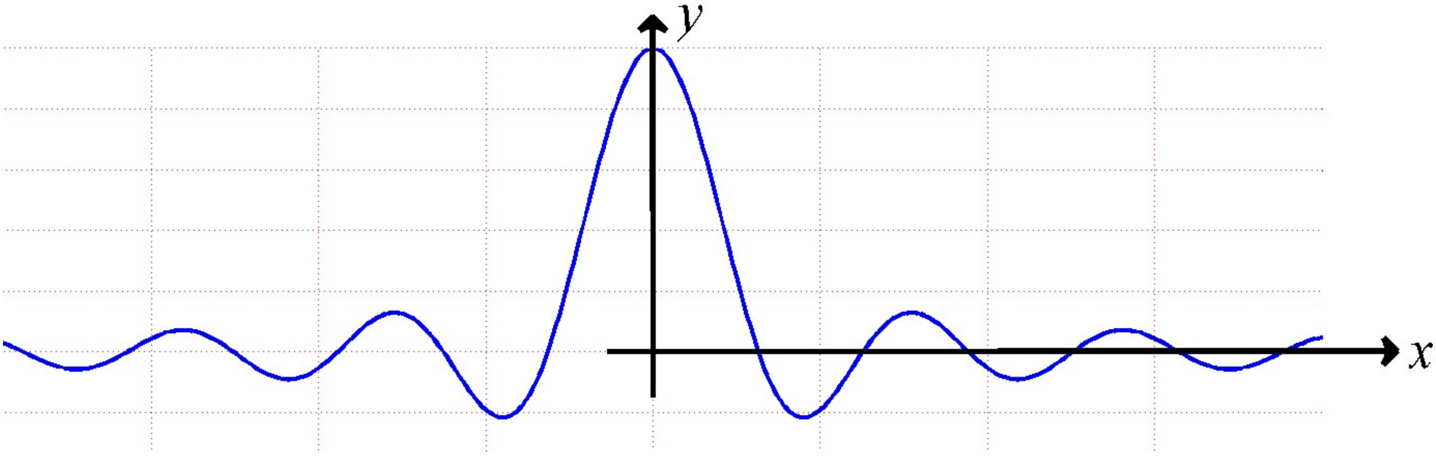
**20)** Você tem um cofrinho cheio de moedas de um Real (R$1). Sabe-se que <u>cada</u> moeda de R$1 possui 7g de massa. Calcule a quantidade de dinheiro (em R$) que você possui guardado no cofrinho, sabendo que este está com massa total de 4,5kg (moedas + cofrinho vazio) e a massa do cofrinho vazio é de 1kg.


**21)** Qual é a massa (em kg) de R$6000 em moedas de R$1.

**Respostas**

1. a) 3600s; b)86400s; c) $3,15 \cdot 10^7$s
2. $10^5$m e $10^7$cm
3. a) $5 \cdot 10^{-2}$km$^2$; b) 5ha
4. 13,6 g/cm$^3$
5. 1000kg/m$^3$; 1000g/dm$^3$
6. 1,8m$^3$ ou 1800L
7. 18086,4L ou 18,086m$^3$
8. 0,36m$^3$/h; 0,1dm$^3$/s; 0,1L/s
9. 60L; 6,67h
10. 0,83h ou 3000s
11. a) *0.5 planta/m$^2$*, *5000planta/ha; b) 500000planta*
12. a) $2 \cdot 10^5$*planta/ha*; b) 0,0105kg/planta=10,5g/planta
    c) *58 grão*; d) *1050saca em 30ha* $\Longrightarrow$ *R$ 66150*
13. a) $1,16 \cdot 10^{-7}$cm/s; b) 2000dia; c) $4,8 \cdot 10^{-3}$m
14. 0,42h
15. a) 100coelho/dia; b) 80dia
16. $3,15 \cdot 10^9$batida
17. $3,33 \cdot 10^5$grão
18. $4 \cdot 10^5$grão
19. *5/7*$\cdot 10^5$
20. *R$ 500*
21. *42kg*

## Cinemática




Quando vamos descrever uma grandeza física, precisamos definir a nossa *'regua'*, o nosso referencial que é a nossa escala de medida. A distância de Pelotas a Porto Alegre é em torno de *260km*. A distância de Pelotas a Florianópolis é em torno de *710km*. Nesses dois últimos exemplos, usamos Pelotas como origem do nosso sistema de referência e usamos *km* como nossa unidade de comprimento. Poderíamos ter dito que a distância de Pelotas a Porto Alegre é *260000m* ou *26000000cm*, mas nunca algo da forma *260*, pois esse número puro sem a unidade, a informação de distância fica indeterminada. É importante nunca esquecer de especificar a unidade de medida, seja ela de distância, tempo, energia, etc. O sistema de referência que iremos usar será o sistema de coordenadas cartesiano, definido a seguir.

### Sistema de Coordenadas Cartesiano (X,Y)

O Sistema de coordenadas cartesiano para duas dimensões ($x$,$y$) possui um eixo horizontal $x$ (chamado de abscissa) e outro eixo vertical $y$ (chamado de ordenada), ambos ortogonais entre si (que faz um ângulo de 90º ou $\pi/2$ rad). A origem do sistema é no cruzamento entre os eixos, no ponto (0; 0). O sistema de coordenadas cartesiano em uma dimensão possui apenas um eixo. Já o sistema em três dimensões (3D), possui três eixos.

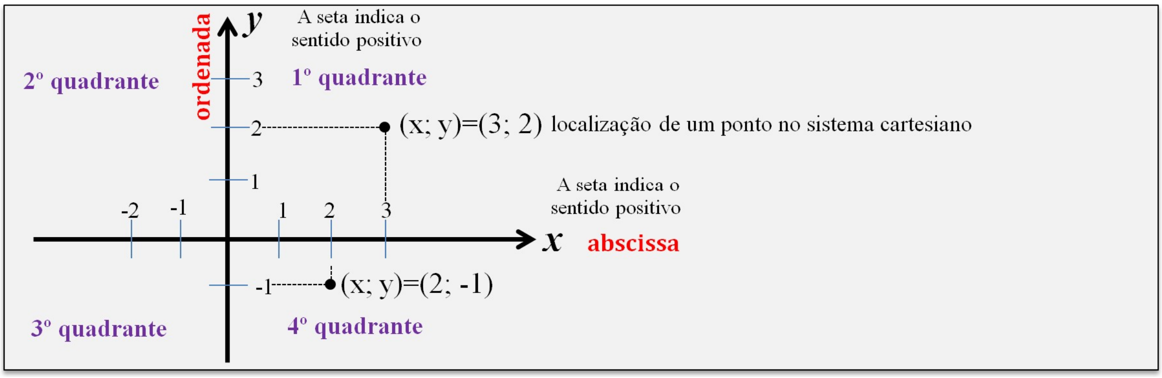



**Figura 2** – Localização dos pontos (3; 2) e (2;-1) no sistema de coordenadas cartesiano em duas dimensões 2D, *eixo-x* e *eixo-y*.

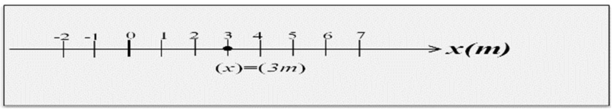
## Espaço e velocidade

**Posição (X) -** Grandeza usada para localizar uma partícula (ou um ponto) no espaço em ralação a um sistema de referência. Adotando o sistema internacional de unidades (S.I.U.), a unidade de posição é o metro *m*. Exemplo: quando dizemos que a posição de uma partícula é *10m*, queremos dizer que esta partícula se localiza a *10m* de distância da origem do referencial adotado e no sentido positivo do nosso referêncial. Quando dizemos que a posição de uma partícula é *-5m*, isso significa que a partícula se localiza a uma distância de *5m* da origem do referencial e no sentido negativo.

*Exemplos e Exercícios para uma dimensão (1D) e duas dimensões (2D) no espaço*

**E.1)** Localizar a posição *3m* no sistema cartesiano em 1D (apenas um eixo, aqui vamos chamar de *eixo-x*).

*Solução:*




**E.2)** Localizar a posição no sistema cartesiano em 1D:

a) -2 m

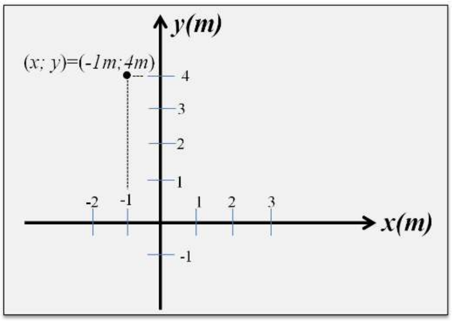
b) 2 m

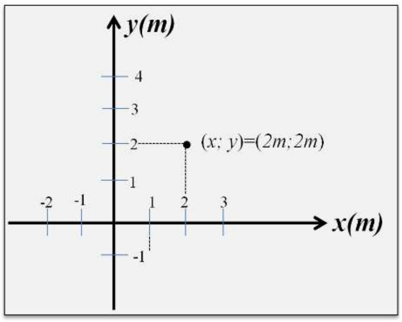
c) 0 m

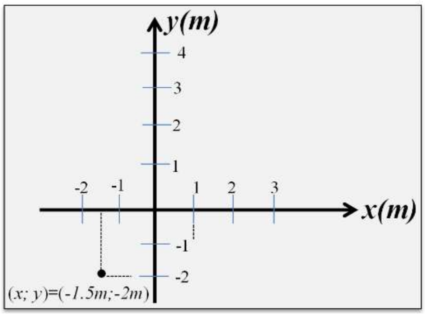
d) 7 m

**E.3)** Localizar as posições (*-1m; 4m*), (*2m; 2m*) e (*-1.5m; -2m*) no sistema cartesiano.

*Solução:*




**E.4)** Localize as posições o sistema cartesiano (*-2m; 3m*), (*1m; -1m*), (*2m; -4m*), (*0m; 0m*), (*5m; 3m*), (*-3m; 6m*).

**Deslocamento (ΔX)** – é definido como sendo a variação da <u>Posição</u> da partícula. É associado a duas posições: a posição inicial $X_{inicial} = x_i$ e a posição final $X_{final} = x_f$, ou seja:

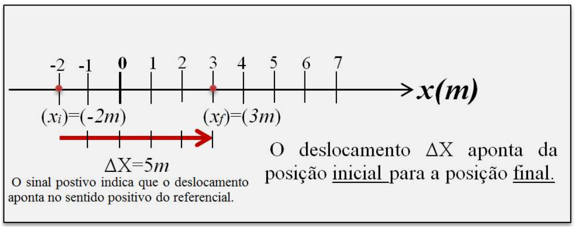
$$\Delta X_x = x_f - x_i = x(t_f) - x(t_i) \qquad (m) \tag{1.7}$$

o *subíndice* em ΔX é para indicar que o deslocamento está sendo calculado no *eixo-x*. É importante fazer essa especificação, pois quando trabalharmos com duas dimensões, teremos o deslocamento no *eixo-y* também. O deslocamento *aponta* (*sentido*) da posição inicial para a posição final. Aqui representamos variação pela letra grega delta Δ. Variação de uma grandeza é sempre o <u>estado final</u> menos o <u>estado inicial</u>.

*Exemplos para uma dimensão (1D) no espaço (apenas o eixo-x):*

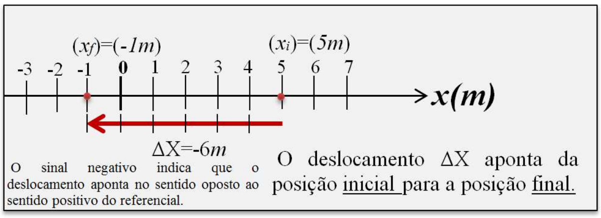
**E.5)** Dado que em um instante de tempo inicial a partícula localizava na posição *-2m* e no instante seguinte a sua posição passou a ser *3m*, qual foi o deslocamento sofrido pela partícula?

*Solução:* $\Delta X_x = x_f - x_i = 3m - (-2m) = \boxed{5m}$




**E.6)** Sabendo que o deslocamento de uma partícula foi de *-6m* e que sua posição atual é *-1m*, calcule a posição inicial.

*Solução:* $\Delta X_x = x_f - x_i \Rightarrow -6m = -1m - x_i \Rightarrow \boxed{x_i = -1m + 6m = 5m}$




*Exemplo para duas dimensões (2D) no espaço (eixo-x e eixo-y)*

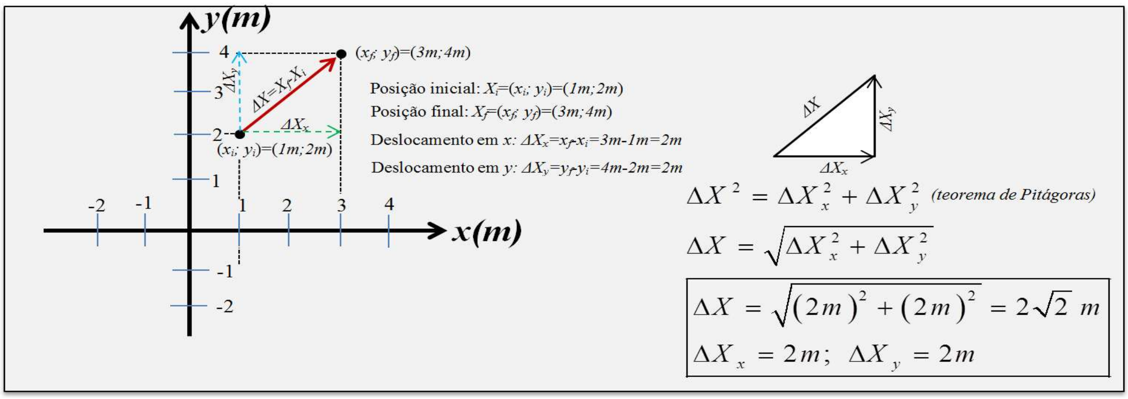
**E.7)** Calcular o módulo dos deslocamentos $\Delta X_x$, $\Delta X_y$ e $\Delta X$, de uma partícula que sai da posição inicial (*1m*; *2m*) até a posição final (*3m*;*4m*).

$$\Delta X_x = x_f - x_i = 3m - 1m = \boxed{2m}$$

$$\Delta X_y = y_f - y_i = 4m - 2m = \boxed{2m}$$

$$\Delta X = (2m;\, 2m)$$

$$\Delta X = \sqrt{\Delta X_x^2 + \Delta X_y^2} = \sqrt{(2m)^2 + (2m)^2} = 2\sqrt{2}m \text{ (teorema de Pitágoras).}$$




**E.8)** Calcular o módulo dos deslocamentos $\Delta X_x$, $\Delta X_y$ e $\Delta X$, de uma partícula que sai da posição inicial (*1m; 2m*) até a posição final (*-2m;-2m*).

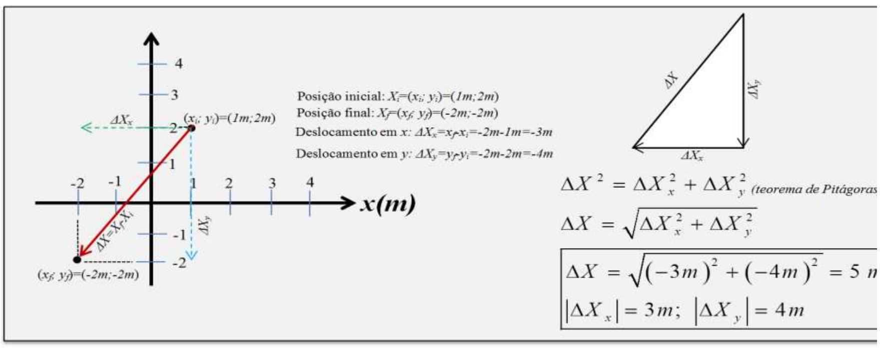
*Solução:*

$$\Delta X_x = x_f - x_i = -2m - 1m = \boxed{-3m} \Rightarrow |\Delta X_x| = 3m$$

$$\Delta X_y = y_f - y_i = -2m - 2m = \boxed{-4m} \Rightarrow |\Delta X_y| = 4m$$

$$\Delta X = \sqrt{\Delta X_x^2 + \Delta X_y^2} = \sqrt{(-3m)^2 + (-4m)^2} = 5m$$

(aqui usamos o teorema de Pitágoras).



**Velocidade média (υ)** - Associamos o deslocamento a dois instantes de tempos diferentes. A posição inicial $x_i$ corresponde ao instante de tempo inicial $t_i$. A posição final $x_f$ corresponde ao instante de tempo final $t_f$. A velocidade média indica o quanto o deslocamento $\Delta X$ varia em função da variação do tempo $\Delta T$. Definição:

$$\upsilon = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i}, \qquad (m/s) \tag{1.8}$$

a unidade de velocidade no SIU é o *m/s* (metro por segundo). Para uma velocidade média de $\upsilon$=*5m/s*, significa que o *deslocamento* (ou espaço) varia *5m* a cada segundo. Neste caso, como a velocidade é positiva, o *deslocamento* aumenta em ralação ao referencial (origem ou o ponto zero) adotado. Para uma velocidade de $\upsilon$=-*3m/s* significa que o *deslocamento* varia *3m* a cada segundo no sentido oposto ao positivo do referencial adotado. Para velocidade negativa, o *deslocamento* diminui em relação à origem do referencial adotado.

**A velocidade instantânea (υ(t))** - a velocidade média é associada a dois instantes de tempo diferentes. Mas, o que acontece quando esses instantes colapsam em apenas um instante de tempo? Fazendo isso, vamos ter a velocidade instantânea, que agora é associada a apenas um instante de tempo. A velocidade instantânea é o limite quando o tempo final *tende* para o tempo inicial: $t_{final} \to t_{inicial}$. Representamos essa tendência por um limite, da forma $t_{final} = t_{inicial} + \Delta t$, onde o $t_{final} \to t_{inicial}$, quando $\Delta t \to 0$. Logo,

$$\upsilon(t) = \lim_{t_f \to t_i} \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{dx}{dt} \qquad (m/s),$$

$$\boxed{\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad (m/s)} \text{ Derivada do espaço em função do tempo.} \tag{1.9}$$

**Aceleração média (a)** - é a taxa de variação da velocidade média $\Delta\upsilon$ em função da variação de tempo $\Delta T$. Assim como velocidade é a taxa de variação do espaço em função do tempo. A aceleração indica o quando a velocidade varia por unidade de tempo. Definição:

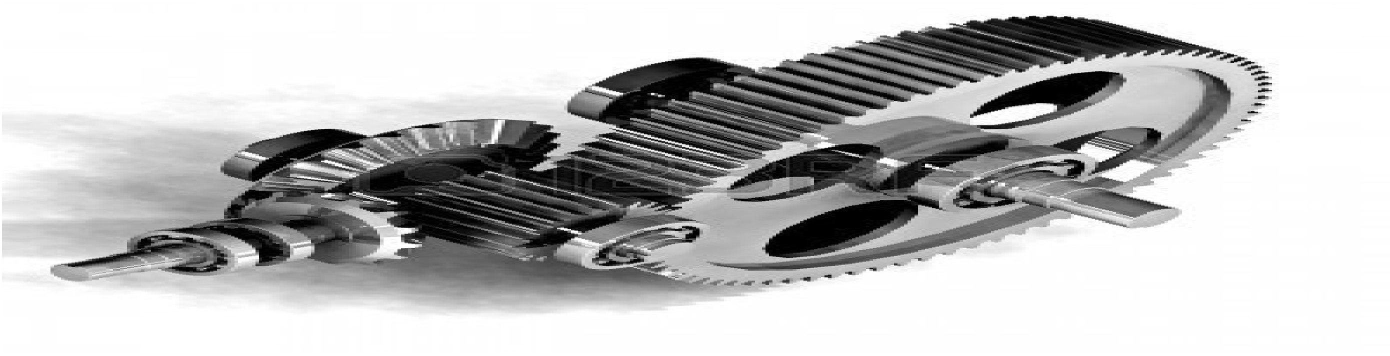
$$\boxed{a = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_f - \upsilon_i}{t_f - t_i} = \frac{\upsilon(t_f) - \upsilon(t_i)}{t_f - t_i}, \qquad (m/s^2)} \tag{1.10}$$

a unidade de acelerarão no SIU é o metro por segundo ao quadrado ($m/s^2$). Para uma aceleração média de 10$m/s^2$, significa que a velocidade aumenta, em relação à origem do referencial adotado, *10m/s* por segundo. Para uma aceleração média de -5 $m/s^2$ significa que a velocidade diminui *5m/s* a cada segundo, em relação à origem do referencial adotado.

**Aceleração instantânea (a(t))** – de forma análoga a velocidade instantânea, pode-se mostrar que a aceleração instantânea vale

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\upsilon(t+\Delta t) - \upsilon(t)}{t + \Delta t - t} \Rightarrow \boxed{a(t) = \frac{d\upsilon(t)}{dt}, \qquad (m/s^2)} \tag{1.11}$$

# Força e Leis de Newton



São três leis que regem a dinâmica de um corpo quando este interage com outros corpos. As leis de Newton são baseadas no conceito de *Força* e como esta atua sobre um corpo e modifica o seu estado de movimento. Força é sempre o produto da interação de dois ou mais corpos. Um corpo não pode interagir com ele mesmo. O papel da força atuando sobre um corpo é que essa pode alterar o estado de movimento do corpo. Essa alteração pode ser grande ou pequena, a depender a propriedade do corpo, pois este oferece resistência a mudar o seu estado de movimento. Portanto, as leis de Newton lidam em quantificar essas alterações. Vamos agora a definição de força e sua representação.

## Definição e representação de Força

Força no sentido geral pode ser considerada como sendo um puxão ( $\boxed{m} \rightarrow$ ) ou um empurrão ( $\rightarrow \boxed{m}$ ). Pode ser de origem gravitacional, que é a força peso, elétrica, magnética (forças que atuam a longas distâncias). Também existem as forças de contato físico, tais como: força Normal; de Atrito, etc. Força é uma grandeza vetorial, que possui *direção*, *sentido* e *módulo (ou magnitude)*. Grandezas escalares possuem apenas módulo, como, por exemplo: área=5m$^2$, pressão=40N/m$^2$, volume=5m$^3$=5000L, temperatura=40ºC, etc.

Uma força será representada por uma ‘flecha’. Essa flecha terá a missão de quantificar o ***módulo*** da força pelo seu tamanho; a ***direção*** da força pela sua orientação no espaço e o ***sentido*** da força pela seta da flecha. Veja uma ilustração no quadro ao lado.


## Força Inclinada

Quando aparecer uma força $\boldsymbol{F}$ inclinada em relação ao eixo-x e y, essa força $\boldsymbol{F}$ deve ser decomposta nesses eixos. Essas forças projetadas (decompostas) nos eixos são chamadas de **COMPONENTES** da força F, que são **componente *x*** e a **componente *y***, ou seja, $\boldsymbol{F_x}$ e $\boldsymbol{F_y}$, respectivamente. Essas componentes são as representantes da força $\boldsymbol{F}$. Atuando sobre o corpo *m*, a força $\boldsymbol{F}$ pode se a inclinada ou as suas componentes ($\boldsymbol{F_x}$ e $\boldsymbol{F_y}$), mas <u>nunca</u> as duas coisas ao mesmo tempo.

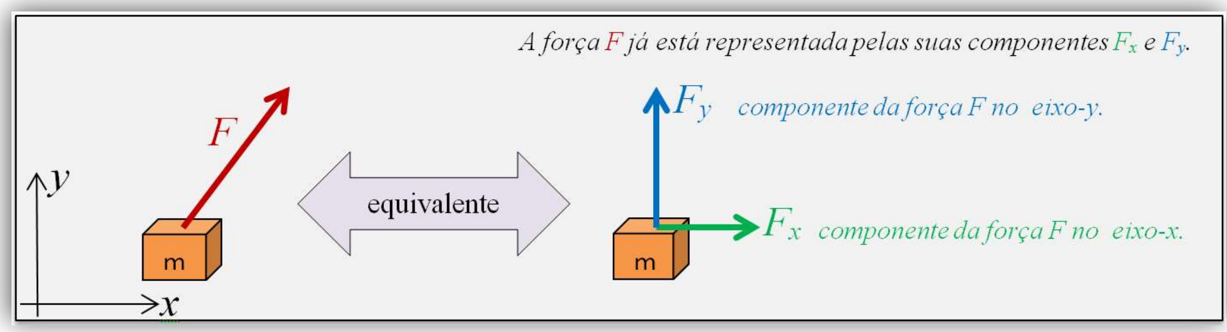



**Figura 3** – Na figura à esquerda, tem-se uma força inclinada $\boldsymbol{F}$ atuando sobre o bloco de massa $m$. Na figura à direita, a força inclinada $\boldsymbol{F}$ já está representada pelas suas componentes $\boldsymbol{F_x}$ e $\boldsymbol{F_y}$, projeção da força $\boldsymbol{F}$ no eixo x e y, respectivamente.

## ➢ Determinação do sentido das componentes da força inclinada

Vamos usar a regra do paralelogramo para determinar o sentido correto das componentes $F_x$ e $F_y$. A regra consiste em colocar a força $\boldsymbol{F}$ na diagonal de um retângulo com um lado paralelo ao *eixo-x* e o outro lado paralelo ao *eixo-y* do referencial adotado. As componentes ($F_x$ e $F_y$) apontam no mesmo sentido da força $F$ projetada nos eixos x e y (Figura 4). Fique atento para determinar o sentido correto das componentes $F_x$ e $F_y$, pois quando você for aplicar as leis de Newton, o sentido da componente irá dizer se esta é positiva ou negativa em relação ao referencial (sistema de coordenadas cartesiano) adotado por você.

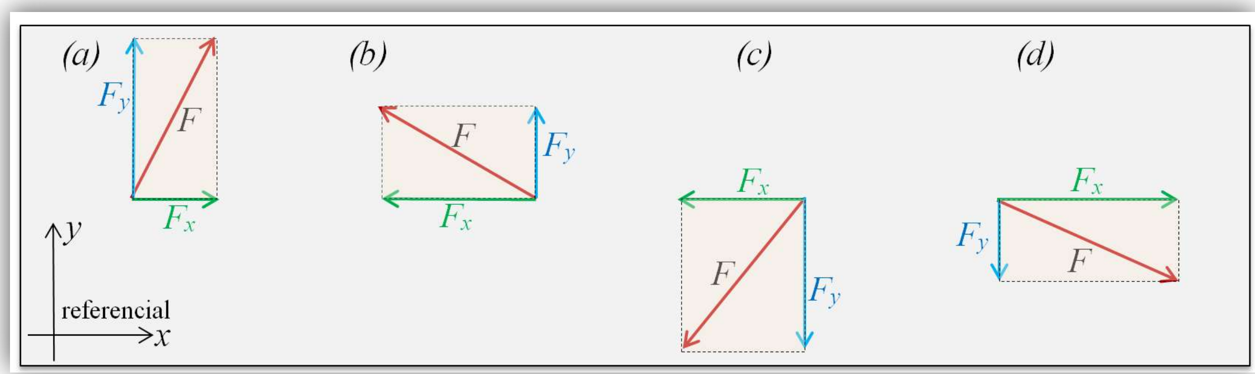



**Figura 4** – Regra do paralelogramo para a determinação (direção e sentido) das componentes $x$ e $y$ da força inclinada. Na fig.($a$), a componente $F_x$ aponta para direita e a componente $F_y$ aponta para cima. Essas duas componentes irão contribuir com sinal positivo, de acordo com o referencial adotado no canto esquerdo da figura. Na fig.(b), $F_x$ é negativa e $F_y$ é positiva. Em fig.(c), temos $F_x$ e $F_y$ negativas. Já em fig.(d), $F_x$ é positiva e $F_y$ é negativa.

## ➢ Determinação do módulo das componentes da força inclinada

O módulo das componentes é determinado pela relação de seno e cosseno de um triângulo retângulo e também pelo teorema de Pitágoras. As relações de triângulo estão representadas nas Figura 5 e Figura 6. Da geometria, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º e um triângulo retângulo possui um ângulo interno que vale 90º, portanto, a soma dos outros dois ângulos deve ser igual a 90º para totalizar os 180º.

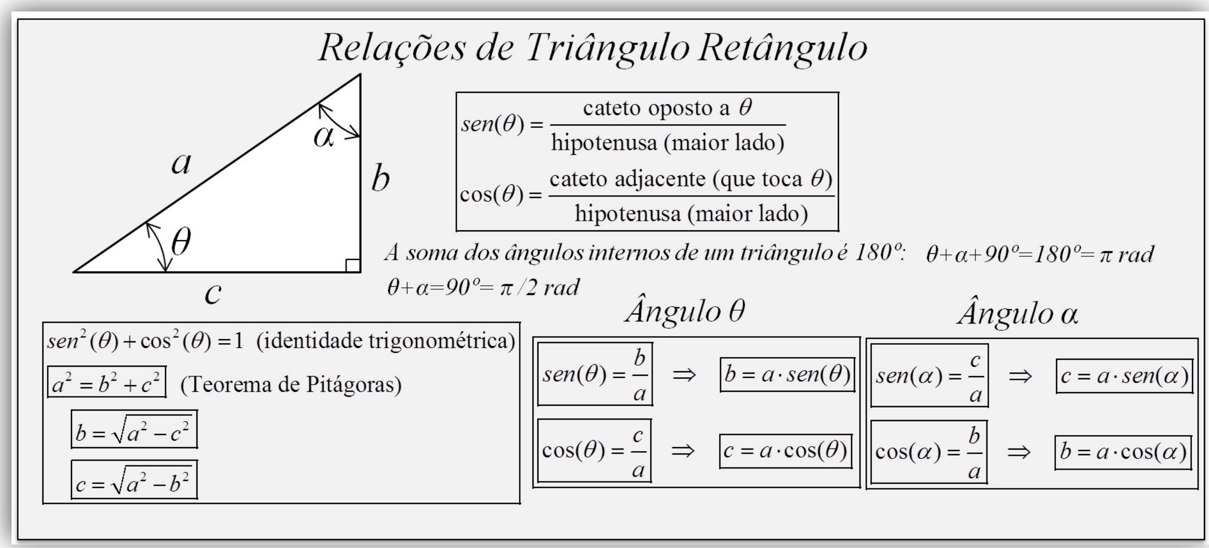



**Figura 5** – Relações de triângulo retângulo para determinação do módulo das componentes da força inclinada.

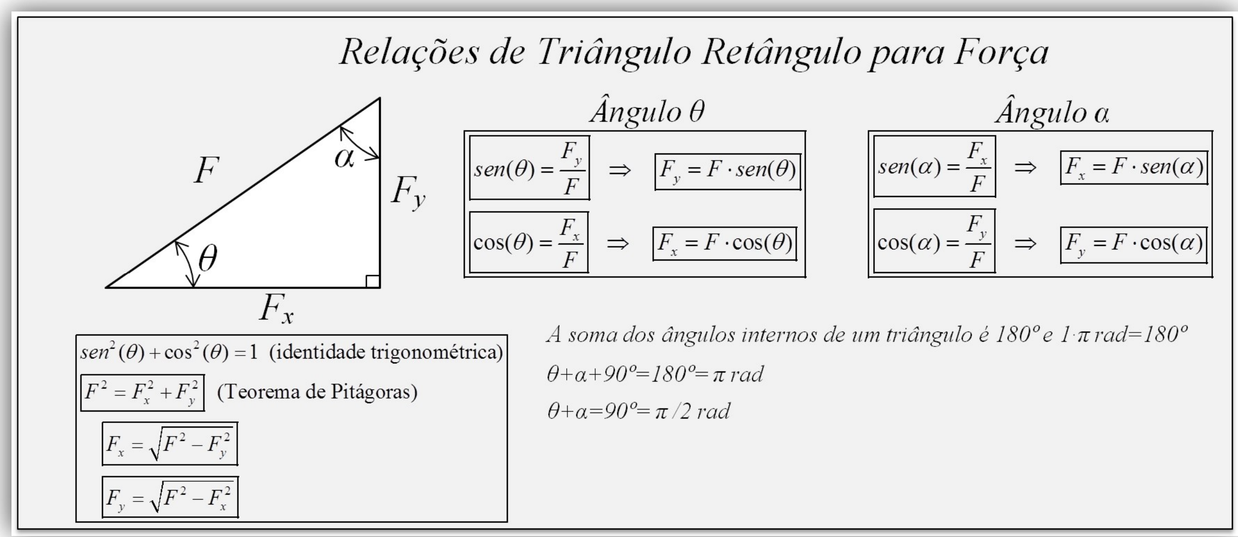



Figura 6 – Relações de triângulo retângulo para o cálculo da componente $\boldsymbol{F_x}$ e $\boldsymbol{F_y}$ da força inclinada $\boldsymbol{F}$. Esta fica sempre na diagonal do retângulo de forças.

## Força Resultante ($F_R$)

Quando mais de uma força externa atua sobre um corpo, devemos levar em conta a força resultante, que é o somatório de todas as forças externas que atuam sobre o corpo. Para se calcular a força resultante $F_R$, devemos somar todas as forças externas que atuam sobre o corpo, da forma

$$\boxed{F_R = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i}.$$

Para duas dimensões ($x$ e $y$), devemos calcular a força resultante na direção $x$ e na direção $y$. Para $n$ forças externas atuando sobre o corpo, a força resultante em cada eixo é:

$$\boxed{\text{direção x:} \quad \rightarrow \sum_{i=1}^{n} F_{i(x)} = F_{R(x)}},$$

$$\boxed{\text{direção y:} \quad \uparrow \sum_{i=1}^{n} F_{i(y)} = F_{R(y)}}.$$

O sinal positivo e negativo das forças vai depender da escolha do sentido positivo do seu referencial adotado (sistema de coordenadas cartesiano). Veja um exemplo ilustrativo na Figura 7, para uma dimensão (*eixo-x*), de duas forças externas (**$F_1$** e **$F_2$**) atuando sobre um bloco de massa *m* e a sua respectiva força resultante **$F_R=F_1+F_2$**.

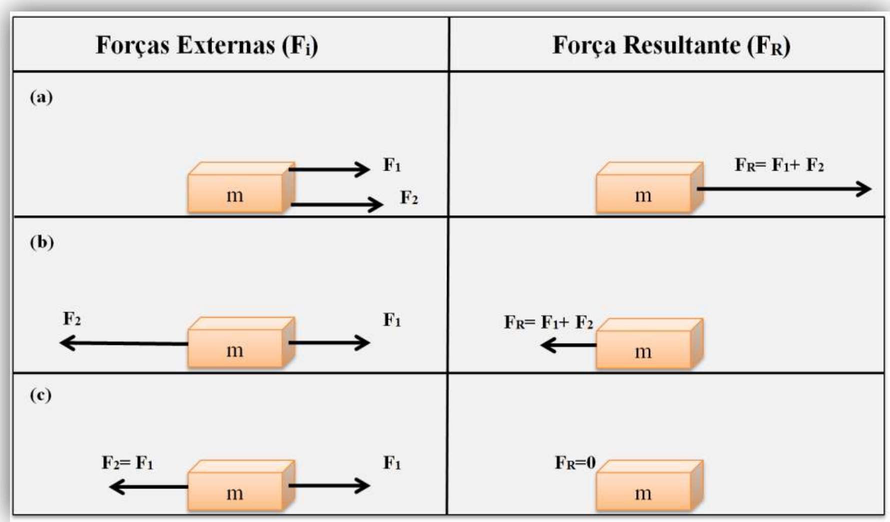



**Figura 7** – Duas forças externas aplicadas sobre o corpo, figura à esquerda. Nas figuras à direita, tem-se a força resultante que é o somatório das forças externas.

## 1ª Lei de Newton

"Todo corpo permanece no seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta (sem mudar de direção) quando a força resultante que atua nesse corpo for igual a zero".

Portanto, o corpo se encontra em equilíbro estático (parado) ou dinâmico (se movendo em linha reta com velocidade constante) quando nenhuma força externa atua nesse corpo ou quando a força resultante é igual a zero. Esta lei é empregada na condição de equilíbro estático ou dinâmico. Esta lei também implica que a força é a causa da variação do estado de movimento de um corpo (variação na velocidade $\Delta\upsilon$) e não necessariamente a causa do movimento, pois o corpo já pode estar se movendo em linha reta com velocidade constante.

### Condição para Equilíbrio Estático e Dinâmico e a Essência da 1ª Lei de Newton

Um corpo se encontra em **equilíbrio estático** (em repouso) ou em **equilíbrio dinâmico** (corpo se movendo em linha reta com velocidade constante) quando a força resultante que atua nesse corpo for zero $\boldsymbol{F_R=0}$.

Para equilíbro na *direção-x*, devemos ter que

$$\boxed{\overset{+}{\rightarrow} \sum F_{ext(x)} = F_{R(x)} = 0}, \qquad (1.12)$$

a seta $\rightarrow$ é para indicar o sentido positivo. Para o equilíbrio na *direção-y*,

$$\boxed{+\uparrow\sum F_{ext(y)}=F_{R(y)}=0}. \quad (1.13)$$

O que acontece quando a força resultante é diferente de zero? Essa pergunta é respondida pela segunda lei de Newton, vista a seguir.

## 2ª Lei de Newton

É uma força resultante não nula ($F_R \neq 0$) que provoca uma variação no estado de movimento do corpo, provoca uma aceleração na mesma direção e sentido da força resultante. A propriedade que um corpo possui de resistir a uma variação no seu estado de movimento é denominada de ***Inércia***. Quanto maior for a inércia de um corpo, mais difícil é variar o seu estado de movimento (variar a sua velocidade υ). Para o movimento de translação, a inércia de um corpo é representada pela sua massa $\boldsymbol{m}$. A relação entre força resultante ($F_R$), Inercia ($m$) e variação do estado de movimento ($a_R=\frac{\Delta v}{\Delta t}$) é dada pela Segunda Lei de Newton,

$$\boxed{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} F_{ext(i)}}_{\text{somatória das } n \text{ forças externas}} = \underbrace{F_R}_{\text{força resultante}} = \underbrace{m}_{\text{massa= Inércia}} \cdot \underbrace{a_R}_{\text{aceleração resultante}} \qquad (N)}. \quad (1.14)$$

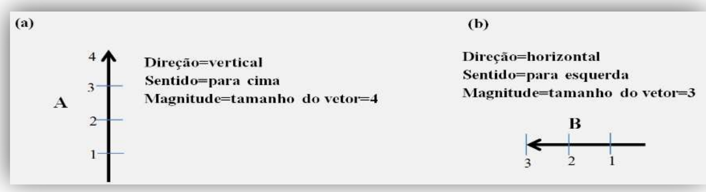
A unidade de força é o Newton (***N***), que é uma combinação de unidades elementares: $1N=1kg{\cdot}m/s^2$. A equação (1.14) significa que uma força resultante imprime sobre o corpo de massa $m$ uma aceleração resultante $a_R$. Essa aceleração será grande se a massa do corpo for pequena, e essa aceleração será pequena se a massa do corpo for grande ($a_R=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{F_R}{m}$). Massa é uma propriedade do corpo de resistir a uma variação no seu estado de movimento de translação.

Força é uma quantidade vetorial, portanto, deve ser tratada como tal. Um vetor é um objeto matemático que possui: *direção* (direção no espaço), *sentido* (para onde é que aponta) e *módulo (tamanho do objeto)*. Para um movimento em duas dimensões (*eixo-x*, *eixo-y*), temos que aplicar a segunda lei de Newton na direção-x e na direção-y,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{direção x:} & \overset{+}{\rightarrow}\sum_{i=1}^{n} F_{i(x)} = F_{R(x)} = m\cdot a_{R(x)} \\ \text{direção y:} & +\uparrow\sum_{i=1}^{n} F_{i(y)} = F_{R(y)} = m\cdot a_{R(y)} \end{array}}, \quad (1.15)$$

onde $F_{R(x)}$, $F_{R(y)}$ são as forças resultantes nas direções $x$ e $y$, assim como $a_{R(x)}$ e $a_{R(y)}$ são as acelerações resultantes nas direções $x$ e $y$. A seta, antes do somatório $\sum$, é para indicar o sentido positivo. Os movimentos, em cada eixo, são independentes, pois a partícula pode estar se movendo na direção $x$ e parada na direção $y$ ou vice-versa. Uma boa parte dos problemas consiste em determinar a aceleração resultante ou uma força desconhecida. A força e aceleração resultante em termos dos vetores unitários $\hat{\imath}$ (direção no eixo $x$) e $\hat{\jmath}$ (direção no eixo $y$) é dada por $\overline{F_R}=F_{R(x)}\cdot\hat{\imath}+F_{R(y)}\cdot\hat{\jmath}$ e a aceleração resultante $\overline{a_R}=a_{R(x)}\cdot\hat{\imath}+a_{R(y)}\cdot\hat{\jmath}=\frac{\overline{F_R}}{m}=\frac{F_{R(x)}}{m}\cdot\hat{\imath}+\frac{F_{R(y)}}{m}\cdot\hat{\jmath}$.

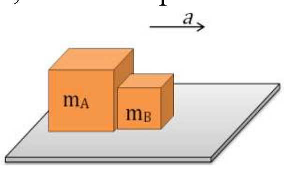
Exemplo de vetores: Na figura ao lado, considere **A** e ***B*** como sendo vetores que possuem: direção, sentido e magnitude (tamanho do vetor). O vetor **A** está na *direção* vertical e o seu *sentido* é apontando para cima. Já a sua magnitude (tamanho do vetor) vale **4**.O vetor **B** está na *direção* horizontal, o seu *sentido* é apontando para esquerda e o seu tamanho é 3.

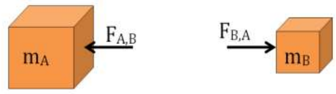



## 3ª Lei de Newton

A terceira lei de Newton pode ser enunciada da seguinte maneira: “sempre que um corpo exerce uma força sobre outro corpo, este exerce uma força igual (direção e módulo) e de sentido oposto sobre o primeiro corpo”. É o chamado principio da ação e reação. Força sempre aparece aos pares: se uma é a ação a outra é a reação, ambas atuando em corpos diferentes. Veja a seguir, dois exemplos.

♣ Na figura ao lado, dois blocos **A** e **B** estão em contato, cada bloco possui massa $m_A$ e $m_B$, respectivamente. Estes blocos estão se movendo para direita. Isolando os dois blocos, a força $\mathbf{F_{A,B}}$ é a força sobre o bloco **A** exercida pelo **B**. E $\mathbf{F_{B,A}}$ é a força sobre o bloco **B** exercida pelo bloco **A.** Essas forças representam o par *ação e reação*. O bloco **A**

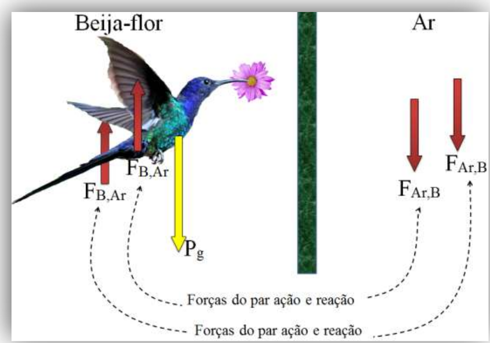



$\mathbf{F_{A,B}}$=força sobre **A** exercida por **B**
$\mathbf{F_{B,A}}$= força sobre **B** exercida por **A**

empurra o bloco **B** com uma força $\mathbf{F_{B,A}}$ e o bloco **B** reage com uma força igual (em módulo e direção, mas no sentido contrário) $\mathbf{F_{A,B}}$ sobre o bloco **A**. Portanto $\mathbf{F_{A,B}=-\ F_{B,A}}$ iguais em módulo e direção, mas de sentido oposto. Para saber identificar corretamente essas forças do par ação e reação, é de grande utilizado recorrer ao conceito de reação normal (que será visto mais adiante), que é uma força de contato físico de um corpo com uma ‘superficie’ que é o outro corpo e vice-versa.

♣ O beija-flor (**B**), com suas asas, empurra o ar (**Ar**) para baixo ($\mathbf{F_{Ar,B}}$) e o ar reage empurrando o beija-flor para cima ($\mathbf{F_{B,Ar}}$). Essa força para cima é para equilibrar a força peso ($\mathbf{P_g}$) e o beija-flor ficar imóvel no ar. Quando você vê um beija-flor imóvel no ar, batendo as suas asas, saiba que são as leis de Newton em ação. $F_{B,Ar}$ é a força externa atuando no beija-flor(**B**) exercida pelo ar (**Ar**). $F_{Ar,B}$ é a força que atua no ar (**Ar**) que é exercida pelo beija-flor (**B**). Estas duas forças correspondem ao par *ação e reação*, pois atuam em corpos diferentes: **Beija-flor** e **Ar**. A força $\mathbf{P_g}$ é a força peso do beija-flor. Observe que as forças $\mathbf{F_{B,Ar}}$ e $\mathbf{P_g}$ não são forças do par *ação e reação*, pois atuam no mesmo corpo: o beija-flor (**B**).




$\mathbf{F_{B,Ar}= -\ F_{Ar,B}}$ (ação e reação)
$\mathbf{F_{B,Ar}}$=força sobre o Beija-flor (***B***) exercida pelo (***Ar***)***.***
$\mathbf{F_{Ar,B}}$= força sobre o (**Ar**) exercida pelo Beija-flor (***B***).

## Resumo das leis de Newton

**1ª Lei: Se um corpo se encontra em equilíbrio estático (parado) ou dinâmico (se movimendo em linha reta com velocidade constante) é porque $\boxed{F_R = 0}$ (a força resultante é igual a zero). Força resultante é o somatório de todas as forças externas que atuam no corpo.**

**2ª Lei: Se $F_R \neq 0$ então $\boxed{F_R = m \cdot a_R}$ o corpo se encontra acelerado, com aceleração $\boxed{a_R = \frac{F_R}{m}}$.**

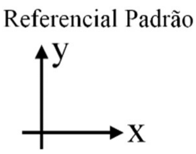
**3ª Lei: Princípio da ação e reação: Força sempre aparece aos pares: uma é a ação e a outra a reação. Ambas são iguais em módulo e direção, mas de sentidos opostos (□→(ação) e (reação)←◊).**

Para se aplicar as leis de Newton, é necessário conhecer as forças externas que atuam sobre o corpo em análise. As forças externas são relevadas pelo diagrama de corpo livre, definido a seguir.

## Diagrama de Corpo Livre (D.C.L.)

O diagrama de corpo livre (D.C.L.) consiste em isolar o corpo que se deseja analisar e colocar sobre esse corpo todas as forças externas que atuam sobre o mesmo. Quando um corpo se encontra sobre uma superfície, podemos substituir essa superfície por uma força atuando sobre o corpo. Quando um corpo está pendurado por um cabo, podemos substituir esse cabo por uma força atuando no corpo, isso é o que consiste o diagrama de corpo livre, é substituir todos os vínculos externos por forças. A seguir, serão descritas as principais forças externas que podem aparecer atuando sobre o corpo (ou partícula ou bloco, etc).

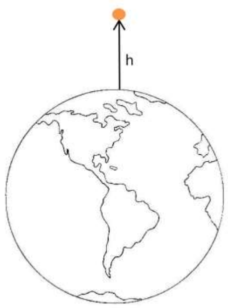
Depois de feito o D.C.L. o passo seguinte e escolher o referencial e em seguida aplicar as leis de Newton para a determinação das incógnitas do problema. Se outro referencial não for mencionado, o referencial padrão adotado será o da figura ao lado.

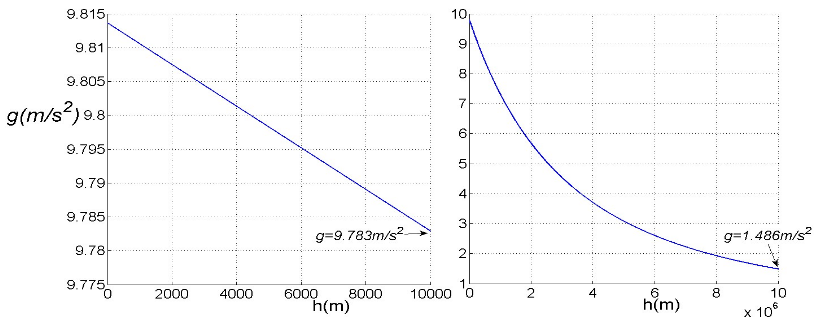



**1 - Força Peso ($P_g$):** Força devido à interação (atração gravitacional) do corpo (ou partícula) *m* com o planeta terra. A *direção* da força é sempre na vertical e seu *sentido* é de cima para baixo. Todo corpo que possui massa, vai existir uma força peso atuando sobre o mesmo. O módulo (ou magnitude) da força peso é

$$\boxed{P_g = m \cdot g \qquad (N)} \quad \downarrow g \qquad (1.16)$$

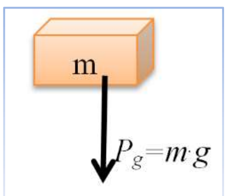
onde $m$=massa do corpo [m]=kg e $g$=aceleração da gravidade **g=*10m/s²*** (próximo à superfície da terra). O valor mais preciso para g é $9,81m/s^2$, mas por simplificação, vamos arredondar para $10m/s^2$. A aceleração da gravidade diminui com a altura $h$, portanto o valor de ***g*** que vamos adotar aqui é válido apenas para regiões próximas à superfície da terra. Veja que o peso de um corpo pode até ser zero, caso esse corpo esteja muito, muito afastado de um planeta. O que é invariante é a massa do corpo. Se a massa de um corpo é 70kg, essa massa é a mesma em qualquer planeta, ou até mesmo em regiões longínquas de planetas, onde o seu peso é zero. O peso é zero quando *g* é zero, e não a massa *m*.



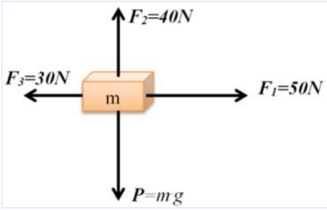

Para alturas próximas à superfície da terra, o valor de g varia muito pouco. Veja que para uma altura de 10000m (10km) o valor de g vale $9,78m/s^2$, que é uma redução de menos de 0,3%. Já para uma altura de $10^7$m, o valor de g é $1,48\ m/s^2$ que representa uma redução bem apreciável de 85%.

Exemplo: *D.C.L.* de um corpo de massa ***m*** caindo ou subindo (ver figura ao lado). A única força externa que atua sobre o corpo é a força peso, que aponta para baixo, e por isso o corpo acelera para baixo, ou desacelera para cima, sua velocidade aumenta de cima para baixo e diminui de baixo para cima;



Para um corpo de massa $m=10kg$, a força peso que atua sobre o corpo é $P=10kg\,10m/s^2= 100N$. Se um corpo pesa ***700N***, sua massa pode ser calculada por: $P_g = m\cdot g \Rightarrow m = P_g / g = 700N/10m/s^2 = 70kg$ .

**2 - Força Aplicada ($F_i$):** É um tipo de força que já vai aparecer aplicada sobre o corpo. A sua direção e sentido já é relevada sobre o corpo no qual a força atua. Na figura ao lado, a força $F_1$ está na *direção* horizontal, o seu *sentido* é da esquerda para direita ($\rightarrow$) e o seu módulo é 50N. A força $F_2$ está na *direção* vertical, o seu *sentido* é de *baixo para cima* ($\uparrow$) e a sua magnitude é *40N*.
Neste exemplo de Corpo Livre, $F_1$, $F_2$ e $F_3$ (ver figura à direita) são forças aplicadas. A força peso ***P*** sempre atua sobre o corpo.



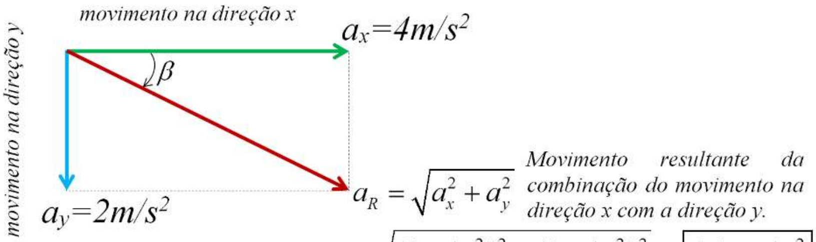

E.1) Dado que a massa do corpo da figura acima *é m=5kg*, calcule a aceleração na *direção-x* e na *direção-y*. *Solução: Usando o D.C.L. já na figura, usando o referencial padrão e aplicando a segunda lei de Newton para a direção-x e direção- y:*

(direção-x): $\overset{+}{\rightarrow}\sum F_{ext(x)} = F_{R(x)} = m\cdot a_x \Rightarrow -\overset{\leftarrow}{30N} + \overset{\rightarrow}{50N} = 5kg\cdot a_x \Rightarrow 20N = 5kg\cdot a_x \Rightarrow a_x = \dfrac{20N}{5kg} = \boxed{4m/s^2}$

(direção-y): $+\uparrow\sum F_{ext(y)} = F_{R(y)} = m\cdot a_y \Rightarrow +\overset{\uparrow}{40N} - \underbrace{\overset{\downarrow}{50N}}_{m\cdot g} = 5kg\cdot a_y \Rightarrow -10N = 5kg\cdot a_y \Rightarrow a_y = \dfrac{-10N}{5kg} = \boxed{-2m/s^2}$.

O sinal negativo de $a_y$ indica que a aceleração aponta para baixo $\downarrow$, sentido contrário ao positivo $\uparrow$.

Neste exemplo, o corpo está acelerado na direção *x* e na direção *y*. A aceleração resultante $a_R$ é a combinação dessas acelerações (ver figura ao lado). A direção de $a_R$ pode ser obtida da forma: $tg(\beta) = \dfrac{a_y}{a_x} = \dfrac{2m/s^2}{4m/s^2} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \beta = tg^{-1}(0{,}5) = 26{,}6^o$




$a_R = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(4m/s^2)^2 + (2m/s^2)^2} = \boxed{4.47m/s^2}$

**3 - Reação Normal (ℕ)**: É uma força exercida pela superfície sobre um corpo em contato com a mesma. O termo "normal" é para indicar que a *direção* da força é sempre perpendicular à superfície de contato e aponta (*sentido da força*) da superfície para o corpo. Este conceito deve ficar claro, pois esse tipo de reação será muito usado quando estudarmos Fluidos. Também pode ser aplicada para determinar as forças do par ação e reação entre o contato físico de dois corpos. Veja alguns exemplos, nas figuras seguintes, sobre reação normal.

***Exemplo 1)*** Quando um corpo estiver em contato físico com uma superfície, haverá uma reação normal perpendicular à superfície de contato e apontando da superfície para o corpo, veja no D.C.L. ao lado da Figura 8.

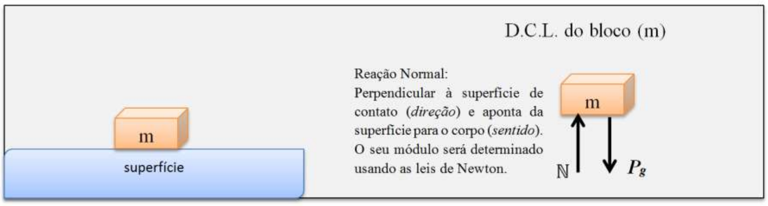



**Figura 8** – Para um corpo em contato com a superfície, haverá uma reação normal perpendicular a superfície de contato e apontando da superfície para o corpo, veja no D.C.L. ao lado.

**E.1)** Dado que a massa do corpo *m=10kg*, calcule a reação normal N da Figura 8.

*Solução: Usando o D.C.L. no lado direito da figura, usando o referencial padrão e aplicando a primeira lei de Newton:* $+\uparrow\sum F_{ext(y)} = F_{R(y)} = 0$ (equilíbrio estático) $\Rightarrow \overset{\uparrow}{\mathbb{N}} - \overset{\downarrow}{P_g} = 0 \Rightarrow \mathbb{N} = P_g \Rightarrow \boxed{\mathbb{N} = 10kg \cdot 10m/s^2 = 100N}$.

***Exemplo 2)*** Quando um corpo estiver em contato com várias superfícies, deve-se atribuir uma reação normal a cada ponto de contato com a superfície. Vamos precisar rotular as reações, neste exemplo, foi chamado $N_1$ reação normal devido o contado com a superfície 1, $N_2$ reação normal devido o contado com a superfície 2. A força normal é sempre perpendicular à superfície de contato e aponta da superfície para o corpo. Na Figura 9, a Força F=50N é uma força aplicada.


**Figura 9 –** Para um corpo estiver em contato com várias superfícies, deve-se atribuir uma reação normal a cada ponto de contato com a superfície. $N_1$ é a reação normal devido o contado com a superfície 1, e assim por diante. A força normal é sempre perpendicular à superfície de contato e aponta da superfície para o corpo. A Força F=50N é uma força aplicada e $P_g$ é a força peso ($=\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{g}$).

**E.2)** Dado que a massa do corpo ***m=10kg***, calcule as reações normais da Figura 9.

*Solução: Usando o D.C.L. no lado direito da figura, usando o referencial padrão e aplicando a primeira lei de Newton:*

(direção x): $\overset{+}{\rightarrow}\sum F_{ext(x)} = F_{R(x)} = 0$ (equilíbrio estático) $\Rightarrow \overset{\rightarrow}{\mathbb{N}_2} - \overset{\leftarrow}{F} = 0 \Rightarrow \mathbb{N}_2 = F \Rightarrow \boxed{\mathbb{N}_2 = 50N}$,

(direção y): $+\uparrow\sum F_{ext(y)} = F_{R(y)} = 0$ (equilíbrio estático) $\Rightarrow \overset{\uparrow}{\mathbb{N}_1} - \overset{\downarrow}{P_g} = 0 \Rightarrow \mathbb{N}_1 = P_g \Rightarrow \boxed{\mathbb{N}_1 = 10kg \cdot 10m/s^2 = 100N}$.

***Exemplo 3)*** Não importa se a superfície é inclinada ou não. Este exemplo é para ilustrar que a reação normal é sempre perpendicular a superfície de contato, aponta da superfície para o corpo, e novamente, sempre que houver contato com uma superfície, haverá uma reação normal. Acompanhe o exemplo ilustrado na Figura 10.

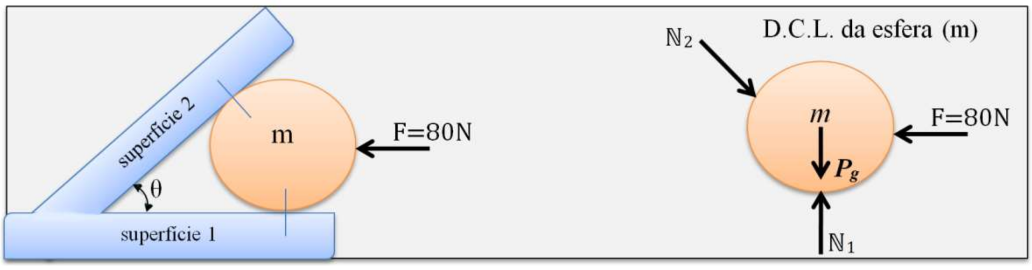



**Figura 10 –** Este exemplo é para ilustrar que a reação normal é sempre perpendicular a superfície de contato, aponta da superfície para o corpo, e novamente, sempre que houver contato com uma superfície, haverá uma reação normal. A força F=80N é uma força aplicada e $P_g$ é a força peso ($=\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{g}$).

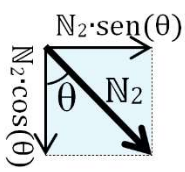
**E.3)** Dado que a massa da esfera é ***m=10kg*** e *θ=40º*, calcule as reações normais $\mathbb{N}_1$ e $\mathbb{N}_2$ da Figura 10.

*Solução: Usando o D.C.L. no lado direito da figura, usando o referencial padrão e aplicando a primeira lei de Newton na direção x e y (equilíbrio estático).*

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_{ext(x)} = F_{R(x)} = 0$ (eq. estático) $\Rightarrow \overset{\rightarrow}{\mathbb{N}_2} \cdot sen(40º) - \overset{\leftarrow}{F} = 0$,

$$\mathbb{N}_2 = \frac{F}{sen(40º)} = \frac{80N}{sen(40º)} \Rightarrow \boxed{\mathbb{N}_2 = 124{,}5N}.$$

Veja na figura ao lado, a decomposição da reação normal $N_2$, no eixo x e y.



$$+\uparrow\sum F_{ext(y)} = F_{R(y)} = 0 \text{ (equilíbrio estático)} \Rightarrow -\overset{\downarrow}{\mathbb{N}_2}\cdot\cos(40^o)+\overset{\uparrow}{\mathbb{N}_1}-\overset{\downarrow}{P_g}=0 \overset{isolar\ \mathbb{N}_1}{\Rightarrow} \mathbb{N}_1=\mathbb{N}_2\cdot\cos(40^o)+P_g \Rightarrow$$

$$\mathbb{N}_1 = 124,5N\cdot\cos(40^o)+10kg\cdot 10m/s^2 = \boxed{195,4N}.$$

***Exemplo 4)*** Reação normal é sempre devido ao contato físico com uma superfície. Temos um exemplo de dois blocos **A** e **B** (Figura 11). O bloco ***B,*** de massa $m_B$, está sobre o bloco ***A*** (de massa $m_A$) e este sobre o piso (chamado na figura de superfície). No *D.C.L.* do bloco ***B***, a superfície de contato passa ser o bloco ***A*** que exerce uma reação normal sobre o bloco ***B***, chamada de $N_{B,A}$ (reação normal sobre ***B*** devido ao corpo ***A***). Agora veja o *D.C.L.* do bloco ***A***, que está em contato com duas superfícies; o *piso* e em contato com a superfície do bloco ***B***, sendo que este exerce uma reação normal sobre o bloco ***A***, representada por $N_{A,B}$ (reação normal sobre o bloco ***A*** devido ao bloco ***B***). Reação normal é sempre devido ao contato, não importa se a superfície está abaixo ou acima do corpo. As forças $N_{A,B}$ e $N_{B,A}$ representam o par ação e reação (3ª lei de Newton). Portanto, essas forças são iguais em módulo e direção, mas de sentidos opostos.

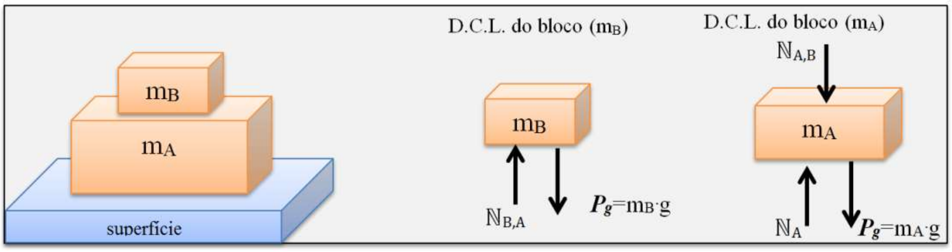



**Figura 11 –** Reação normal é sempre devido ao contato com uma superfície. Veja o *D.C.L.* do bloco ***B***, em contato com a superfície do bloco ***A*** que exerce uma reação normal sobre o bloco ***B***, chamada de $\boldsymbol{N_{B,A}}$ (reação normal sobre ***B*** devido ao corpo ***A***). Agora veja o D.C.L. do bloco A, que esta em contato com a superfície, que é o chão, e em contato com a superfície do bloco B, que este exerce uma reação normal sobre o bloco A, representada por $N_{A,B}$ (reação normal sobre o bloco A devido ao bloco B). As forças $N_{A,B}$ e $N_{B,A}$ representam o par ação e reação (3ª lei de Newton).

**E.4)** Dado que a massa do bloco A é $\boldsymbol{m_A=10kg}$ e do bloco B vale $\boldsymbol{m_B=5kg}$, calcule as reações normais $\mathbb{N}_{B,A}$ e $\mathbb{N}_A$ da Figura 11.

*Solução: Usando o D.C.L. no lado direito da figura, usando o referencial padrão e aplicando a primeira lei de Newton (equilíbrio estático):*

*Bloco ($m_B$)*

$$+\uparrow\sum F_{ext(y)} = F_{R(y)} = 0 \text{ (eq. estático)} \Rightarrow \overset{\uparrow}{\mathbb{N}_{B,A}} - \overset{\downarrow}{P_{g,B}} = 0,$$

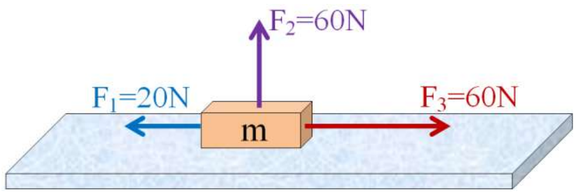
$$\mathbb{N}_{B,A} = m_B\cdot g = 5kg\cdot 10m/s^2 = \boxed{50N}.$$

*Bloco ($m_A$)*

$$+\uparrow\sum F_{ext(y)} = F_{R(y)} = 0 \text{ (eq. estático)} \Rightarrow \overset{\uparrow}{\mathbb{N}_A} - \underbrace{\overset{\downarrow}{\mathbb{N}_{A,B}}}_{=\mathbb{N}_{B,A}(3^a Lei)} - \overset{\downarrow}{P_{g,A}} = 0,$$

$$\mathbb{N}_A = \underbrace{\mathbb{N}_{A,B}}_{m_B\cdot g} + m_A\cdot g = (m_B+m_A)\cdot g = (5kg+10kg)\cdot 10m/s^2 = \boxed{150N}$$

**E.5)** Calcule a aceleração e reação normal do bloco sujeito a três forças aplicadas, ver figura ao lado, dado que:
a) a massa do bloco é *m=8kg*.
b) a massa do bloco é *m=4kg*.



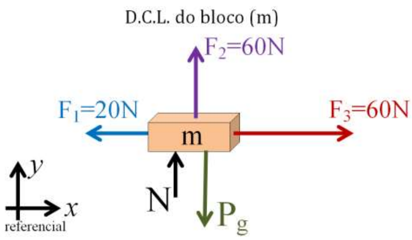

*Solução*:
a) para *m=8kg*. Veja o D.C.L. do bloco *m* na figura ao lado direito.

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_{ext(x)} = m\cdot a_x \Rightarrow -\overset{\leftarrow}{20}N + \overset{\rightarrow}{60}N = 8kg\cdot a_x \Rightarrow 40N = 8kg\cdot a_x \Rightarrow a_x = \frac{40N}{8kg} = \boxed{+5m/s^2}$$

O sinal positivo de $a_x$ indica que a aceleração aponta para direita $\rightarrow$.

$$+\uparrow\sum F_{ext(y)} = 0 \text{(equilíbrio nessa direção)} \Rightarrow +\overset{\uparrow}{60}N - \underbrace{\overset{\downarrow}{80}N}_{m\cdot g} + \overset{\uparrow}{\mathbb{N}} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbb{N}=+20N}.\uparrow$$

O sinal positivo de $\mathbb{N}$ indica que a reação Normal aponta para cima $\uparrow$, como deveria ser.




b) para *m=4kg*.

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_{ext(x)} = m\cdot a_x \Rightarrow -\overset{\leftarrow}{20}N + \overset{\rightarrow}{60}N = 4kg\cdot a_x \Rightarrow 40N = 4kg\cdot a_x \Rightarrow a_x = \frac{40N}{4kg} = \boxed{+10m/s^2}.$$

O sinal positivo de $a_x$ indica que a aceleração aponta para direita $\rightarrow$. Sentido este, escolhido no referencial adotado.

$+\uparrow\sum F_{ext(y)} = 0$(equilíbrio nessa direção) $\Rightarrow +\overset{\uparrow}{60}N - \underbrace{\overset{\downarrow}{40}N}_{m\cdot g} + \overset{\uparrow}{\mathbb{N}} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbb{N} = -20N}$. O sinal negativo de $\mathbb{N}$ indica que a reação Normal aponta para baixo $\downarrow$, isso é impossível, essa reação Normal não existe. O bloco deve também estar acelerado na direção y:

$+\uparrow\sum F_{ext(y)} = m\cdot a_y \Rightarrow +\overset{\uparrow}{60}N - \underbrace{\overset{\downarrow}{40}N}_{m\cdot g} = 4kg\cdot a_y \Rightarrow a_y = \frac{20N}{4kg} = \boxed{+5m/s^2}$. Veja que a força $F_2$=60N por ser maior que o peso do bloco (40N), faz com que este suba com aceleração de $5m/s^2$.

**4 - Força de tração (T):** É um tipo de Força exercida por um fio ou um cabo tracionado. Essa força possui a *direção* ao longo do fio tracionado, e no D.C.L. do bloco, o *sentido* da força aponta do corpo para o fio. De uma força geral, para se determinar a força de tração em um cabo, será necessário aplicar as leis de Newton. Quando um bloco *m* se encontra pendurado por um cabo ou se movendo em linha reta com velocidade constante, será necessário aplicar a 1ª Lei de Newton impondo a condição de equilíbrio estático, *que a força resultante em qualquer direção é igual a zero.* Para blocos acelerados e puxados por um cabo, devemos aplicar a 2ª Lei de Newton sobre o bloco em estudo ($F_R = \sum_{i=1}^{n} F_{ext(i)} = m\cdot a_R$).

**Exemplo 1)** Considere um bloco de massa ***m*** pendurado por um cabo de massa desprezível (Figura 12). No D.C.L. do bloco ***m*** você deverá colocar uma força de tração devido ao cabo. Essa força aponta do corpo (bloco **m**) para o cabo (ou fio). No D.C.L. do fio (ou cabo) este deve estar tracionado. Cabo nunca pode estar comprimido, pois este não oferece resistência à compressão.

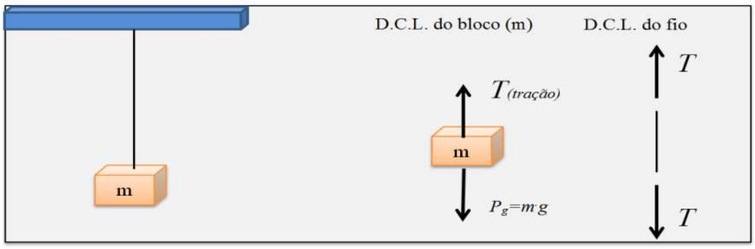



**Figura 12-** Um bloco de massa *m* pendurado por um cabo. No D.C.L. do bloco haverá uma força de tração devido ao cabo. Essa força aponta do corpo para o cabo. No D.C.L. do cabo este deve estar tracionado. Normalmente a massa do cabo é desprezada ($m_{cabo}$=0kg).

**E.1)** Dado que a massa do bloco na Figura 12 vale *m=10 kg*, calcule a tração no cabo.

*Solução: a tração vale:* $+\uparrow\sum F_{ext(y)} = \overset{\uparrow}{T} - \overset{\downarrow}{P_g} = 0$ (equilíbrio estático) $\Rightarrow T = P_g = 10kg\cdot 10m/s^2 = \boxed{100N}$.

**Exemplo 2)** Agora vamos ver como se comporta um bloco pendurado por dois cabos (*fio 1* e *fio 2*) de massas desprezíveis (Figura 13). No D.C.L. do bloco **m** você deverá colocar uma força de tração para cada cabo. Essa força deve apontar do corpo (bloco **m**) para o cabo (ou fio). Vamos chamar $T_1$ a força de tração exercida pelo *fio 1* sobre o bloco **m** e $T_2$ a força de tração exercida pelo *fio 2* sobre o bloco **m**.

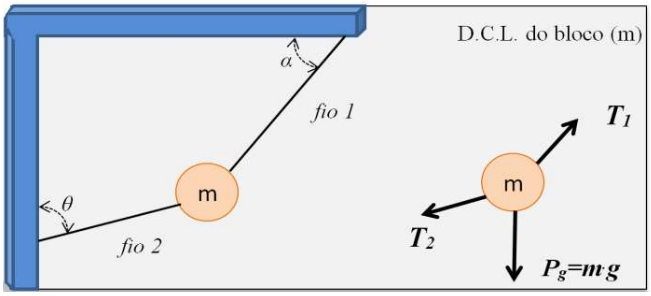



**Figura 13 –** Bloco de massa *m* pendurado por dois fios, portanto haverão duas forças de tração atuando sobre o corpo m.

**E.2)** Dado que a massa do bloco na Figura 13 é *m=10 kg*, *θ=75°* e *α=60°*, calcule a tração nos *fios 1* e *2*.

*Solução:*

$$eq.I)\ \overset{+}{\rightarrow}\sum F_{ext(x)} = \overset{\rightarrow}{T_1}\cdot\cos(\alpha) - \overset{\leftarrow}{T_2}\cdot sen(\theta) = 0 \quad \text{(equilíbrio estático na direção x),}$$

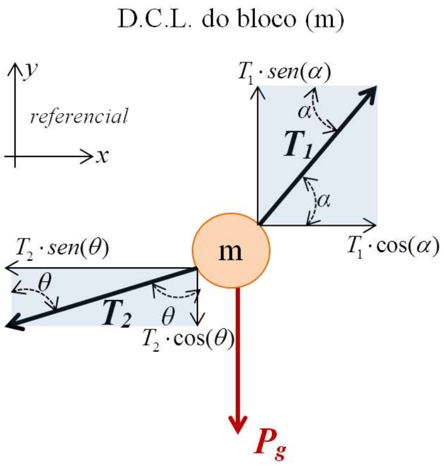
$$eq.II)\ +\uparrow\sum F_{ext(y)} = \overset{\uparrow}{T_1}\cdot sen(\alpha) - \overset{\downarrow}{P_g} - \overset{\downarrow}{T_2}\cdot\cos(\theta) = 0 \quad \text{(equilíbrio estático direção y),}$$

Da eq.I) $T_1 = \dfrac{T_2\cdot sen(\theta)}{\cos(\alpha)}$, Agora substituir na eq.II) Obs: $sen(\theta)/\cos(\theta) = tg(\theta)$

$$\left(\frac{T_2\cdot sen(\theta)}{\cos(\alpha)}\right)\cdot sen(\alpha) - P_g - T_2\cdot\cos(\theta) = 0 \quad\Rightarrow\quad T_2\cdot\left(sen(\theta)\cdot tg(\alpha) - \cos(\theta)\right) = P_g,$$

$$T_2 = \frac{P_g}{\left(sen(\theta)\cdot tg(\alpha) - \cos(\theta)\right)} \quad\Rightarrow\quad T_2 = \frac{100N}{\left(sen(75^\circ)\cdot tg(60^\circ) - \cos(75^\circ)\right)} = \boxed{70,71N},$$

$$T_1 = \frac{T_2\cdot sen(\theta)}{\cos(\alpha)} \quad\Rightarrow\quad T_1 = \frac{(70.71N)\cdot sen(75^\circ)}{\cos(60^\circ)} = \boxed{136,6N}.$$




Força de tração também pode ser usada como uma 'alavanca', que é um dispositivo para multiplicar ou dividir força. Veja um exemplo de como é possível dobrar força. Considere um trator que deseja puxar uma árvore, exercendo uma força **F**. Uma forma de dobrar essa força é amarrar uma corda (1°cabo) a um poste intermediário e passar esse cabo em torno de uma polia que deve estar acoplada a um segundo cabo preso a árvore (veja a Figura 14(a)). Agora é só puxar o primeiro cabo com uma força **F** que o segundo cabo vai estar sujeito a uma força **2F**.

Fazendo o D.C.L. na polia e impondo a condição de equilíbrio estático, temos que:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_{ext(x)} = -\overset{\leftarrow}{F} - \overset{\leftarrow}{F} + \overset{\rightarrow}{F}_{2^\circ cabo} = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{F_{2^\circ cabo} = 2\cdot F}.$$

Esta é a força que o segundo cabo exerce na polia. Pela terceira lei de Newton, essa força também é igual a que a polia exerce no segundo cabo, mas de sentido oposto. Fazendo o D.C.L. no segundo cabo, você vai descobrir que este puxa a árvore com uma força **2F**.

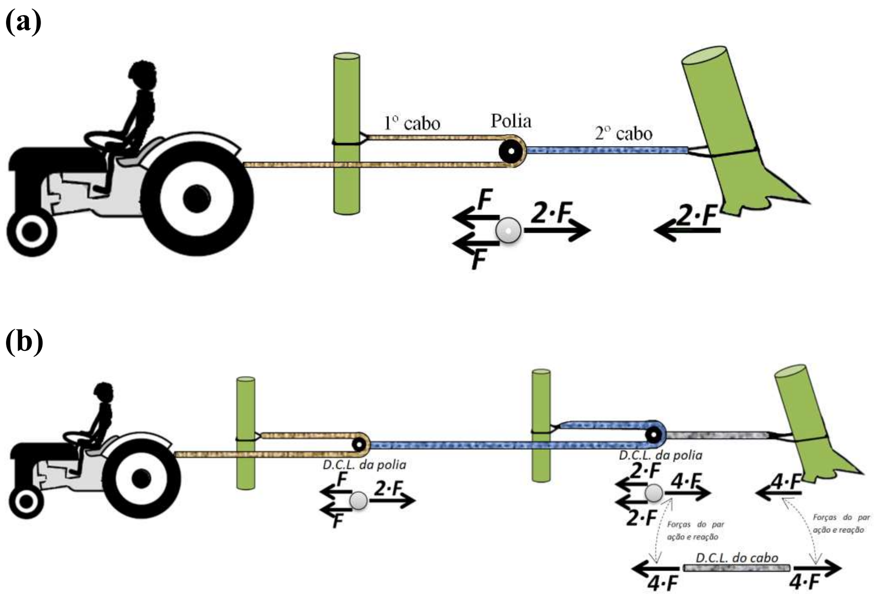



**Figura 14 –** Com uso de polia é possível multiplicar a força **F**.

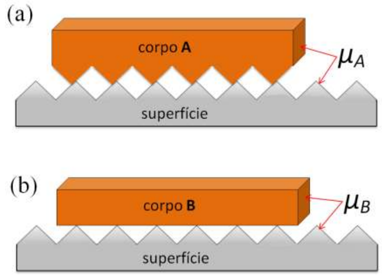
Para quadruplicar a força, basta usar mais um poste intermediário, como mostrado na Figura 14(b). Veja que agora a árvore vai estar sujeita a uma força de puxão 4·F, sendo que o trator exerce apenas uma força F. Esse artificio também é útil até para desatolar um carro.

**5 - Força de Atrito ($f_{at}$):** É uma força dissipativa, a sua *direção* é paralela à superfície de contato e o seu *sentido* é sempre oposto ao movimento. Experiências mostram que o *módulo* da força de atrito pode ser escrito como:

$$f_{at} = \mu \cdot \mathbb{N}, \qquad (N) \tag{1.17}$$

onde μ é chamado *coeficiente de atrito* (número adimensional e normalmente compreendido no intervalo $0 \le \mu \le 1$) e $\mathbb{N}$ é a reação Normal (vista anteriormente). O coeficiente de atrito quantifica a rugosidade da superfície de contato. Quanto mais áspera for a superfície, maior será o valor de $\mu$ se comparado com uma superfície lisa. Para superfícies perfeitamente lisas, sem atrito, temos $\mu=0$ e consequentemente $f_{at} = 0$.

O coeficiente de atrito $\mu$ é devido ao contato físico entre uma superfície e um corpo sobre essa superfície. Se você colocar outro corpo sobre a mesma superfície, o coeficiente de atrito provavelmente será diferente do anterior. Portanto, $\mu$ não é uma propriedade unicamente da superfície, mas do conjunto *superfície+corpo*. Na figura ao lado, tem-se o corpo **A** (mais rugoso) e o corpo **B** (mais liso), ambos sobre a mesma superfície. Provavelmente o coeficiente de atrito $\mu_A$ entre o corpo **A** e a superfície será maior que $\mu_B$ (entre o corpo **B** e a superfície), pois o corpo **A** é mais rugoso que o corpo **B**.




*Visão microscópica do atrito*.

O coeficiente de atrito $\mu$ existe de dois tipos: o coeficiente de atrito estático $\mu_e$ e o coeficiente de atrito dinâmico $\mu_d$, de modo que $\mu_e > \mu_d$. Portanto, existem dois tipos de força de atrito: a força de atrito estática $f_{at,e}$ e a dinâmica $f_{at,d}$. A força de atrito estático é <u>maior</u> que a força de atrito dinâmico, pois $\mu_e > \mu_d$. Estas duas forças são definidas a seguir.

**5.1. Força de Atrito Estático ($f_{at,e}$):** Força que atua em corpos em repouso. A força de atrito estático é <u>variável</u>, podemos apenas definir o seu valor (em módulo) máximo, que é dado por

$$\boxed{f_{at,(e)\max} = \mu_e \cdot \mathbb{N} \qquad (N)}. \tag{1.18}$$

*Exemplo sobre a força de atrito*

*Atrito 1*) Considere um bloco de massa $m=10kg$ sobre uma superfície com coeficiente de atrito estático dado por $\mu_e=0.35$. O bloco está sujeito a uma força externa horizontal $\mathbf{F_{ext}}$ (atuando da esquerda para direita) de módulo $32N$. Verifique se essa força é suficiente para colocar em movimento o bloco.

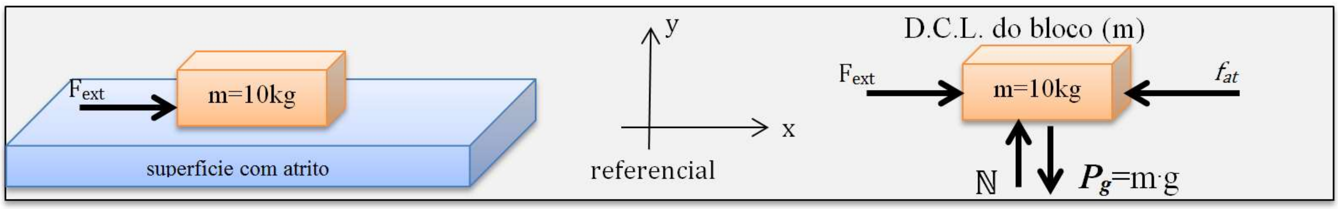



**Figura 15-** Exemplo de um corpo deslizando sobre uma superfície com atrito. Ao lado direito da figura, tem-se a o diagrama de corpo livre do bloco m.

*Solução: Primeiramente devemos calcular o valor máximo da força de atrito estático $f_{at(e),max}$ . Se o valor máximo for menor que a força externa, então o bloco se encontra em movimento devido à ação da força externa. Caso $f_{at(e),max}$ seja <u>maior</u> que $F_{ext}$, então o bloco está em repouso.*

*A partir do D.C.L. do bloco m, vamos aplicar a 1ª Lei de Newton para a direção-y e calcular o valor da reação normal (ℕ) que atua sobre o bloco m. Com a reação Normal ℕ, podemos calcular o módulo da força de atrito,*

$$+\uparrow \sum F_y = \overset{\uparrow}{\mathbb{N}} - \overset{\downarrow}{P_g} = 0 \text{ (equilíbrio estático)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{N} = P_g = m \cdot g = 10kg \cdot 10m/s^2 = 100N},$$

$$\boxed{f_{at(e),\max} = \mu_e \cdot \mathbb{N}} \quad \Rightarrow \quad f_{at(e),\max} = 0.35 \cdot 100N = \boxed{35N}.$$

*Como a força de atrito estático máximo $f_{at(e),max}$ =35N > ($F_{ext}$=32N), o bloco se encontra em repouso. Se o bloco está em repouso, então qual é o valor verdadeiro da força de atrito estático atuando sobre o bloco? Para responder essa pergunta, vamos aplicar novamente a 1ª Lei de Newton para a direção-x,*

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = \overset{\rightarrow}{F_{ext}} - \overset{\leftarrow}{f_{at,e}} = \underbrace{0}_{\text{bloco em repouso}} \text{ (equilíbrio estático)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{at,e} = F_{ext} = 32N}.$$

Neste exemplo, a força de atrito estático <u>máximo</u> vale *35N*, mas a força de atrito estático que atua no bloco é *32N*. Se a força externa que atua no bloco fosse *10N*, a força de atrito estático atuando no bloco também seria *10N*. Se a força externa fosse zero, a força de atrito estático também seria zero. A força de atrito estático sempre será igual à força externa, quando esta for menor que o valor máximo da força de atrito. Esse conceito deve ficar bem compreendido para a força de atrito estático.

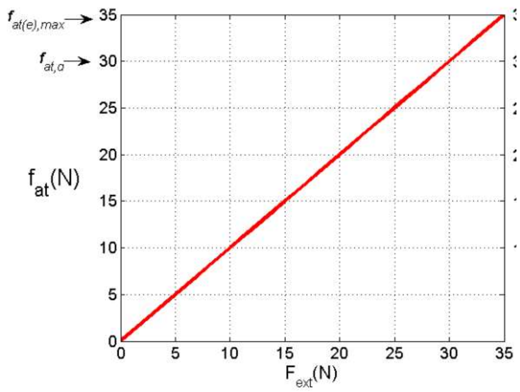
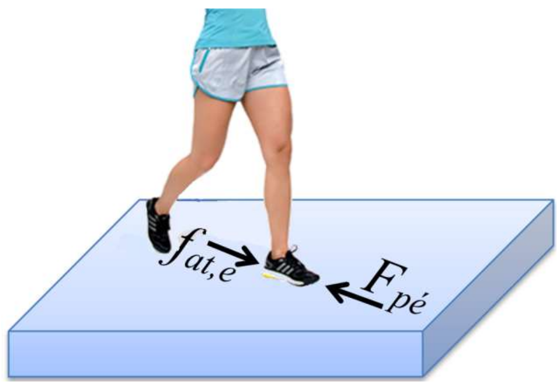



**Figura 16 –** Força de atrito $f_{at}$ (*eixo-y*) versus força externa $F_{ext}$ (*eixo-x*). O corpo permanece em repouso para a força externa menor que a força de atrito estático máximo $f_{at(e),max}$.

## Importância da força de atrito estático no nosso cotidiano

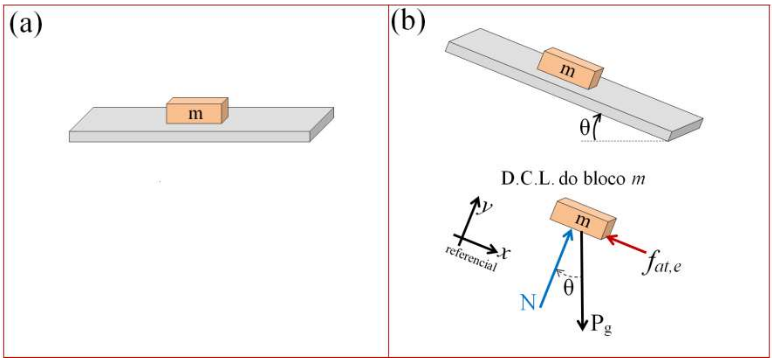
No exemplo ao lado de uma caminhada, a perna esquerda '*cola*' no chão e a perna direita avança para frente. Quando a perna direita é '*colada*' no chão, a perna esquerda avança para frente, e assim por diante. É dessa forma que a gente caminha. A *colagem* da nossa perna no chão para a gente avançar um passo é atribuída a força de atrito estático $f_{at,e}$ que contrabalanceia a força exercida pelo nosso pé $F_{pé}$ para trás. Para você caminhar para frente, você precisa empurrar a superfície para trás. Quando a superfície é lisa, a força de atrito estático não consegue contrabalancear a força exercida pelo nosso pé e a gente



escorrega. É por isso que é difícil caminhar sobre o gelo ou superfície lisa e molhada.

### Como medir experimentalmente o coeficiente de atrito estático $\mu_e$

Uma forma de medir o coeficiente de atrito estático entre um bloco de massa *m* e uma superfície na qual esse bloco se apoia é usar uma *placa* dessa superfície (Figura 17.(a)), e inclinar essa *placa* até o corpo ficar na iminência de deslizar (Figura 17.(b)). Com esse ângulo crítico de inclinação, pode-se estimar o coeficiente de atrito estático entre a superfície e o bloco, que será mostrado a seguir.




Decomposição da força Peso $P_g$ na direção *x* e *y*.

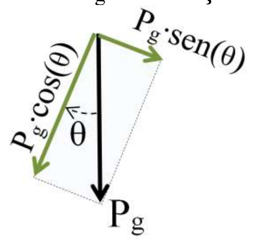



**Figura 17** – Método para determinar o coeficiente de atrito estático entre uma superfície e um bloco. Inclina-se essa superfície até o bloco começar a deslizar.

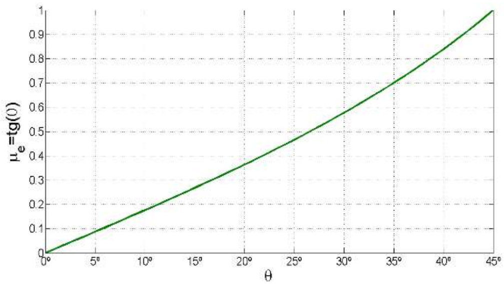
Vamos precisar usar apenas o D.L.C. da Figura 17(b). Para usarmos a primeira lei de Newton, vamos adotar o referencial inclinado. Pois nesse referencial, só é preciso decompor a força peso. Caso você decida usar o referencial padrão, será necessário decompor a força Normal (**N**) e a de atrito ($f_{at,e}$). Condinuando, no caso extremo, na iminência do bloco deslizar, vamos usar o valor *máximo* da força de atrito estático.

direção x) $\overset{+}{\rightarrow} \sum F_{ext(x)} = +\overset{\rightarrow}{P_g} \cdot sen(\theta) - \overset{\leftarrow}{f_{at(e),\max}} = 0$ (iminência de deslizar)

direção y) $+\uparrow \sum F_{ext(y)} = +\overset{\uparrow}{\mathbb{N}} - \overset{\downarrow}{P_g} \cdot \cos(\theta) = 0$ (equilíbrio estático)

$\mathbb{N} = P_g \cdot \cos(\theta)$ e substituir em: $P_g \cdot sen(\theta) = f_{at(e),\max}$; $(f_{at(e),\max} = \mathbb{N} \cdot \mu_e)$.

$\cancel{P_g} \cdot sen(\theta) = \underbrace{\cancel{P_g} \cdot \cos(\theta)}_{\mathbb{N}} \cdot \mu_e$. Isolando $\mu_e$ : $\boxed{\mu_e = \dfrac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} = \text{tg}(\theta)}$.




Portanto, mede-se a inclinação crítica *θ* e o coeficiente de atrito estático $\mu_e$ é a tangente desse ângulo. Exemplo: para um ângulo medido de *θ=22º*, o coeficiente vale: $\mu_e$=tg(22º)=0,40. O caminho inverso também é verdade, tendo $\mu_e$ é possível medir a inclinação crítica θ.

**5.2. Força de Atrito Dinâmico ( $f_{at,d}$ ):** Força que atua em corpos em movimento (por isso *dinâmico*). A força de atrito dinâmico é sempre [2]constante ao longo do movimento. A sua *direção* é paralela à superfície de contato e o seu *sentido* é sempre oposto ao movimento. O seu valor (em módulo) é dador por,

$$\boxed{f_{at,d} = \mu_d \cdot \mathbb{N}, \qquad (N)} \tag{1.19}$$

[2] A força de resistência do ar é uma espécie de força de atrito e o seu módulo é proporcional à velocidade ao quadrado do corpo. Portanto, neste caso, a força varia com o quadrado da velocidade, não sendo uma força constante ao longo do movimento se a velocidade está aumentando ou diminuindo.

onde $\mu_d$ é o coeficiente de atrito dinâmico e $\mathbb{N}$ é a reação Normal da superfície sobre o corpo em contato com a mesma.

Exemplo:

**E.1)** Continuando o exercício *Atrito 1*), só que agora considere $F_{ext}=50N$ e o coeficiente de atrito dinâmico dado por $\mu_d=0,30$, calcule a aceleração do movimento.

*Solução: O diagrama de corpo livre (D.C.L.) continua igual ao anterior* (Figura 15), *mas agora força externa ($F_{ext}=50N$) é maior que o valor máximo para a força de atrito estático ($F_{ext}=35N$), portanto o bloco está se movendo na direção x e a força de atrito que atua no bloco é a dinâmica. Vamos aplicando a $2^a$ Lei de Newton para a direção-x e calcular essa aceleração,*

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = \overset{\rightarrow}{F}_{ext} - \overset{\leftarrow}{f}_{at,d} = m \cdot a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{F_{ext} - f_{at,d}}{m} = \frac{50N - 0.3 \cdot 100N}{10kg} = \boxed{2m/s^2}.$$

Observe que a força de atrito tende a *'freiar'* o movimento do corpo, pois se essa não existisse ($f_{at,d} = 0$), a aceleração do corpo seria:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = \overset{\rightarrow}{F}_{ext} - 0 = m \cdot a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{F_{ext}}{m} = \frac{50N}{10kg} = \boxed{5m/s^2},$$

que é maior que o caso com atrito ($2m/s^2$).

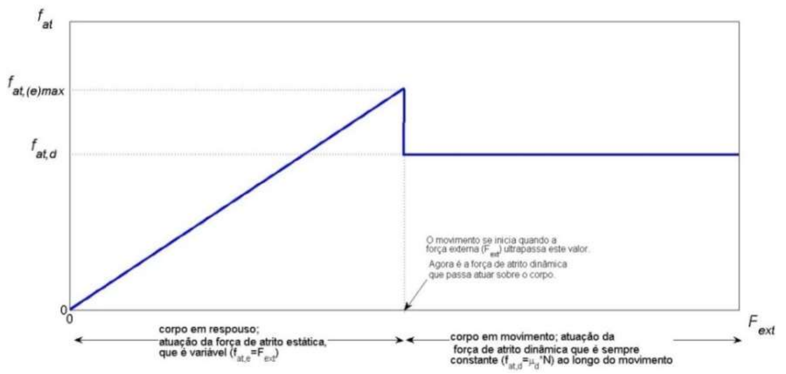
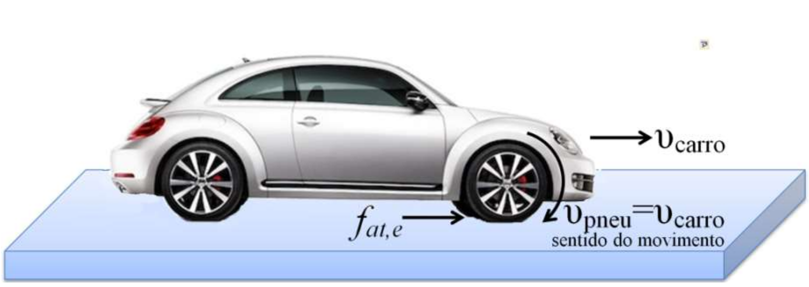



**Figura 18 -** Força de atrito versus a força externa. Para a força externa menor que a força de atrito máximo, a força de atrito estático varia linearmente com a força externa. Quando a força externa ultrapassa o valor máximo da força de atrito estático, o bloco começa a ser mover, só que agora é a força de atrito dinâmico que passa a atuar sobre o bloco *m*.

É graças à força de atrito estático que um automóvel consegue se locomover.
Quando o pneu está *rolando*, é a força de atrito estático que está atuando. Quando o pneu está deslizando, é a força de atrito dinâmico que está em ação. Daí a importância dos freios ABS para evitar o travamento das rodas durante uma frenagem. A força de atrito estático atuando no pneu rolando é maior que a força de atrito dinâmico atuando no pneu travado e deslizando sobre o asfalto.



**6 - Força Elástica ($F_e$)** – força exercida por uma mola, esticada ou comprimida, sobre um corpo anexado a essa mola. A *direção* da força é ao longo da mola e o *sentido* é sempre apontando para a posição de equilíbrio da mola (estado relaxado). O módulo da força elástica é dado pela lei de *Hooke*

$$\boxed{F_e = k \cdot z, \quad (N)} \qquad \text{(Lei de Hooke)} \qquad (1.20)$$

onde $k$ é constante elástica da mola $[k]=N/m$ e $z$ é o deslocamento $[z]=m$ (distensão ou compressão) da mola em relação a sua posição de equilíbrio, nem esticada e nem comprimida (estado relaxado). A constante $k$ da mola quantifica a sua rigidez. Quanto maior for o valor de $k$, mais difícil é comprimir ou esticar a mola. A força exercida pela mola sobre o bloco é sempre a tentar restaurar o equilíbrio do sistema (massa+mola). Molas ou materiais que seguem a equação (1.20) são chamados elásticos. O especial desse regime é que a força varia linearmente com a deformação '$z$' e quando essa força é removida, o material volta para seu estado original de deformação zero '$z=0m$'.

Na Figura 19(a), a mola se encontra no seu estado relaxado (posição de equilíbrio). Em (b), a mola está distendida e esta puxa o bloco para a sua posição de equilíbrio. Já em (c), a mola está comprimida e, novamente, a mola exerce uma força sobre o bloco ***m***, cujo sentido da força é restaurar o equilíbrio da mola. Em ambos os casos (**b,c**), a magnitude da força é proporcional à distensão ou compressão $z$.

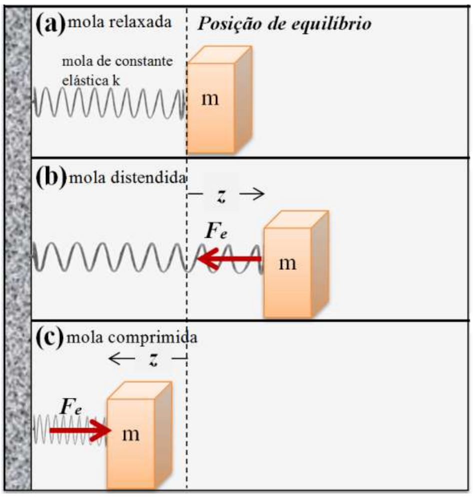
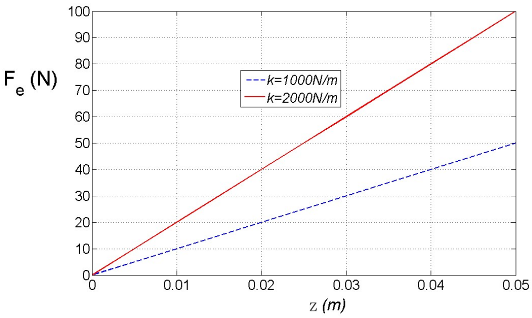



**Figura 19** – Em (a), temos a mola na posição de equilíbrio. Na fig.(b), temos a mola esticada e em (c) a mola comprimida. Em ambas as situações, a força elástica $\boldsymbol{F_e}$ sempre aponta para a posição de equilibrio.




Quanto maior for à distensão ou compressão $z$, maior será o valor da força elástica $F_e$. Observe que para um valor fixo de $z$ (digamos, $z=0{,}03m$), uma maior força será necessária caso a constante de rigidez da mola seja grande. Na figura, para $k=1000N/m$ a força necessária para deslocar a mola em $z=0{,}03m$ é $30N$. Já para $k=2000N/m$, a força é o dobro.

## Aplicação de molas

**Exemplo 1)** - Um bloco de massa ***m*** é colocado sobre uma mola de constante elástica $k$. Devido ao peso do bloco, a mola sofre uma compressão $z$ até a força elástica ($k{\cdot}z$) equilibrar com o peso do bloco ($m{\cdot}g$). Veja que a compressão $z$ é proporcional ao peso do bloco, $z \sim m{\cdot}g$ e inversamente proporcional a constante elástica $k$, $z \sim 1/k$. Balanças de molas funcionam dessa maneira, gradua-se a distância de compressão $z$ e substitui essa compressão por uma graduação de massa $m$. Dessa forma, ao invés de você ler deslocamento, você irá ler massa (ver Figura 20).

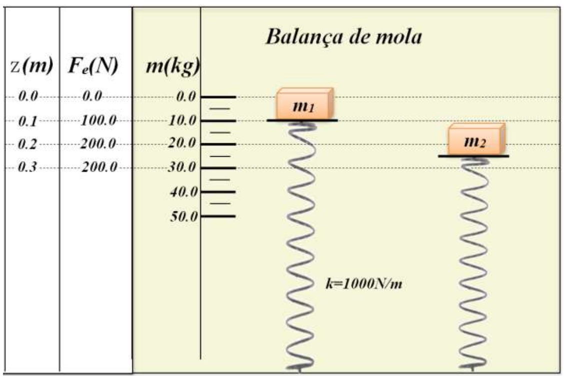
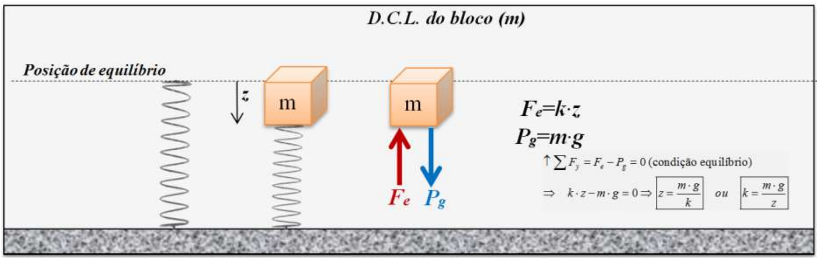



**Figura 20** – Balanças formadas por molas de constante elástica $k=1000N/m$. A massa do bloco $m_1$ é $10kg$ e a do bloco $m_2$ é $25kg$, lemos apenas a graduação ao lado esquerdo ***m(kg)***, não




precisamos mais ler deslocamento $z$ e multiplicar por $k$.

**Figura 21** – Quando um bloco de massa $m$ é colocado sobre a mola, esta sofre uma compressão $z$ devido ao peso do bloco $m$. A mola é comprimida até a força elástica se equilibrar com o peso do bloco. Este exemplo representa um ensaio de compressão, pois a mola está comprimida.

**Exemplo 2)** - Agora o bloco $m$ é pendurado por uma mola de constate elástica $k$ (Figura 22). A mola sofre uma distensão $z$ até a força elástica da mola ($k\cdot z$) se equilibrar com o peso do bloco $m$ ($m\cdot g$). O *sentido* da força elástica é sempre a restaurar o equilíbrio da mola (apontar para a posição de equilíbrio). Tanto colocando o bloco $m$ sobre a mola ou pendurando sobre esta, poderíamos medir o valor de $k$, caso este não fosse conhecido, bastando apenas medir o valor de $z$ ($k=m\cdot g/z$). Essa seria uma forma experimental de medir a constante elástica $k$ de uma mola ou de qualquer objeto elástico. Também poderíamos construir uma balança para medir massas $m$.

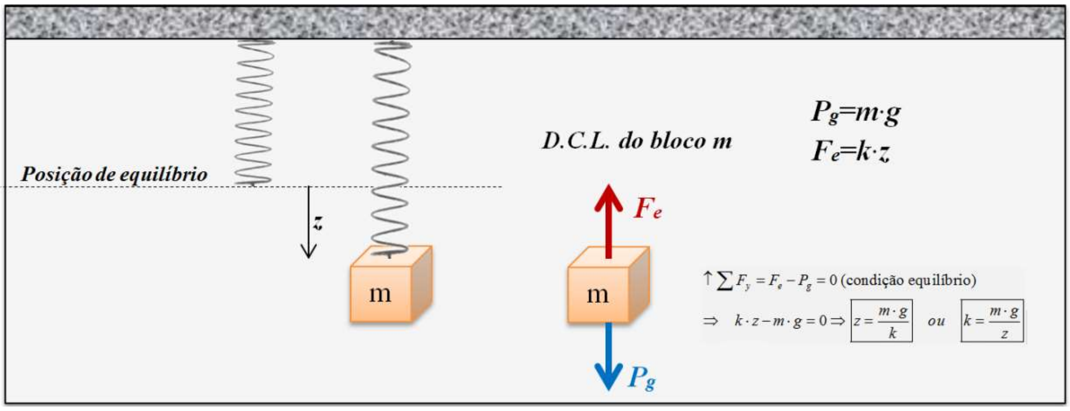
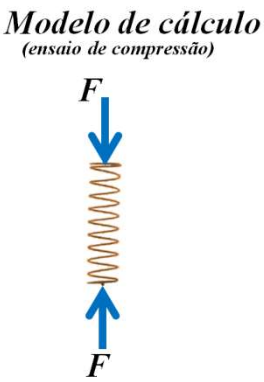
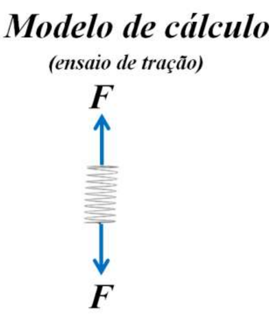



**Figura 22** – Mola pendurada no teto com um bloco anexado na sua extremidade inferior. Devido ao peso do bloco, a mola sofre uma distensão $z$ até a força elástica equilibrar o peso do bloco de massa $\boldsymbol{m}$. Calibrando essa distensão $z$ em função da massa $m$, podemos construir uma balança de molas (figura à direita) que é muito comum nas cozinhas domésticas.

Observe que usamos molas para descrever a lei de Hooke, mas mola é apenas um modelo de cálculo, por exemplo, a madeira possui um $k$ associado, que chamamos de módulo de elasticidade, assim como o aço também possui um módulo de elasticidade. A maioria dos materiais na natureza segue a lei de Hooke, quando a deformação é linearmente proporcional à força aplicada. Materiais que não seguem essa lei são chamados de *plásticos*, ao contrário dos *elásticos*. Até mesmo os músculos podem ser modelados como molas, ver no modelo de cálculos nas figuras seguintes.

Os músculos podem ser modelados como molas. Observe que quando você segura um peso, sua




Ensaio de tração do aço para verificar sua resistência à ruptura musculatura enrijece, é análogo à compressão da mola.

Compressão da madeira para determinar o módulo de elasticidade e também calcular a resistência à compressão. No modelo de cálculo, a madeira é representada por uma mola e a prensa por forças comprimindo essa madeira. Na construção civil, a madeira é usada para resistir à compressão.

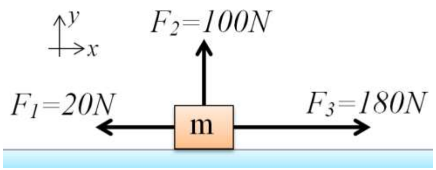
por tração. Podemos representar a barra de aço por uma mola de constante elástica $k$. Na construção civil, barras de aço são usadas para resistir às forças de tração.

## Exercícios

**1)** Um bloco de massa $\boldsymbol{m=15kg}$ está deslizando sobre uma superfície horizontal sem atrito. O bloco está sujeito a três forças aplicadas, como mostrado na figura ao lado. Nessas condições, calcule:

a) A aceleração na direção do movimento ($\boldsymbol{a_x}$).

b) O módulo da reação *Normal* ***N*** que atua sobre o bloco.

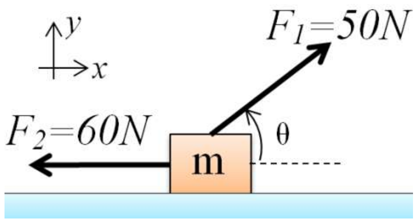



**2)** Um bloco de massa $\boldsymbol{m=10kg}$ está sujeito duas forças $\boldsymbol{F_2=60N}$ e $\boldsymbol{F_1=50N}$, esta última fazendo um ângulo $\theta=50^o$ com a horizontal. Desconsidere o atrito. Calcule:

a) Desenhe o Diagrama de Corpo Livre (D.C.L.) do bloco.

b) A aceleração resultante do bloco ***m***.

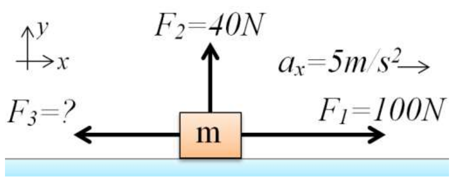
c) O módulo da reação (ou força) normal ***N***.




**3)** Um bloco de massa $\boldsymbol{m=10kg}$ está deslizando sobre uma superfície horizontal sem atrito. O bloco está sujeito a três forças aplicadas ($F_1=100N$, $F_2=40N$ e $F_3=?$). Dado que aceleração resultante é $5m/s^2$(ver figura ao lado), nessas condições, calcule:

a) O módulo da força $F_3$.

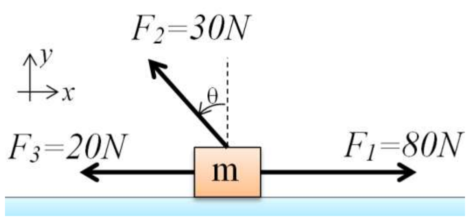
b) O módulo da reação Normal que atua sobre o bloco.




**4)** Um bloco de massa $\boldsymbol{m=2kg}$ está deslizando sobre uma superfície horizontal sem atrito. O bloco esta sujeito a três forças aplicadas, como mostrado na figura ao lado. Responda:

a) Se $\theta=60^o$(inclinação da força $F_2$ com a vertical), calcule a aceleração do bloco **m** e a reação Normal sobre o mesmo.

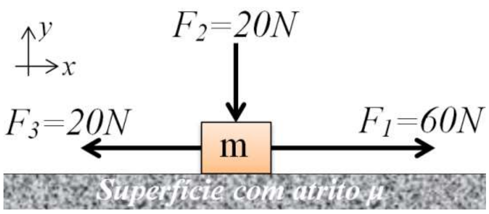
b) O valor da nova inclinação $\boldsymbol{\theta}$ da força $F_2$ com a vertical, para que o bloco **m** fique na iminência de perder contato com a superfície.




**5)** Um bloco de massa $\boldsymbol{m=5kg}$ está deslizando sobre uma superfície horizontal <u>com atrito</u> ($\mu=0,25$). O bloco esta sujeito a três forças aplicadas, como mostrado na figura ao lado. Calcule:

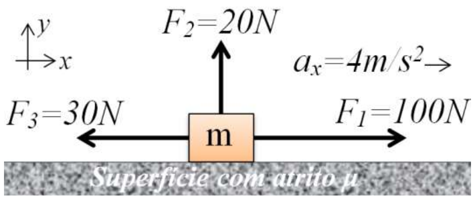
a) A reação **Normal** sobre o bloco e a sua aceleração.

b) O valor de uma nova força horizontal $F_4$, aplicada sobre o bloco ***m***, para que este se mova com velocidade constante.



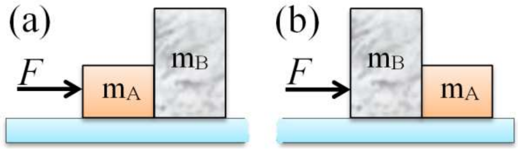

**6)** Um bloco de massa $\boldsymbol{m=10kg}$, possui uma aceleração resultante de $\boldsymbol{4m/s^2}$, cujo sentido esta representado na figura abaixo. O bloco desliza sobre uma superfície <u>com</u> atrito e está sujeito às forças $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ e $\mathbf{F_3}$, ver figura abaixo.

a) Qual o módulo da força de atrito dinâmico entre o bloco e a superfície?



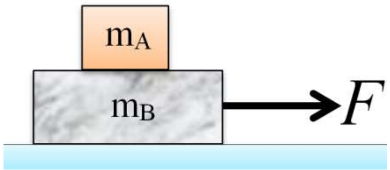
Qual o valor do coeficiente de atrito dinâmico da superfície?

**7)** Na figura ao lado, Fig.(a), uma força horizontal constante *F* é aplicada ao bloco **A**, que empurra um bloco **B** com uma força de *30,0N* horizontalmente para direita. Na Fig.(b), a mesma força constante *F* é aplicada ao bloco **B**; desta vez o bloco **B** empurra o bloco **A** com uma força de 20N, para a direita. Os blocos têm uma massa total de 10kg ($m_A+m_B=10kg$). Despreze o atrito, calcule:



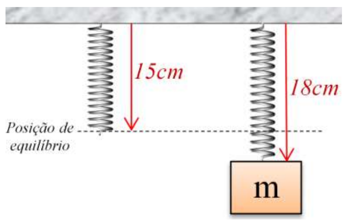

a) A aceleração em cada bloco, $\boldsymbol{m_A}$ e $\boldsymbol{m_B}$, na situação da fig.(a) e fig.(b).
b) O valor da força ***F***.

**8)** Uma força ***F*** é aplicada horizontalmente sobre o bloco **B** (figura ao lado), que faz com que ambos os blocos ***A*** (massa $m_A$) e ***B*** (massa $m_B$) movam-se juntos com aceleração ***a*** sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o bloco **A** e **B** vale $\mu_e$ (você já entende o porquê de se usar o atrito estático e não o dinâmico?). Para esse sistema em movimento, <u>desenhe o Diagrama de Corpo Livre (D.C.L.)</u> para o corpo **A** e **B**, considerando:




a) A superfície horizontal livre de atrito.
b) A superfície horizontal com atrito, e o módulo da força **F** sendo igual ao módulo da força de atrito entre a mesa horizontal e o bloco **B**. O coeficiente de atrito dinâmico entre a mesa e o bloco **B** vale $\mu_d$ .

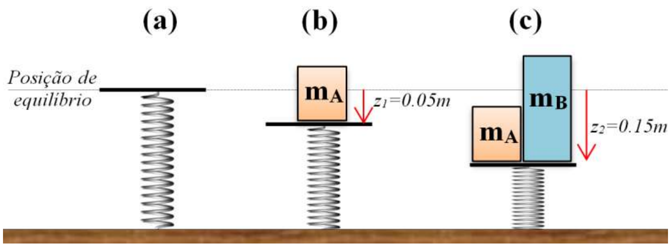
**9)** Um mola ideal de massa desprezível tem *15cm* de comprimento no seu estado relaxado (ver figura ao lado). Ao pendurarmos um objeto de massa *m=5kg*, seu comprimento total passou a ser *18cm*.




a) Se você pendurar um bloco de *10kg*, qual será o comprimento total da mola?
b) Se o comprimento total da mola medido foi de *38cm*, qual é a massa do objeto pendurado?

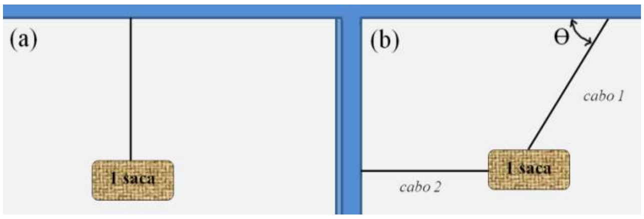
**10)** Calcule a constante elástica *k* ideal para os amortecedores de uma carrocinha de dois eixos, sendo que essa suspensão não pode descer mais que *4 cm* quando colocado sobre a mesma uma carga de 1000kg (considere a carga igualmente distribuída ao longo dos 4 pneus).

**11)** Na figura abaixo tem-se uma mola de constante elástica *k=50000 N/m*. Na fig.(a) a mola se encontra no seu estado de equilíbrio (relaxado). Na fig.(b), um corpo de massa $\boldsymbol{m_A}$ foi colocado sobre a mesma mola e se observou um deslocamento vertical de *0,05m*. Na fig.(c), foi adicionado mais um corpo de massa $\boldsymbol{m_B}$ sobre a mola e agora o deslocamento vertical medido foi de *0,15m*.
a) Calcule as massas $\boldsymbol{m_A}$ e $\boldsymbol{m_B}$.

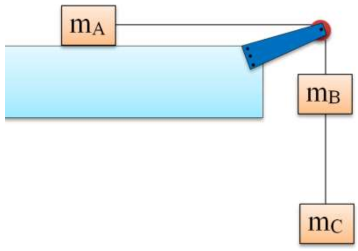


## *Tração*

**12)** Calcule a força de tração no(s) cabo(s) nas figuras ao lado **(a)** e **(b)**, sabendo que em ambos os casos, o objeto pendurado é uma saca de soja (*1 saca=60kg*). *Dado* $\theta=60^o$ para o item (**b**).

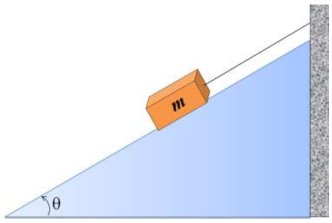



**13)** Três blocos estão conectadas por cordas (de massas desprezíveis), umas das quais passa por uma polia de massa e atrito desprezível (despreze também o atrito entre o bloco $m_A$ e a superfície da mesa). As massas são: $m_A=30,0kg$, $m_B=40,0kg$ e $m_C=20,0kg$. Quando o conjunto é liberado a partir do repouso, calcule:

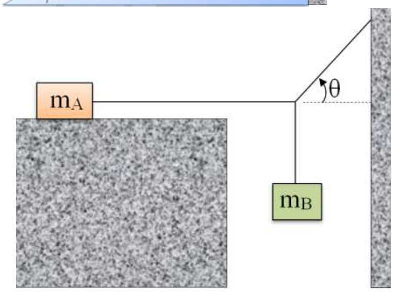



a) A aceleração adquirida pelos blocos $m_A$, $m_B$ e $m_C$.
b) A tensão na corda que liga o bloco $m_A$ a $m_B$.
c) A tensão na corda que liga bloco $m_B$ a $m_C$.

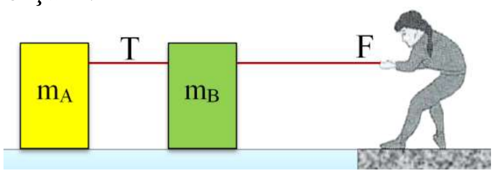
**14)** Um bloco de massa $m=10kg$ repousa sobre uma superfície sem atrito inclinada de $\theta=35^o$ em relação a horizontal (ver figura ao lado). Calcule:
a) A tensão na corda.
b) A força Normal que age sobre o bloco ***m***.
c) Determine a aceleração adquirida pelo bloco ***m*** quando a corda é cortada.




**15)** O bloco $\mathbf{m_A}$, da figura ao lado, pesa ***80N***. O coeficiente de atrito estático entre o bloco $\mathbf{m_A}$ e a mesa em que este se apoia é *0,40*. Os blocos estão conectados por um cabo de massa desprezível e $\theta=40^o$.
a) Sabendo que o corpo $\mathbf{m_B}$ pesa ***20N*** e que o sistema se encontra em equilíbrio, calcule a força de atrito estático entre o bloco $\mathbf{m_A}$ e a mesa.
b) Qual é o peso máximo $\mathbf{m_B}$, para que o bloco $\mathbf{m_A}$ fique na iminência de deslizar?




**16)** Duas caixas, uma de massa $\mathbf{m_A}=4,0kg$ e outra de massa $\mathbf{m_B}=6,0\ kg$, estão em repouso sobre uma superfície sem atrito de um lago congelado. Ambas as caixas estão ligadas por uma corda leve e rígida (de massa desprezível). Uma mulher usando um tênis de solado áspero (de modo que ela não deslize) puxa horizontalmente a caixa $\mathbf{m_B}$ com uma força ***F*** que produz uma aceleração de $2,5\ m/s^2$.
a) Calcule o valor da tração **T** e da força **F**.




**Respostas:**
1. a) $10,66m/s^2$; b) 50N
2. b) $-2,78m/s^2$; c) 61,7N
3. a) 50N; b) 60N
4. a) $17m/s^2$ *e 5N; b) faça N=0 e obtenha* $\theta=48,2^o$
5. a) *70N*; b) $4,5m/s^2$; c) *22,5N* (aplicada para esquerda)
6. a) 30N; b) 0,375
7. a) $5m/s^2$; b) 50N
8.
9. a) 15cm+6cm; b) 38,33kg
10. 62500N/m
11. a) 250kg e 500kg, respectivamente.
12. a) 600N; b) $T_1$=692.8N $T_2$=346.4N
13. a) $6,67m/s^2$; b) 200N; c) 66,6N
14. a) 57,4N; b) 81,9 N; c) $5,74\ m/s^2$
15. a) 23,84N; b) 26,9 N
16. a) 10N e 25N

## Torque (τ)

Assim como força é associada ao movimento de translação, o torque é associado ao movimento de rotação (*giro*) em torno de um ponto específico. O módulo torque em relação a um ponto ***A*** é definido como

$$\tau_A = d \cdot F \cdot sen(\theta) \qquad (m \cdot N) \tag{1.21}$$

onde *d* é a distância do ponto **A** até a força ***F*** *(d também é chamado de "braço da alavanca" e aponta do ponto **A** para a força **F**)* e $\theta$ é o ângulo entre o braço da alavanca *d* e a força *F* (ver Figura 23 e Figura 24). O termo *sen(θ)* representa a projeção da força *F* perpendicular ao braço da alavanca *d* ou a projeção deste perpendicular a direção da força *F*.

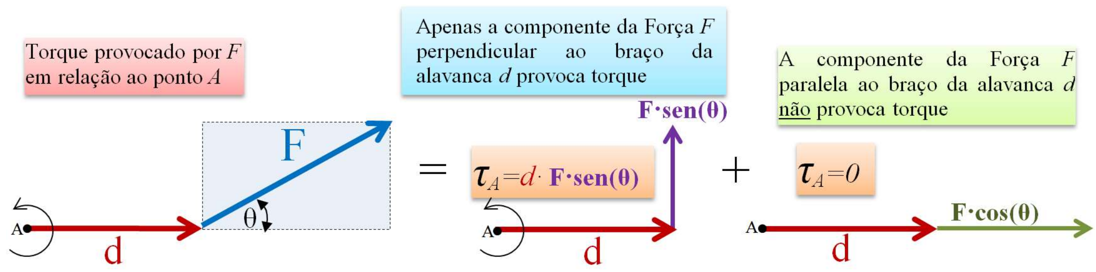



Figura 23 – Apenas a componente da força ***F*** que é perpendicular ao braço da alavanca ***d*** provoca torque. Esse é o significado do termo *sen(θ)* é projetar a força ***F*** perpendicular ao braço da alavanca ***d***.

Para o cálculo do torque, o ponto deve ser especificado, pois a mesma força ***F*** pode provocar torques diferentes em relação a pontos diferentes. O subíndice em τ é para especificar o ponto onde o torque está sendo medido. Nunca esqueça de especificar o ponto em que você está calculando o torque. Observe que na equação para o torque, este é máximo quando θ=90º ou θ =π/2 *rad* (pois *sen(90º)=1*). Neste caso, o braço da alavanca ***d*** e a força ***F*** estão perpendiculares entre si. O torque vale zero quando *θ=0º* pois *sen(0º)=0* ou *sen(180º)=0*. Estes dois últimos casos ocorrem quando o braço da alavanca ***d*** se encontra na mesma direção da força ***F.*** Veja na Figura 24 as possíveis configurações entre braço da alavanca ***d*** e a força ***F*** em função de *θ*. E na Figura 25, o gráfico para a função seno de θ (*sen(θ) em função de θ*).

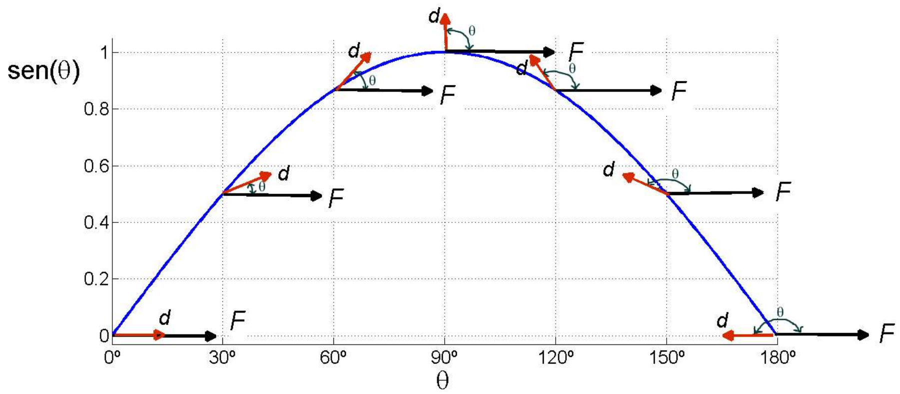



**Figura 24** – Várias configurações para o torque. O torque é máximo quando a força ***F*** e o braço da alavanca ***d*** são perpendiculares. O torque vale zero quando a força ***F*** e o braço da alavanca ***d*** são paralelos (mesma direção não importando o sentido).

## Nota sobre a função seno

A função seno é uma função periódica, de período *360º* ou *2π rad*, é interpretada como sendo a <u>projeção</u> do raio unitário 1 <u>no eixo y</u>, no sistema cartesiano, ver Figura 25 (à direita). Para θ=90º a projeção do raio 1 no eixo-y vale exatamente 1. Já para *θ=0º* a projeção em *x* vale zero, e assim por diante. A função seno está sempre compreendida no intervalo $-1 \leq sen(\theta) \leq 1$.

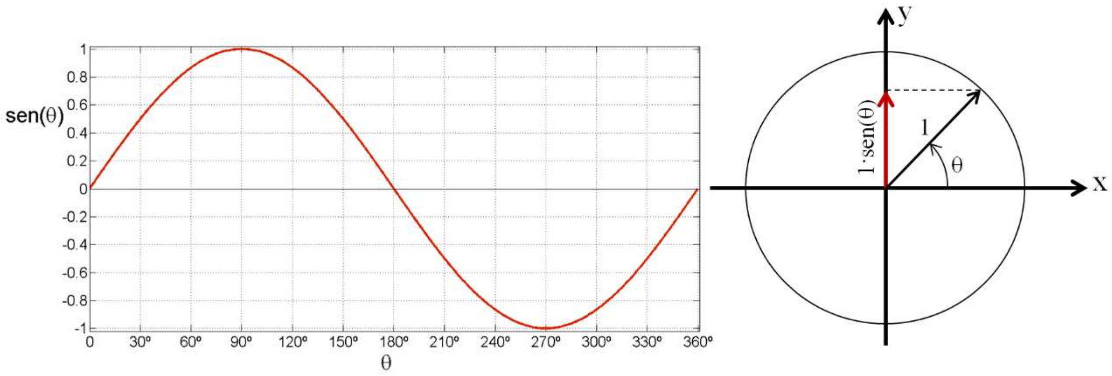



**Figura 25** - Gráfico da função seno. Observe que *sen(θ)=sen(180º-θ)*. A função seno é a <u>projeção</u> do raio unitário 1 <u>no eixo y</u>, ver figura ao lado. A função seno está sempre compreendida no intervalo $\boldsymbol{-1 \leq sen(\theta) \leq 1}$.

O torque é um vetor que é perpendicular ao plano formado pela força ***F*** e pelo braço da alavanca ***d***. Na figura a seguir (Figura 26, à direita), tem-se a vista em perspectiva do torque $\tau_A$. O torque será zero quando a linha de ação da força (*direção*) passar pelo ponto onde se estar medindo o torque, pois o *braço da alavanca* vale zero.

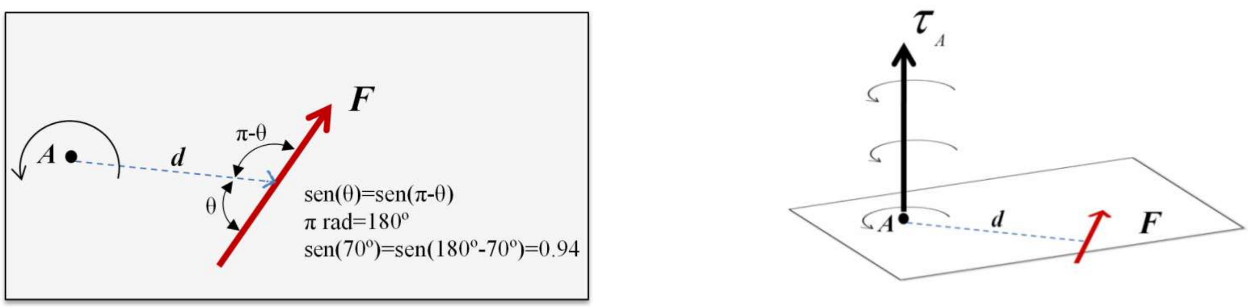



**Figura 26** – Torque exercido pela força ***F*** em relação ao ponto ***A***. O vetor torque é perpendicular ao plano formado pela força ***F*** o braço da alavanca ***d***, (ver figura à direita).

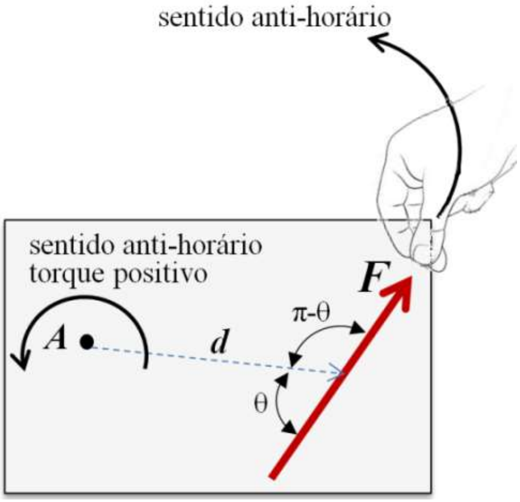
Você aplica torque ao girar a maçaneta quando vai abrir uma porta, aplica-se torque para desparafusar (ou parafusar) um parafuso (usando uma chave inglesa ou de fenda). Para executar essa operação é preciso girar o *parafuso* ou a *porca*, é preciso aplicar um *torque*. Um torque também é aplicado para fazer girar o pneu do seu carro, da sua bicicleta, para abrir uma porteira (Figura 27), e assim por diante.


**Figura 27** – Para abrir uma cancela, você precisa aplicar uma força, você precisa aplicar um torque $\tau_A$ em relação ao eixo de giro, que é onde fica a dobradiça da cancela (ponto **A**).

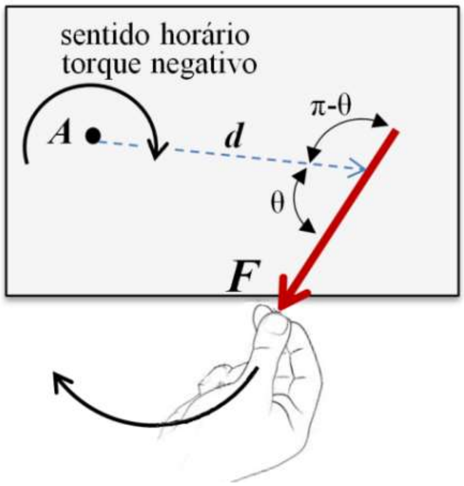
### Convenção de Sinais (+ ou -) para o Torque $\tau_A$

Para o sinal do torque, adota-se como sendo **positivo(+)** se a tendência de giro em relação ao ponto ***A*** for no sentido anti-horário . E adota-se como sendo **negativo(-)** se a tendência de giro for no sentido horário. Veja a seguir, a maneira mais simples para se determinar o sinal correto do torque.

Para se determinar o sinal correto do torque, deve-se 'puxar' a seta da força ***F*** e verificar a tendência de giro em ralação ao ponto ***A***. Se esse giro for no sentido anti-horário, o torque é ***POSITIVO(+)***. A direção do torque é perpendicular ao papel e o sentido é saindo do papel.




Caso contrário, ao puxar a seta da força ***F***, se a tendência de giro em ralação ao ponto ***A*** for no sentido horário, o torque é ***NEGATIVO(-)***. A direção do torque é perpendicular ao plano do papel e o sentido é entrando no papel.




É importante conhecer o sinal correto do torque, pois quando várias forças externas produzem torque em relação ao mesmo ponto, é necessário calcular o torque resultante, que é o somatório de todos os torques provocado por todas as forças externas,

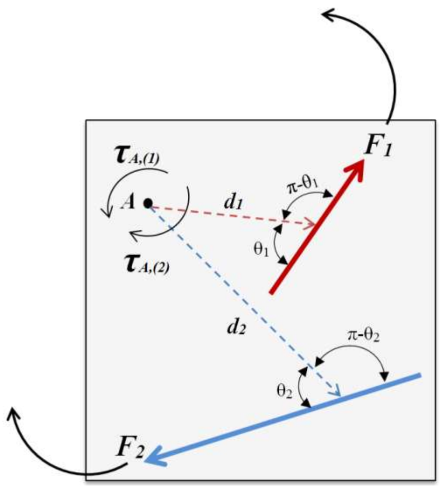
$$\tau_{A(R)} = \tau_{A(1)} + \tau_{A(2)} + ... = d_1 \cdot F_1 \cdot sen(\theta_1) + d_2 \cdot F_2 \cdot sen(\theta_2) + ...$$

$$\boxed{\tau_{A(R)} = \sum_i \tau_{A(i)}} \quad (m \cdot N) \qquad \text{Torque resultante em relação ao ponto } A.$$

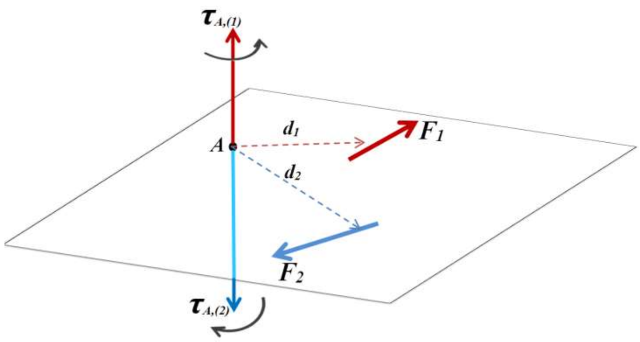
onde $\tau_{A(R)}$ é o torque resultante em relação ao ponto ***A*** devido a soma de todos os torques externos em relação ao ponto ***A***, provocado pelas forças externas $F_1$, $F_2$, etc. Se o torque resultante for positivo, a tendência de giro do corpo é no sentido anti-horário. Se o torque resultante for negativo, a tendência do giro é no sentido horário. Se o torque resultante for zero, o corpo se encontra em equilíbrio de rotação. Este é caracterizado pelo corpo parado ou girando, em relação ao ponto **A**, com velocidade angular constante. A condição de equilíbrio para rotação exige que o torque resultante em relação ao ponto ***A*** seja igual a zero,

$$\tau_{A(R)} = \sum_i \tau_{A(i)} = 0 \text{ (condição de equilíbrio).} \tag{1.22}$$

Só é possível somar torque em relação a um mesmo ponto. Torques provocados em pontos diferentes não podem ser somados.



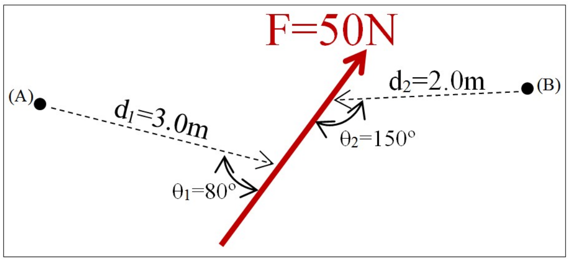

*O torque resultante em relação ao ponto **A** é soma do torque provocado pela força $F_1$ e pela força $F_2$, ambos em relação ao mesmo ponto A. Neste exemplo, o torque provocado pela força $F_1$ é positivo e o torque provocado pela força $F_2$ é negativo.*




*Vista em perspectiva da figura ao lado. Duas forças ($F_1$ e $F_2$) provocando torque em relação ao ponto **A**. Se o torque resultante for positivo, a tendência de giro do objeto é no sentido anti-horário. Se o torque resultante for negativo, a tendência do giro é no sentido horário. Se o torque resultante for zero, o corpo se encontra em equilíbrio.*

Exemplos

**E.1)** Calcule o valor do torque provocado pela força ***F=50N*** em relação ao ponto ***A*** e ***B*** (indique o sentido do torque: horário ou anti-horário).




Solução: Torque em relação ao ponto A

$$\tau_A = d_1 \cdot F \cdot sen(\theta_1) \qquad (N \cdot m)$$

$$\tau_A = +3,0m \cdot 50N \cdot sen(80^o) = +147,7\ (N \cdot m)$$ sentido anti-horário

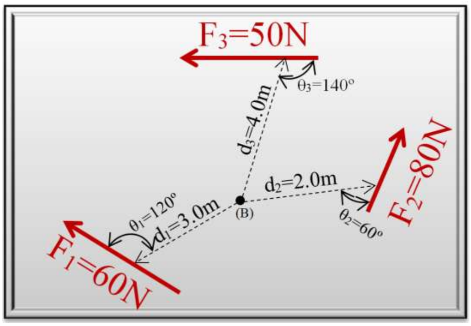
Torque em relação ao ponto B

$$\tau_B = d_2 \cdot F \cdot sen(\theta_2) \qquad (N \cdot m)$$

$$\tau_B = -2,0m \cdot 50N \cdot sen(150^o) = -50\ (N \cdot m)$$ sentido horário

Esses torques não podem ser somados, pois foram medidos em relação a pontos diferentes (**A** e **B**).

**E.2)** Calcule o torque resultante em relação ao ponto ***B***, provocado pelas forças externa $F_1$, $F_2$ e $F_3$.




Torque, em relação ao ponto B, provocado pela força $F_1$

$$\tau_{B,1} = d_1 \cdot F_1 \cdot sen(\theta_1) \qquad (N \cdot m)$$

$$\tau_{B,1} = -3,0m \cdot 60N \cdot sen(120^o) = -155,9\ (N \cdot m)$$ sentido horário

Torque, em relação ao ponto B, provocado pela força $F_2$

$$\tau_{B,2} = d_2 \cdot F_2 \cdot sen(\theta_2) \qquad (N \cdot m)$$

$$\tau_{B,2} = +2,0m \cdot 80N \cdot sen(60^o) = +138,6\ (N \cdot m)$$ sentido de giro anti-horário

Torque, em relação ao ponto B, provocado pela força $F_3$

$$\tau_{B,3} = d_3 \cdot F_3 \cdot sen(\theta_3) \qquad (N \cdot m)$$

$$\tau_{B,3} = +4,0m \cdot 50N \cdot sen(140^o) = +128,6\ (N \cdot m)$$ sentido de giro anti-horário

*Torque Resultante em relação ao ponto **B** é a soma de todos os torques externos (provocados pelas forças externas) em relação ao ponto **B**.*

$$\tau_{B,R} = \tau_{B,1} + \tau_{B,2} + \tau_{B,3} = -155,9\ N \cdot m + 138,6\ N \cdot m + 128,6\ N \cdot m = \boxed{+111,3\ N \cdot m}$$ sentido de giro anti-horário.

**E.3)** Para retirada do pneu de um carro, é necessário aplicar um torque de *100 N·m* em cada porca (ver figura ao lado).

a) Dado que a chave de boca possui um comprimento *d=40cm*, calcule o menor valor da força *F* que deve ser aplicada sobre a chave de boca para a remoção da porca.

Solução:

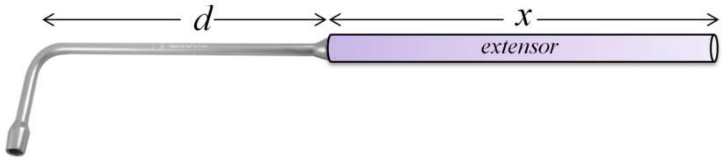
$$\tau_{porca} = d \cdot F \cdot \underbrace{sen(90^o)}_{1} \qquad (N \cdot m)$$

$$F = \frac{\tau_{porca}}{d} = \frac{100 N \cdot m}{0,4m} = \boxed{250N}.$$

Equivalente a levantar uma massa de 25kg.


b) Se uma pessoa só consegue exercer uma força de *100N*, calcule o menor comprimento do extensor para acoplar a essa chave de boca.

Solução: Como o torque é fixo, e a força também, a solução é aumentar o braço da alavanca *d* acoplando um extensor de comprimento *x*. Vamos então, determinar esse comprimento.

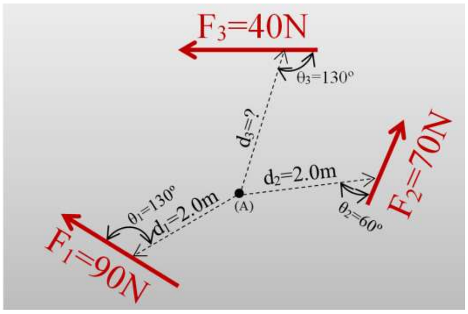



$$\tau_{porca} = (d + x) \cdot F. \quad \text{Isolar } (d+x) \text{ e substituir os valores numéricos: } \quad (d+x) = \frac{\tau_{porca}}{F} = \frac{100 \cancel{N} \cdot m}{100 \cancel{N}} = 1,0m.$$

Portanto, $d + x = 1.0m$, isolar *x*: $x = 1.0m - d = 1,0m - 0,4m = \boxed{0,6m}$.

**E.4)** Calcule o valor da distância $d_3$(ver figura ao lado), sabendo que o torque resultante, provocado pelas forças $F_1$, $F_2$ e $F_3$ em relação ao ponto ***A***, vale zero.

*Solução: Para você fazer.*




## Torque e a força de atrito estático

O torque provocado pelo eixo $\tau_{eixo}$ sobre a roda do pneu é equivalente a uma força $F_{eixo}$ vezes o raio do pneu *d* ( $\tau_{eixo} = d \cdot F_{eixo}$ ). Essa força $F_{eixo}$ deve ser equilibrada pela força de atrito estático $f_{at,e}$. Quando a força $F_{eixo}$ é maior que $f_{at,(e),max}$ o pneu desliza.

Exemplo:

**E.1)** Considerar o coeficiente de atrito estático entre o pneu e o asfalto como sendo $\mu_e$*=0,8* (um valor aproximado). Para um carro popular de 1000kg, que é equivalente a 10000N de peso, cada pneu irá absorver 2500N (=*10000N/4*).

a) Calcule o valor máximo do torque para que o pneu não deslize durante a rolagem do pneu do carro durante um passeio, considerando o raio do pneu *d=0.31m(31cm)*.

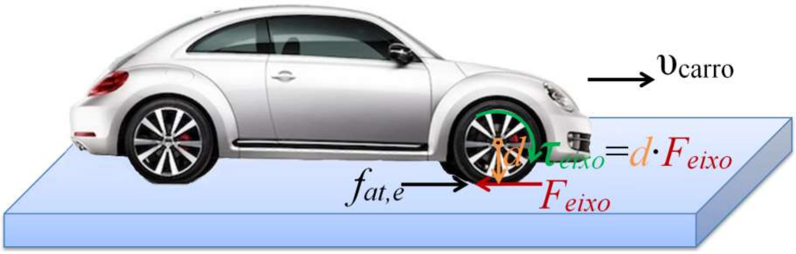
*Solução:*
Para que o pneu não deslize, devemos ter que

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_{ext(x)} = +\vec{f}_{at(e),\max} - \overleftarrow{F}_{eixo} = 0$$

(iminência de deslizar)

$$F_{eixo} = f_{at(e),\max} = \mu_e \cdot \mathbb{N} = 0,8 \cdot 2500N = 2000N$$

$$\tau_{eixo} = d \cdot F_{eixo} = 0.31m \cdot 2000N = \boxed{620\ (m \cdot N)}$$



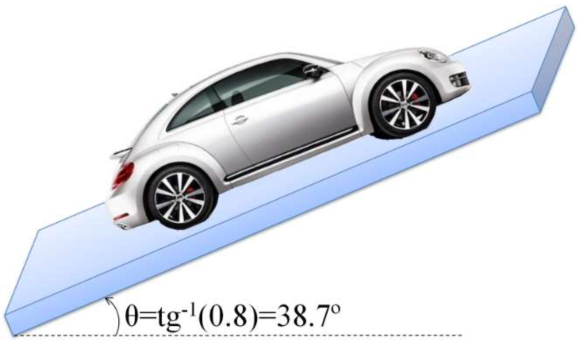

Normalmente os carros de passeio possui torque máximo de *120m·N*. Por isso quando você está passeando de carro, o pneu não desliza no asfalto.

b) Calcule a inclinação máxima da superfície que esse carro pode ser estacionado, sem deslizar.

Solução:
Podemos usar o resultado da seção '*Como medir experimentalmente o coeficiente de atrito estático* $\mu_e$':

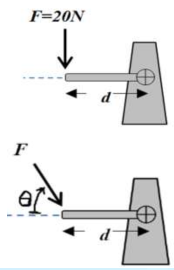
$$\mu_e = \mathrm{tg}(\theta) \Rightarrow tg^{-1}(\mu_e) = \underbrace{tg^{-1}(\mathrm{tg}(\theta))}_{\theta}$$

$\theta = tg^{-1}(\mu_e)$, $\boxed{\theta = tg^{-1}(0,8) = 38,7^{o}}$. Veja que $tg^{-1}$ é a função inversa da função *tg* (tangente). Quando você compõe uma função com a sua inversa, o resultado é o argumento dessa função.



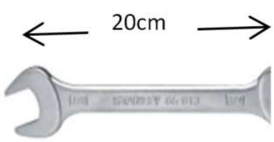

## Exercícios

**1)** O torque mínimo necessário para girar uma maçaneta de uma porta é de *2N·m*.
a) A que distância ***d*** do eixo de giro (ver figura ao lado) deve-se aplicar uma força de *20N* perpendicularmente à maçaneta?
b) Caso você aplique uma força não perpendicular à maçaneta, mas fazendo um ângulo de $\theta = 45^o$, qual o novo valor para ***F***? (considere a mesma distância ***d*** encontrada no item a).




c) Calcule a força ***F*** necessária para abrir uma cancela, sabendo que o torque necessário para abrí-la é de $\tau = 150N \cdot m$. Considere a força ***F*** perpendicular ao braço da alavanca ***d*** (*d=1,5m*).
d) Calcule o novo valor da força ***F***, se esta for aplicada a uma distância do ponto **A** de ***d/2***.

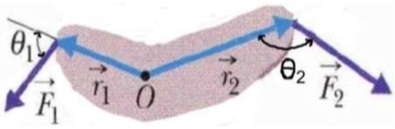

**2)** Para desparafusar um parafuso, você precisa aplicar um torque de *20N·m*.
a) Dado que a chave de boca possui um comprimento de *20cm(0,2m)*, que força se deve aplicar perpendicularmente a essa chave para retirar o parafuso? Qual a equivalência dessa força em massa? (*compare com a força peso para você ter uma noção da ordem de grandeza e veja se é possível para uma pessoa realmente desparafusar esse parafuso*). Considere a força aplicada perpendicularmente à chave.
b) Se a força máxima que uma pessoa consegue aplicar é *60N*, calcule o tamanho (***x***) do extensor necessário para acoplar a chave de boca. Considere a força aplicada perpendicularmente à chave.

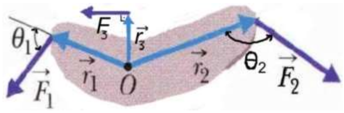



**3)** O objeto da figura ao lado está sujeito a duas forças ($\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$) que geram torques em relação ao ponto *O*.

a) Calcule o torque resultante sobre esse ponto *O*. Dados: $r_1 = 1,0m, F_1 = 20N, \theta_1 = 80^o$ e $r_2 = 2,0m, F_2 = 30N, \theta_2 = 120^o$

b) Uma nova força $\boldsymbol{F_3}$(ver figura ao lado) passa a aplicar também um torque em relação ao ponto *O*. Dado que $r_3$*=1.5m (ortogonal a força* $F_3$*)*, calcule o valor do módulo de $F_3$ sabendo que agora o objeto se encontra em equilíbrio.

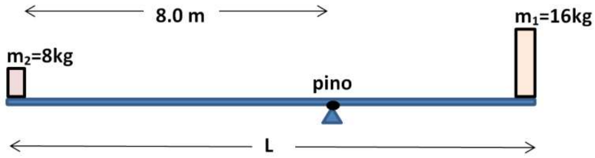


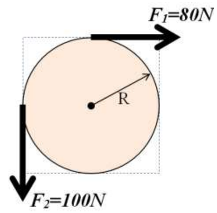

**4)** A figura abaixo representa uma gangorra (de massa desprezível) articulada em um pino (eixo de giro), com um bloco em cada extremidade.

a) Calcule o comprimento total da barra **L** (ver figura), sabendo que o sistema se encontra em equilíbrio. A distância do bloco de massa $m_2$ até o pino vale *8,0 m*.

b) Se você substituir o bloco de massa $\boldsymbol{m_1=16kg}$ por um bloco de massa ***18kg***, qual é o torque resultante em relação ao pino imediatamente após a substituição das massas (*16kg por 18kg*)?




**5)** Um disco de raio *R=0,5m* está sujeito a duas forças: $F_1$*=80N* e $F_2$*=100N* (ver figura ao lado). Calcule o torque resultante em relação ao centro do disco.




**Respostas:**

1. a) 0,1m; b) 28,28N; b) 100N; c) 200N
2. a) 100N (10kg); b) 0,133m=13,3cm
3. a) -32,26 N·m; b) 21,5N
4. a) 12m; b) -80N·m
5. +10N·m

# Energia

Energia é uma quantidade abstrata e a medimos apenas quando esta varia ou se transforma de uma forma para outra. Energia sempre está associada a variação de alguma coisa. A seguir, vamos definir trabalho mecânico, que é associado à variação da posição. Logo após, vamos definir energia cinética e energia potencial, energias associadas à velocidade e a posição, respectivamente. Por último, vamos estudar o teorema do trabalho e energia cinética, que relaciona energia cinética e trabalho mecânico.

## Trabalho Mecânico Realizado por uma Força Constante

A energia necessária, fornecida por uma força ***F***, para deslocar uma partícula de massa ***m*** de uma posição inicial $X_i$ até uma posição final $X_f$, é chamada de Trabalho Mecânico ou simplesmente de Trabalho. O Trabalho realizado pela força ***F*** para aplicar um deslocamento $\Delta X$ sobre o bloco ***m*** é

$$\boxed{W_F = F \cdot \Delta X \cdot \cos(\theta) \quad (J)} \qquad (1.23)$$

onde ***F*** é força que realiza trabalho sobre ***m***, $\boldsymbol{\Delta X}$ é o deslocamento sofrido pela partícula **m** e $\theta$ é o ângulo entre a força e o deslocamento (ou vice-versa). Quando o sub-índice ($_F$) em $W_F$ aparecer, é para indicar que o trabalho está sendo realizado pela força $F$. Logo, você vai se deparar com várias forças externas que realizam trabalho sobre $m$. A Unidade de trabalho é o Joule ($J$), que é unidade de energia. O termo *cosseno* ($cos(\theta)$) na equação (1.23) nada mais é do que a projeção da força ***F*** na direção do deslocamento $\boldsymbol{\Delta X}$ (ver Figura 28) ou a projeção do deslocamento $\boldsymbol{\Delta X}$ na direção da força ***F***. Observe que a componente da força ($F{\cdot}sen(\theta)$) perpendicular ao deslocamento $\boldsymbol{\Delta X}$ não realiza trabalho, pois sua projeção é zero. A equação (1.23) só é válida se a força ***F*** for constante ao longo de deslocamento $\Delta X$. Este será o único caso que iremos abordar neste curso. Quando a força varia ao longo do deslocamento, o cálculo integral é necessário.

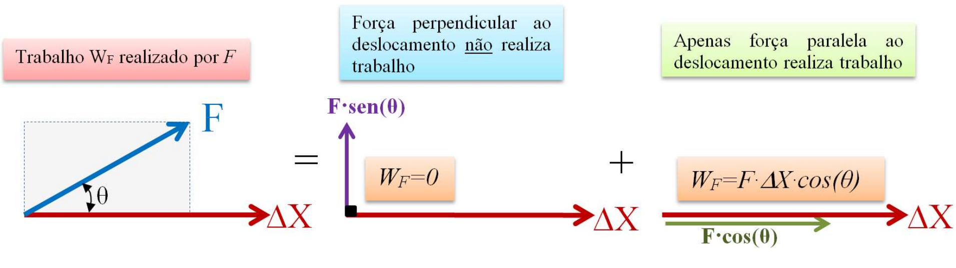



**Figura 28** – Trabalho realizado por uma força ***F*** inclinada de $\boldsymbol{\theta}$ em relação ao deslocamento $\boldsymbol{\Delta X}$. Apenas a componente da força na direção do deslocamento realizada trabalho (ou a componente do deslocamento na direção da força).

O trabalho realizado por uma força ***F*** pode ser positivo ($W_F=+F{\cdot}\boldsymbol{\Delta X}{\cdot}cos(\theta)$), negativo ($W_F=-F{\cdot}\boldsymbol{\Delta X}{\cdot}cos(\theta)$) ou até mesmo zero ($W_F=0$) caso essa força ***F*** seja perpendicular $\perp$ ao deslocamento $\boldsymbol{\Delta X}$. É de vital importância saber identificar corretamente o sinal do trabalho, pois será de grande interesse conhecer o trabalho total $W_{TOTAL}$, que é o somatório de todos os trabalhos realizados por todas as forças externas que atuam na partícula em estudo. A seguir, iremos definir a convenção de sinais para o trabalho W.

## Convenção de Sinais (+ ou -) para o Trabalho W

Na Figura 29 temos o trabalho ***W*** realizado pela força ***F*** para deslocar o bloco de massa ***m*** da posição inicial $X_i$ até a posição final $X_f$. O trabalho ***W*** é POSITIVO quando a força ***F*** e o deslocamento $\Delta X$ estão no mesmo sentido. Neste caso, podemos interpretar que a força ***F*** adicionou energia, em forma de trabalho $\boldsymbol{W_F}$, à partícula ***m***. Quando a força e o deslocamento estão em sentidos opostos, o trabalho é NEGATIVO. Agora interpretamos que a força ***F*** removeu energia, em forma de trabalho $\boldsymbol{W_F}$, da partícula ***m***. O deslocamento $\Delta X=X_f-X_i$ aponta (*sentido*) da posição inicial $X_i$ para a posição final $X_f$.

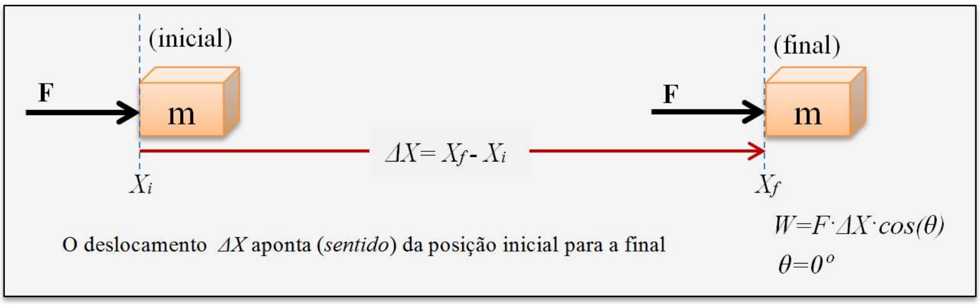
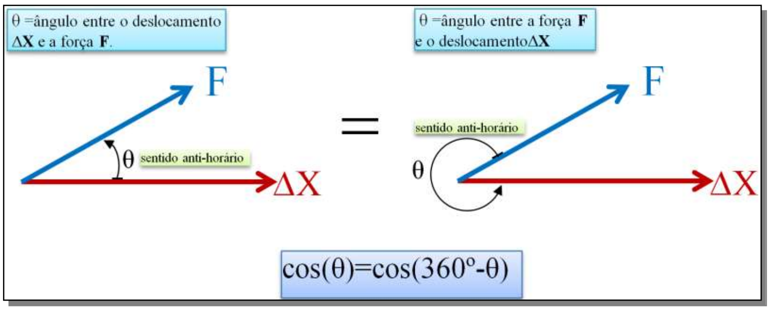



**Figura 29** – Trabalho $\boldsymbol{W_F}$ realizado pela força ***F*** sobre o corpo ***m*** para um deslocamento de $\Delta X$. Neste caso, o trabalho ***W*** é positivo, pois a força ***F*** e o $\Delta X$ deslocamento estão no mesmo sentido.

Na Figura 30, temos algumas configurações para o trabalho ***W***. Para $0º \leq \theta \leq 90º \rightarrow cos(\theta) \geq 0$ (número positivo) a projeção do deslocamento ΔX ($\Delta X \cdot cos(\theta)$) na direção da força ***F*** possuem o mesmo sentido e o trabalho $\boldsymbol{W_F}$ é positivo. Já para $90º < \theta \leq 180º \rightarrow cos(\theta) \leq 0$ (número negativo) a projeção do deslocamento ΔX ($\Delta X \cdot cos(\theta)$) na direção da força ***F*** possuem sentidos opostos e o trabalho $\boldsymbol{W_F}$ é negativo. Observe que o sinal do trabalho aparece naturalmente (veja ilustração ao lado direito) quando você usa o ângulo medido entre a força e o deslocamento (ou vice-versa), tal que o ângulo θ deve ser percorrido no sentido anti-horário. Isso só é verdade por causa da identidade trigonométrica $cos(\theta) = cos(360º - \theta)$.



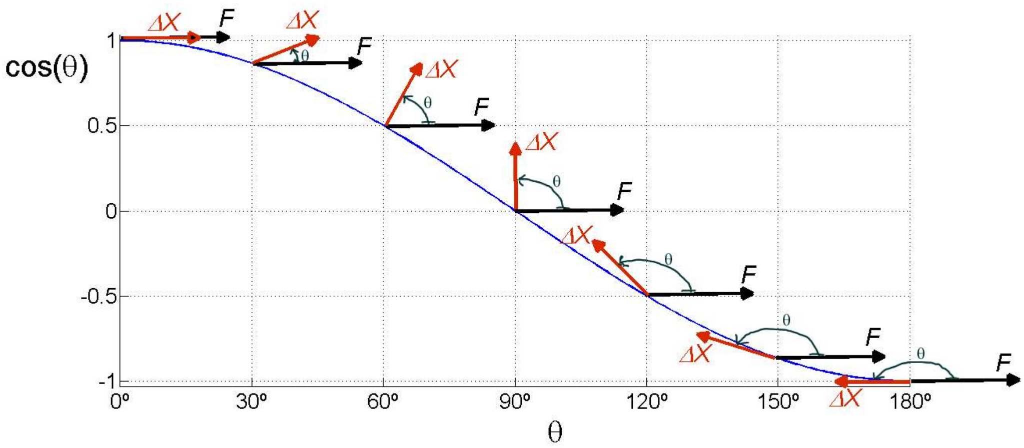
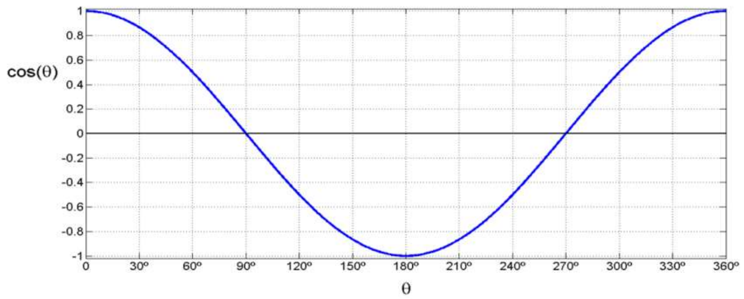




**Figura 30** - Gráfico da função cosseno versus $\theta$ para várias configurações entre a força ***F*** o deslocamento $\boldsymbol{\Delta X}$. Theta $\theta$ é o ângulo entre a força $F$ e o deslocamento $\Delta X$. O sentido positivo de $\theta$ é o anti-horário.

## Nota sobre a função cosseno

A função cosseno é uma função periódica, de período *360º* ou *2π rad*, é interpretada como sendo a projeção do raio unitário 1 no *eixo x*, ver figura ao lado. Veja que para θ=0º a projeção do raio 1 no *eixo-x* vale exatamente 1. Já para $\theta=90^o$ a projeção em $x$ vale zero, e assim por diante. A função cosseno está sempre compreendida no intervalo $-1 \leq cos(\theta) \leq 1$ (de forma análoga à função seno).



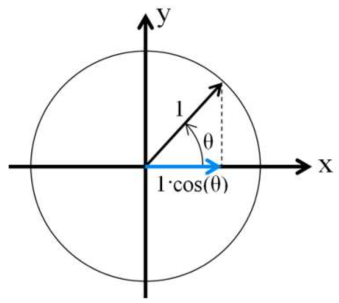
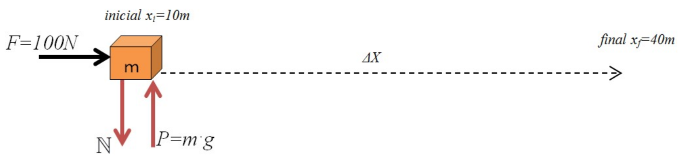




**Figura 31** – Gráfico da função cosseno. Pela análise gráfica, é possível mostrar que *cos(θ)=cos(360º-θ)*. A função cosseno pode ser interpretada como sendo a projeção do raio unitário no *eixo-x* (ver figura à direita).

*Exemplos*
**E.1)** Calcular o trabalho realizado por:
a) uma força horizontal aplicada de *100N* (cujo sentido é para direita) para deslocar um corpo de massa *m=10kg* da posição inicial $x_i=10m$ até a posição final de $x_f=40m$.

b) Pela reação normal $\mathbb{N}$.

*Solução: D.C.L. do bloco (m)*




a): $W_F = F \cdot \Delta X \cdot \cos(0^o)$

$$W_F = \underbrace{100N}_{F} \cdot \underbrace{(40m - 10m)}_{\Delta X = X_f - X_i} \cdot \underbrace{\cos(0^o)}_{1} = 3000J.$$

b): $W_{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cdot \Delta X \cdot \underbrace{\cos(90^o)}_{0} = 0J.$

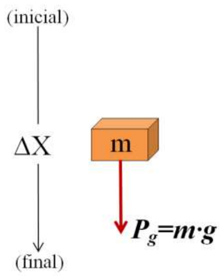
*A força Normal nunca realiza trabalho, pois esta é sempre perpendicular ao deslocamento*.

**E.2)** Calcular o trabalho realizado pela força peso sobre um bloco de massa *m=10kg*, durante:

a) A queda de uma altura de *10m*.
b) A subida da mesma altura de queda do item a.
*Solução:*

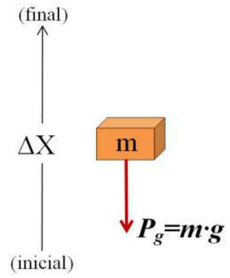
*a) durante a queda, o deslocamento é no mesmo sentido da força, portanto θ=0º e o trabalho é:*

$W_g = P_g \cdot \Delta X \cdot \underbrace{\cos(0^o)}_{1} = \underbrace{10kg \cdot 10m/s^2}_{peso} \cdot \underbrace{10m}_{\Delta X} \cdot (1) = 1000J$. *Neste caso, o trabalho realizado pela força peso é positivo, pois a força* $\boldsymbol{P_g}$ *e o deslocamento* $\boldsymbol{\Delta X}$ *estão no mesmo sentido (apontando para baixo). O sinal (+) significa que a força peso adiciona energia à partícula. A partícula usa essa energia adicionada para aumentar a sua velocidade.*



*b) durante a subida, a força e o deslocamento possuem sentidos opostos, ou seja, θ=180º e o trabalho é:*

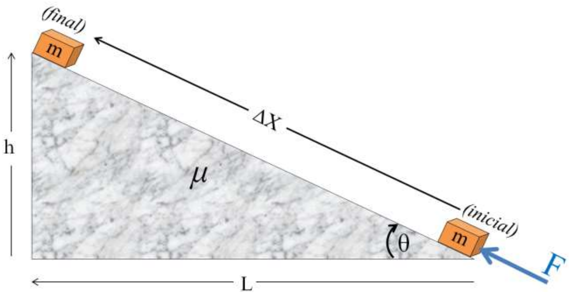
$W_g = P_g \cdot \Delta X \cdot \underbrace{\cos(180^o)}_{-1} = \underbrace{10kg \cdot 10m/s^2}_{peso} \cdot \underbrace{10m}_{\Delta X} \cdot (-1) = -1000J$. *Neste caso, o trabalho realizado pela força peso é negativo, pois a força e o deslocamento estão em sentidos opostos: a força peso <u>sempre</u> aponta para baixo e o deslocamento está apontando para cima. O sinal (-) significa que a força peso remove energia da partícula. Essa energia removida veio da energia cinética (velocidade) da partícula. Por isso a sua velocidade diminui durante a subida.*




**E.3)** Na figura ao lado, tem-se um bloco de massa *m=6kg*. Esse bloco é empurrado para cima, por uma força ***F=50N***, a uma distância *ΔX=5m* ao longo da superfície de um plano inclinado de θ=30º e com coeficiente de atrito dinâmico μ=0,25.

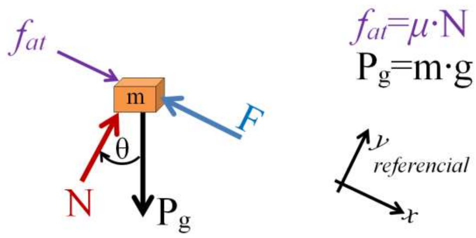
a) calcule o trabalho realizado pela *força* ***F***, pela *força Peso* $\boldsymbol{P_g}$, pela *reação Normal* ***N*** e pela *força de atrito* $\boldsymbol{f_{at}}$.

b) Calcule o trabalho total (que é o somatório de todos os trabalhos realizados por todas as forças externa sobre ***m***).




***a)*** *O referencial adotado é o inclinado (veja D.C.L do bloco (m))*

D.C.L. do bloco (m)




♠Trabalho realizado pela força ***F***: $W_F = F \cdot \Delta X = 50N \cdot 5m = \boxed{250J}$.

♠Trabalho realizado pela força peso (somente $P_x$ realiza trabalho):

$W_{P_g} = -\underbrace{P_g \cdot sen(\theta)}_{P_x} \cdot \Delta X = -6kg \cdot 10m/s^2 \cdot sen(30^o) \cdot 5m = \boxed{-150J}$.

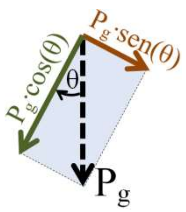
♠Trabalho realizado pela reação Normal:

$W_N = \mathbb{N} \cdot \Delta X \cdot \underbrace{\cos(90^o)}_{0} = \boxed{0J}$.

♠Trabalho realizado pela força de atrito:

$W_{f_{at}} = -f_{at} \cdot \Delta X = -\mu \cdot \underbrace{\mathbb{N}}_{P_y} \cdot \Delta X = -\mu \cdot \underbrace{P_g \cdot \cos(\theta)}_{P_y} \cdot \Delta X =$

$-\underbrace{0,25}_{\mu} \cdot \underbrace{6kg \cdot 10m/s^2 \cdot \cos(30^o)}_{P_y} \cdot \underbrace{5m}_{\Delta X} = \boxed{-65,0J}$.




***b)*** Trabalho total:

$W_{TOTAL} = W_F + W_{P_g} + W_N + W_{f_{at}}$

$= 250J + (-150J) + 0J + (-65J)$

$\boxed{W_{TOTAL} = 35J}$.

## Potência Média

Quando calculamos o trabalho realizado por uma força ***F***, não nós preocupamos com o tempo que dura a realização do trabalho. Potência média quantifica o quão rápido um trabalho pode ser realizado por uma força ***F***. Definição:

$$\boxed{P_{med} = \frac{W}{\Delta t} \quad (W); \quad 1 \cdot W = J/s} \qquad \boxed{Potência = \frac{Energia}{tempo}} \tag{1.24}$$

$$\boxed{P_{med} = \frac{F \cdot \Delta X \cdot \cos(\theta)}{\Delta t} \quad (W)}$$

onde ***W*** é o trabalho realizado ($W = F \cdot \Delta L \cdot \cos(\theta)$, equação (1.23)) e $\Delta t$ é o intervalo de tempo (em s*egundo*) que durou a realização do trabalho ***W***. A unidade de potência (no SIU) é o Watt que é abreviada pelo símbolo *W* (cuidado para não confundir com a variável Trabalho W). A equação para a potência média é válida apenas quando a força *F* é constante ao longo do deslocamento *ΔX*. A grandeza potência tem várias unidades, por exemplo, cavalo-vapor (*cv*), também a unidade Houser-Power (*HP*). A relação de conversão é: *1cv=735,5W* e *1HP=745,7W*. Outra forma de escrever a potência média $P_{med}$:

$$\boxed{P_{med} = F \cdot \left(\frac{\Delta X}{\Delta t}\right) = F \cdot \upsilon \quad (W = J/s)} \quad \text{(Potência média = força × velocidade média)} \qquad (1.25)$$

Exemplos

**E.1)** Para uma máquina com potência média de *500W (500Watt)*, significa que essa gasta 500J de energia por segundo, ou seja, *500J/s*. Se essa máquina ficar ligada por <u>uma hora</u>, qual é a energia gasta? Como $P_{med} = \frac{W}{\Delta t}$, portanto $W = P_{med} \cdot \Delta t$, substituindo os valores numéricos $W = 500\frac{J}{\cancel{s}} \cdot \overbrace{3600\cancel{s}}^{1\text{hora}} = \boxed{1800000J}$.

**E.2)** Você deseja dimensionar um motor para um elevador de um prédio residencial. Esse elevador vai subir 10 andares (totalizando *28m* de altura) com uma carga máxima de *6* pessoas (*80kg* por pessoa, totalizando *480kg*) com <u>velocidade</u> <u>constante</u>. Você pode dimensionar a potência do elevador a depender do tempo de subida que você achar necessário. Por exemplo, qual deve ser a potencia do motor para que o tempo de subida dure:

a) 2 min

b) 15s

*Solução:*

$a)$

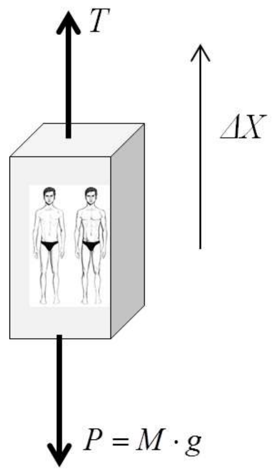
$$\boxed{P_{med} = F \cdot \left(\frac{\Delta X}{\Delta t}\right) = F \cdot \upsilon}$$

$$P_{med} = \underbrace{\left(480kg \cdot 10m/s^2\right)}_{\text{tração no cabo do elevador}} \frac{\overbrace{28m}^{\Delta X}}{\underbrace{2 \cdot 60s}_{2\text{min}}} = \boxed{1120\text{W}=1{,}52\text{cv}}.$$

b)

$$\boxed{P_{med} = F \cdot \left(\frac{\Delta X}{\Delta t}\right) = F \cdot \upsilon}$$

$$P_{med} = \underbrace{\left(480kg \cdot 10m/s^2\right)}_{\text{tensão no cabo do elevador}} \frac{28m}{15s} = \boxed{8960\text{W}=12{,}18\text{cv}}.$$




*Aplicando a $1^a$ lei de Newton no elevador, temos*

$+\uparrow \sum F_{ext,y} = 0,$

(subindo com velocidade constante)

$T - P = 0 \Rightarrow T = P$

$T = M \cdot g$

*A força de tração no cabo do elevador é que vai realizar Trabalho:* $W_T = T \cdot \Delta X$. *Veja que o trabalho realizado pela força peso é* $W_g = -W_T$.

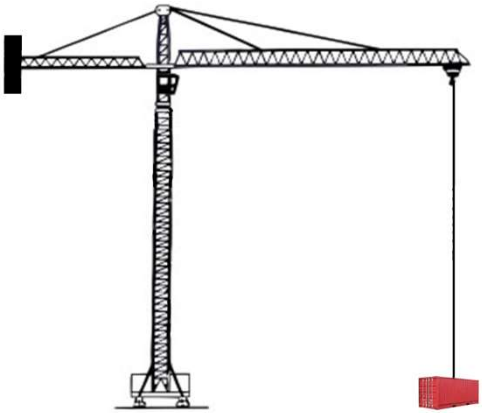
*Observe que a potência do elevador do item (b) é bem maior que a do item (a). Para o mesmo trabalho realizado pelo cabo do elevador, a potência do motor do vai depender do tempo de duração da realização do trabalho.*

**E.3)** A OMS (Organização Mundial da Saúde) recomenda a ingestão diária de *2000kcal* para o ser humano.
a) Calcule essa energia em *Joule*. Dados: *1cal=4,19J* e *k=1000*.
b) A potência média.

Solução: a) $\text{W} = 2000\text{kcal} = 2000 \cdot \underbrace{1000}_{k} \cdot \underbrace{4{,}19\text{J}}_{1cal} = \boxed{8{,}38 \cdot 10^6\,J}$.

b) $P_{med} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{8.38 \cdot 10^6\,J}{\underbrace{24 \cdot 3600s}_{1dia}} = \boxed{97W}$. Equivalente a uma lâmpada incandescente de *100W*.

**E.4)** Uma grua é usada para elevar, por uma altura de *10m* em 25*s*, um contêiner carregado com massa total 3500kg(ver figura ao lado). Calcule a potência (em *W* e *HP*) do motor necessária para elevar esse contêiner com velocidade constante. Dado: *745,7W=1HP*.



*Solução:*

$$P_{med} = F \cdot \upsilon$$

$$P_{med} = \underbrace{\left(3500kg \cdot 10m/s^2\right)}_{\text{tração no cabo = peso contêiner para subida com velocidade constante}} \cdot \underbrace{\frac{10m}{25s}}_{\text{velocidade de subida}} = \boxed{14000\text{W}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1HP}{745,7W}\right)}_{\text{converter para HP}} = \boxed{18,8HP}$$

*Aqui não levamos em conta o atrito. Provavelmente se você usar essa potência, o contêiner irá levar um tempo bem maior para subir ou talvez nem saia do lugar. O mesmo vale para o elevador do exemplo anterior.*

## Potência Instantânea (*opcional)

A definição acima só é válida quando o trabalho W não varia com o tempo. Agora quando temos a situação em que W é variável no tempo (é o mesmo que a força variar ao longo do deslocamento), devemos calcular a Potência instantânea, que é o valor da potência em um tempo *t* específico. Definição

$$\boxed{P(t) = \frac{dW(t)}{dt}} \qquad (1.26)$$

A potência instantânea é a derivada do trabalho em relação ao tempo.

**E.4)** Temos que o trabalho realizado por uma força ***F*** varia com o tempo da forma: $W(t) = 200 \cdot t^2 + 20 \cdot t \quad (J)$. Calcular a potência no instante de tempo *t=3s*.

*Solução*: $P(t) = \dfrac{dW(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}W(t) = \dfrac{d}{dt}\left(200 \cdot t^2 + 20 \cdot t\right) = 400t + 20$. Veja que $P(t) = 400t + 20 \;\; (W)$ a potência varia com o tempo *t*, e para *t=3s*, é só substituir $P(t = 3s) = 400(3s) + 20 = 1220\,W$.

## Exercícios

**1)** Em um carro popular de 1000 c.c. (*c.c.=centimetro cúbico = 1cm³ e 1000cm³=1L*), a potência do motor é 60cv. Calcule:
a) Essa potência em Watt (*1cv=735,5W*).
b) A energia, em Joule, gasta pelo motor durante uma hora de funcionamento.
c) Dado que o consumo é, em média, 14 km/L de gasolina, quantos reais R$ são gastos para percorrer 520km (ida e volta a Porto Alegre), sabendo que o preço da gasolina R$ 3,50 o litro.
d) A autonomia do carro (*distância que este consegue percorrer sem abastecer*), dado que a capacidade do tanque de combustível é de 50L.

**2)** A energia dissipada por segundo por um chuveiro elétrico é *7000W*(=7kW).
a) Quanto se gasta de energia, em Joule, em um banho contínuo de *10min*.
b) Qual o valor da potência do chuveiro em *cv* (*1cv=735,5W*).

**3)** A potência de um trator Agrale BX 6180 é *168 cv*.
a) Calcule essa potência em Watt *W* (*1cv=735,5W*).
b) Dado que o consumo médio de combustível é 7L/h, calcule quantos Reais (R$) são gastos em 8 horas de trabalho. Considere 1L de combustível=*R$ 2,70*.

**4)** O motor de um elevador de carga eleva um total de *2000kg* a uma altura de *15m* em *20* segundos com velocidade constante.
a) calcule o trabalho realizado pelo cabo do elevador da altura *0m* até *15m*.
b) calcule a potência do motor em ***W*** e ***cv*** (*1cv=735,5W*).

**Respostas:**
1. a) 44130W; b) $1{,}59 \cdot 10^8$J; c) R$130; d) 700km
2. a) $4{,}2 \cdot 10^6$J; b) 9,52cv
3. a) 123564W; b) R$ 151,2
4. a) $3 \cdot 10^5$J; b) 15000W e 20,39cv

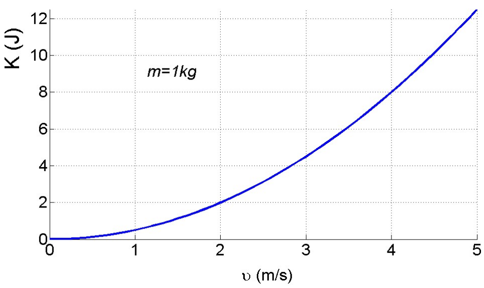
## Energia Cinética e Potencial

A energia associada a uma partícula é devido ao seu movimento (energia cinética) e a sua posição no espaço (energia potencial). A energia potencial é uma espécie de energia de interação, aqui vamos estudar apenas a energia potencial gravitacional e a energia potencial elástica. Que é a interação da partícula com o planeta terra e a interação da partícula com uma mola, respectivamente.

**Energia Cinética K** – É a Energia associada ao movimento (velocidade) de uma partícula, sua definição é dada por

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2, \quad (J)} \qquad (1.27)$$

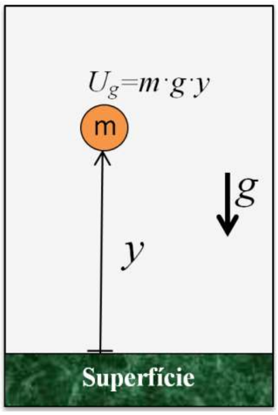
onde *m* é a massa em quilograma (*kg*) e υ é a velocidade em *m/s*. A unidade de energia é o Joule (*J*). Observe que a energia cinética depende apenas da velocidade da partícula e da sua massa, não depende da posição. A energia cinética é uma quantidade sempre POSITIVA. A figura ao lado representa a energia cinética *K* versus velocidade υ para uma partícula de massa *m=1kg*.




**Energia Potencial Gravitacional Ug** – Energia associada à posição (altura vertical) *y* no campo gravitacional ***g***. A energia potencial gravitacional é devido a atração gravitacional da partícula *m* com o planeta Terra. Em resumo, é a energia de *interação* de *m* com todo o planeta terra

$$\boxed{U_g = m \cdot g \cdot y \qquad (J)} \qquad (1.28)$$

$U_g$ é a energia armazenada na partícula *m*. Essa energia armazenada pode ser convertida em outro tipo de energia, como por exemplo, em energia cinética e vice-versa. Se uma partícula está uma altura *y (em relação à superfície)*, e você soltar essa partícula, esta vai ganhar velocidade durante a sua queda. Imediatamente antes dessa partícula tocar o solo, sua velocidade é máxima (sua energia Cinética) e sua energia potencial gravitacional é mínima (na verdade, vale zero). Neste processo, durante a queda, temos a energia potencial sendo convertida em energia cinética. O caso inverso também ocorre, quando você joga um objeto para cima, à medida que esse sobe, o objeto vai ganhado posição (altura *y*) e perdendo velocidade (energia cinética). Na altura máxima, sua velocidade é zero e sua energia potencial é máxima. Desprezando a resistência do ar, a soma da energia cinética com a energia potencial gravitacional é sempre constante (a energia total é conservada).



A energia potencial gravitacional, equação (1.28), aumenta linearmente com a altura vertical $y$ da partícula $m$. Sendo positiva quando a altura $y$ está acima da superfície e negativa quando a altura está abaixo da superfície. A energia potencial gravitacional é medida em relação à superfície da terra. É recomendável que você sempre adote o seu referencial positivo para cima, pois se você escolher o referencial positivo para baixo, o sinal de $g$ deve ser trocado.

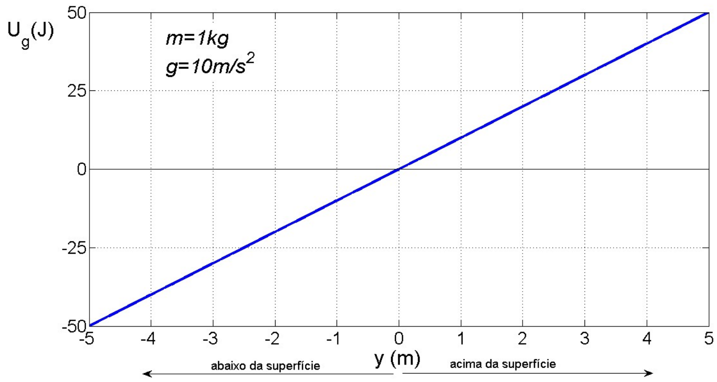



**Figura 32** – Energia potencial gravitacional de uma partícula de massa $m=1kg$ versus $y$ (altura em relação à superfície da terra). A energia é positiva se a partícula está acima da superfície, e é negativa caso a partícula esteja abaixo da superfície.

**Energia Potencial Elástica Ue** – Energia armazenada em uma mola de constante elástica $k$, devido a uma compressão ou distensão $z$, em relação a sua posição de equilíbrio ($z=0$). É a energia de *interação* de $m$ com uma mola de constante elástica $k$. A energia potencial elástica armazenada na mola é dada por

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}k \cdot z^2 \qquad (J)}. \tag{1.29}$$

Com essa energia armazenada, a mola pode ceder para a partícula $m$ ganhar energia cinética e a partícula devolve essa energia para a mola ganhar energia potencial (ganhar posição z). Se não existir atrito entre a superfície e o bloco, teremos o bloco oscilando em torno da posição de equilíbrio da mola para todo o sempre O sistema massa+mola funciona dessa maneira. Ao contrário da energia potencial gravitacional, a energia potencial elástica é uma quantidade sempre POSITIVA. O ponto de mínimo no gráfico da energia potencial elástica corresponde a força resultante nula ($F_e=0$).

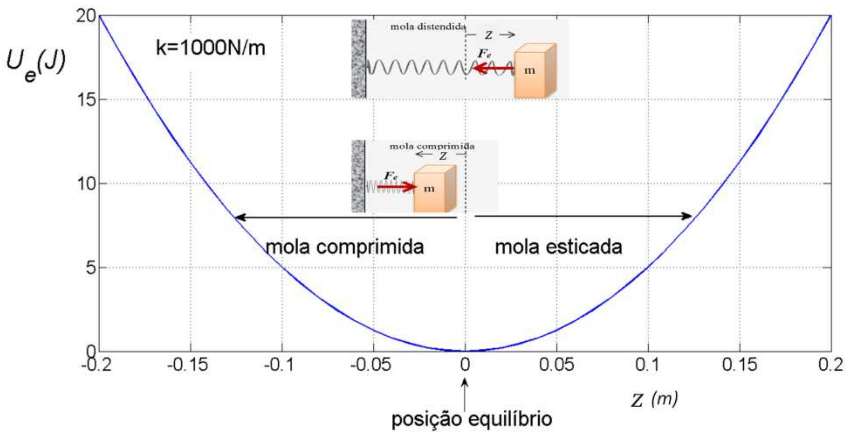



**Figura 33** – Energia potencial elástica armazenada em uma mola de constante elástica $k=1000N/m$ quando esta se encontra esticada ($z>0m$) ou comprimida ($z<0m$). Em ambos os casos, a energia potencial elástica é uma quantidade sempre positiva. A posição de equilíbrio, onde a força elástica é zero, corresponde ao ponto de mínimo no gráfico de $Ue$.

Exemplos

**E.1)** Calcular a energia potencial elástica armazenada em uma mola de constante elástica *k=3000N/m*, quando essa se encontra comprimida de *z=5cm*.

*Solução:* $U_e = \frac{1}{2}k \cdot z^2 \Rightarrow U_e = \frac{1}{2}3000N/m \cdot (0,05m)^2 = \boxed{3,75J}$

**E.2)** Sabe-se que a energia potencial elástica armazenada em uma mola de constante elástica *k=2000N/m* é *2J*. Calcule a compressão (*z<0m*) ou distensão (*z>0m*) da mola.

*Solução:* $U_e = \frac{1}{2}k \cdot z^2 \Rightarrow$ isolar z: $z^2 = \frac{2 \cdot U_e}{k} \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot U_e}{k}} \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 2J}{2000N/m}} = \boxed{\pm 0,045m}$.

Se você entendeu que uma mola comprimida ou distendida pode armazenar energia, será fácil perceber que uma molécula também pode armazenar energia potencial, devido à ligação química entre os átomos que constitui essa molécula. Essa ligação química você pode interpretar como *mola* ligado um átomo a outro. Você pode obter energia dessa molécula, quebrando-a. É o que ocorre com a quebra da molécula de ATP (trifosfato de adenosina) em ADP (difosfato de adenosina), a partir da glicose, o nosso principal combustível.

## Relação entre Trabalho W e variação de energia potencial ΔU para um campo de força conservativo

Para uma força *F* não dissipativa, podemos escrever o trabalho realizado por essa força como sendo o negativo da variação da energia potencial associada a essa força, ou seja

$$\boxed{W_F = -\Delta U_F}, \tag{1.30}$$

o sinal negativo é para indicar que a força *F* aponta da região de <u>maior energia potencial</u> para a região de <u>menor energia potencial</u>. A expressão $\Delta U_F = U_{F(final)} - U_{F(inicial)}$ é a variação da energia potencial associada à força *F*. Variação Δ é sempre o estado *final* menos o estado *inicial*. O especial da equação (1.30) é que o trabalho realizado $W_F$ pela força conservativa *F* depende apenas do estado *inicial* e do estado *final*, não depende da trajetória utilizada a partir da posição *inicial* até chegar à posição *final (ver* Figura 34*)*. Neste caso, $W_F$ é chamado de variável de estado (*inicial* e *final*).

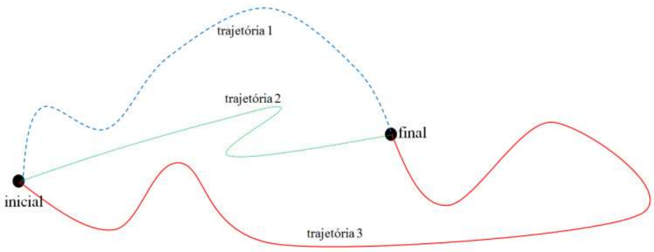



**Figura 34** - O trabalho realizado por uma força conservativa não depende da trajetória utilizada para sair da posição *inicial* até a posição *final*. Neste exemplo, o trabalho realizado pela força conservativa *F*, usando a trajetória 1 é igual ao trabalho usando a trajetória 2 ou 3.

A força de atrito é uma força dissipativa, portanto, <u>não é possível escrever</u> $W_{f_{at}} = -\Delta U_{f_{at}}$, pois não existe a função $U_{f_{at}}$. Isso que dizer que o trabalho realizado pela força de atrito depende da trajetória que você escolher para sair da posição <u>*inicial*</u> até a posição <u>*final*</u>.

Casos particulares da equação (1.30) ou $W_F = -\Delta U_F$

**Trabalho realizado pela força Peso:** Podemos escrever o trabalho realizado pela força peso como sendo o negativo da variação da energia potencial gravitacional,

$$W_g = -\Delta U_g, \quad \Rightarrow \quad W_g = -(U_{g(final)} - U_{g(inicial)}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_g = -(m \cdot g \cdot y_f - m \cdot g \cdot y_i)}. \tag{1.31}$$

Na equação (1.31), temos o trabalho realizado pela força peso $P_g$ para deslocar a partícula $m$ da posição inicial $y_i$ até a posição final $y_f$. Veja que o deslocamento $\Delta y = y_f - y_i$ aponta da posição <u>inicial</u> para a posição <u>final</u>. Só existe variação de energia potencial gravitacional (ou $W_g$) se houver uma diferença de nível vertical $\Delta y \neq 0$. Como a força peso é constante ao longo do deslocamento, a equação (1.31) pode ser escrita como: $W_g = -m \cdot g \cdot (y_f - y_i) = -m \cdot g \Delta y = -P_g \cdot \Delta y$, que é exatamente a definição de trabalho mecânico, equação (1.23) . Esse trabalho $W_g$ é positivo (Figura 35) quando o deslocamento apontar para baixo $\Delta y < 0$ (a força peso sempre aponta para baixo), e o trabalho é negativo (Figura 36) quando o deslocamento apontar para cima $\Delta y > 0$ (sentido oposto ao da força). Confira nessas figuras, que a força peso aponta da região de <u>maior energia potencial</u> gravitacional para a região de <u>menor energia potencial</u> gravitacional.

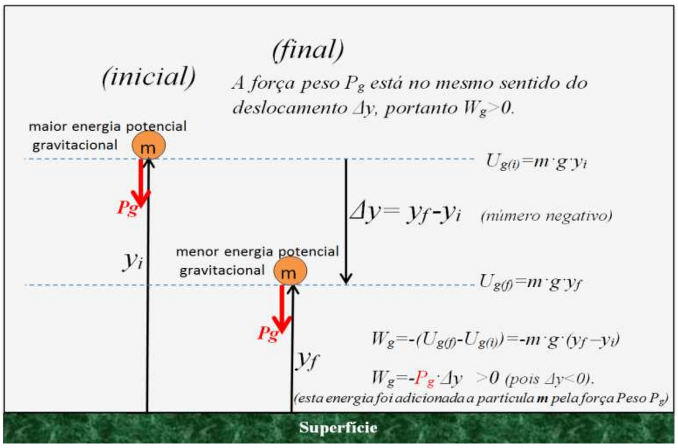



**Figura 35** - A variação da energia potencial gravitacional só depende da diferença de altura $\Delta y$ na vertical. Com essa variação, é possível calcular o trabalho realizado pela foça gravitacional (força peso).

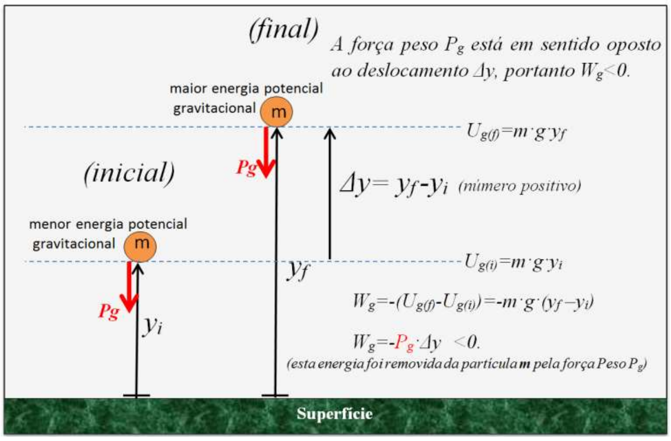



**Figura 36 -** A variação da energia potencial gravitacional só depende do deslocamento $\Delta y$ na vertical. Com essa variação, é possível calcular o trabalho realizado pela foça gravitacional (força peso).

Exemplos

**E.1)** Calcule a energia potencial gravitacional de uma partícula de massa $m = 10kg$ que se encontra na posição inicial $y_i = 10m$, na posição final $y_f = 15m$ e o trabalho realizado pela força peso entre a posição inicial e final.

$Solução: U_g = m \cdot g \cdot y \Rightarrow U_{g(inicial)}(y_i) = 10kg \cdot 10m/s^2 \cdot 10m = 1000J;\ U_{g(final)}(y_f) = 10kg \cdot 10m/s^2 \cdot 15m = 1500J,$

$W_g = -\Delta U_g = -\left(U_{g(final)} - U_{g(inicial)}\right) = -(1500J - 1000J) = -500J.$

**Trabalho Realizado pela Força Elástica:** Também podemos escrever o trabalho realizado pela força elástica como sendo o negativo da variação da energia potencial elástica,

$$W_e = -\Delta U_e, \quad \Rightarrow \quad W_e = -(U_{e(final)} - U_{e(inicial)}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_e = -\frac{1}{2}k \cdot \left(z_f^2 - z_i^2\right)}. \tag{1.32}$$

Na equação(1.32), temos o trabalho realizado pela força elástica da mola para deslocar a partícula $m$ da posição inicial $z_i$ até a posição final $z_f$. Lembrando que $z$ é o deslocamento em relação à posição de equilibro da mola (estado relaxado). Veja que o deslocamento $\Delta z = z_f - z_i$ aponta da posição inicial para a posição final. Para o trabalho realizado pela força elástica, você não pode mais aplicar a equação (1.23), pois a força elástica ($F_e = k \cdot z$) varia ao longo do deslocamento $z$. De forma análoga a força peso, a força elástica aponta da região de maior energia potencial elástica para a região de menor energia potencial elástica (ou para a posição de equilíbrio).

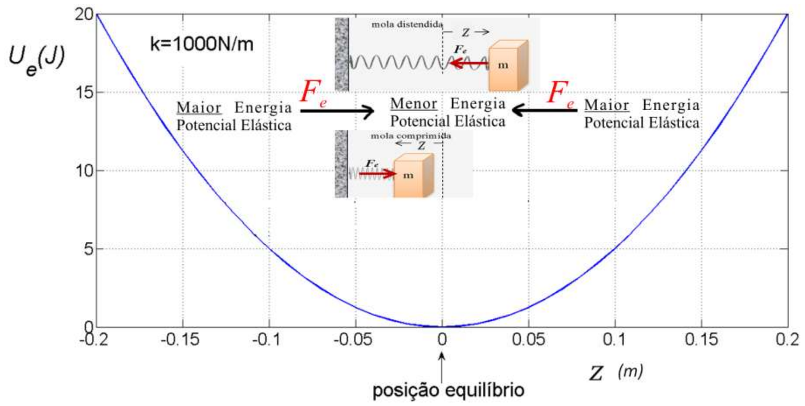
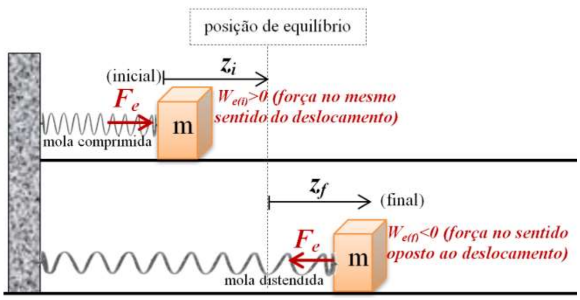



**Figura 37** – A força elástica aponta da região de maior energia potencial elástica para a região de menor energia potencial elástica. Novamente, a força elástica irá sempre apontar para a sua posição de equilíbrio.

*Exemplos*

**E.1)** Calcule o trabalho realizado pela força elástica da mola, de constante $k=2000N/m$, para deslocar o bloco da posição inicial $z_i=-0,03m$ até a posição final $z_f=0,05m$ *(ver figura ao lado).*

$$W_e = -\frac{1}{2}k \cdot \left(z_f^2 - z_i^2\right) = -\frac{1}{2}2000N/m \cdot \left((0,05m)^2 - (-0,03m)^2\right) = \boxed{-1.6J}$$




**E.2)** O trabalho realizado pela força da mola de constante elástica $k=1000N/m$, sobre o bloco $m$ anexado a essa mola entre a posição inicial e a final foi de $3J$. Sabendo-se que o bloco partiu da posição inicial $z_i=0.1m$ calcule a posição final do bloco $z_f$.

Solução: a partir da equação (1.32), vamos isolar o $z_f$:

$$W_e = -\frac{1}{2}k\left(z_f^2 - z_i^2\right) \Rightarrow z_f^2 = \frac{-2 \cdot W_e}{k} + z_i^2 \Rightarrow z_f = \pm\sqrt{\frac{-2 \cdot W_e}{k} + z_i^2} \Rightarrow z_f = \pm\sqrt{\frac{-2 \cdot 3J}{1000N/m} + (0,1m)^2} \Rightarrow \boxed{z_f = \pm 0,063m}$$

Para o trabalho realizado pela força da mola, a posição final pode ser $+0,063m$ ou $-0,063m$, ambas as posições finais irão requerer a mesma energia $3J$.

## Teorema do Trabalho e Energia Cinética

O teorema do trabalho e energia cinética é um dos mais importantes da mecânica. Esse teorema pode ser demonstrado usando a segunda lei de Newton e a definição de trabalho mediante o uso do cálculo integral. O teorema declara que o somatório de todos os trabalhos *W's* realizados por todas as forças externas sobre uma partícula de massa $m$ é igual a variação da energia cinética dessa partícula, ou

$$\boxed{W_{total} = \Delta K}, \tag{1.33}$$

onde $W_{total} = W_{F_1} + W_{F_2} + \ldots$ é a soma dos trabalhos realizados pelas forças $F_1$, $F_2$, etc. E $\Delta K$ é a variação da energia cinética da partícula $m$: $\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}m\upsilon_f^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_i^2$ e $\upsilon$ é o módulo da velocidade. Para aplicar corretamente o teorema, é preciso saber identificar corretamente as forças que realizam trabalho sobre a partícula. Nem todas as forças externas realizam trabalho, por exemplo, a reação Normal, que é uma força externa, não realizada trabalho ($W_N = 0\,J$) devido esta ser sempre perpendicular ao deslocamento. Tenha cuidado para não esquecer um trabalho realizado por uma força na equação (1.33).

Análise do sinal de $W_{total}$ :

$se \quad W_{total} > 0 \Rightarrow \Delta K > 0 \Rightarrow \upsilon_f^2 - \upsilon_i^2 > 0 \Rightarrow \upsilon_f > \upsilon_i$ (o módulo da velocidade do corpo aumenta),

$se \quad W_{total} < 0 \Rightarrow \Delta K < 0 \Rightarrow \upsilon_f^2 - \upsilon_i^2 < 0 \Rightarrow \upsilon_f < \upsilon_i$ (o módulo da velocidade do corpo diminui),

$se \quad W_{total} = 0 \Rightarrow \Delta K = 0 \Rightarrow \upsilon_f^2 - \upsilon_i^2 = 0 \Rightarrow \upsilon_f = \upsilon_i$ (o módulo da velocidade do corpo se mantém constante).

**Para $W_{total} = 0$.** Quando $W_{total} = 0$ o módulo da velocidade do corpo se mantém constante, embora a sua direção possa variar. Neste caso, o movimento é acelerado (força resultante não nula). No movimento circular uniforme (M.C.U.), a velocidade do movimento é sempre constante, em módulo, mas a direção da velocidade varia a cada instante de tempo, portanto é um movimento acelerado, cuja aceleração resultante é a centrípeta. Neste exemplo (M.C.U.), o Trabalho total é igual a zero ($W_{total} = 0$), mas o movimento é acelerado. Devido ao fato de energia (trabalho mecânico W) ser uma quantidade escalar, esta só captura informação do módulo da velocidade υ e não da sua direção ou sentido.

**Para $W_{total} \neq 0$.** Quando você deixa cair um objeto do alto de um edifício, o módulo da velocidade desse objeto durante a queda irá sempre aumentar (desprezando a resistência do ar) devido o trabalho realizado pela força peso ser positivo. Esse objeto só irá parar quando este colidir com o chão. Agora, quando você joga um objeto para cima, a velocidade desse objeto irá sempre diminuir durante a subida, devido o trabalho realizado pela força peso ser negativo. No ponto mais alto da trajetória, a velocidade passa a ser zero (o corpo entra no estado de repouso) e depois volta a cair, agora com a velocidade aumentando. Um corpo somente pode entrar no estado de repouso (temporário ou definitivo), quando o trabalho total que atua sobre este for negativo ($W_{total} < 0$). Por outro lado, quando $W_{total} > 0$ o corpo só irá parar quando este colidir e ficar preso em algum obstáculo (no chão, por exemplo).

## Casos Particulares do Teorema do Trabalho e Energia Cinética

Agora vamos discutir alguns casos particulares, em que algumas forças externas realizam trabalho sobre a partícula $m$.

**1º Caso: Apenas a Força Peso $P_g$ realiza trabalho**: $W_{total} = W_g$ e $W_g = -\Delta U_g$ portanto $W_{total} = -\Delta U_g$.

Aplicando o teorema $W_{total} = \Delta K \Rightarrow -\Delta U_g = \Delta K$ ou $\Delta U_g + \Delta K = 0$. Como $U_g = m \cdot g \cdot y$ e $K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$. Então temos que

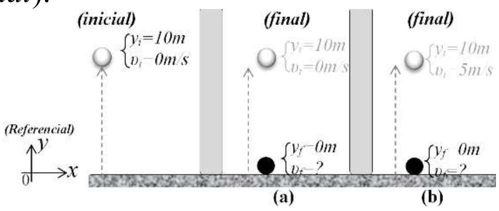
$$\underbrace{\cancel{m} g(y_f - y_i)}_{\Delta U_g} + \underbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2)}_{\Delta K} = 0,$$

$$\boxed{g(\underbrace{y_f - y_i}_{\Delta y}) + \frac{1}{2}(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2) = 0}. \qquad (1.34)$$

Observe que nesse caso, não existe dependência com a massa da partícula *m*. Com a equação (1.34), você pode calcular velocidade $\upsilon$ ou altura *y*. Você também pode escrever a equação $\Delta U_g + \Delta K = 0$ como $\Delta(U_g + K) = 0$, o que implica em $U_g + K =$ constante. Chamamos a soma da energia potencial com a energia cinética de energia mecânica $E_m$: $E_m = U_g + K = m \cdot g \cdot y + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$. Como a energia mecânica é sempre constante, então esta deve ter o mesmo valor no estado inicial (*i*) e no estado final (*f*), ou seja, $E_{m(i)} = E_{m(f)}$ $\Rightarrow m \cdot g \cdot y_i + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_i^2 = m \cdot g \cdot y_f + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_f^2$, que é exatamente a equação (1.34), apenas escrita em termos de variação. Veja que existem diversas maneiras de escrever a mesma equação, use a forma que mais lhe agradar.

*Exemplos*

**E.1)** Uma partícula de massa *10kg* é solta (com velocidade nula) de uma altura de *10m (estado inicial)*.
a) calcule a velocidade com que essa partícula atinge o solo (*estado final*).
b) se ao invés de solta, a partícula for jogada para baixo já com velocidade inicial de *5m/s (estado inicial)*, calcule novamente a velocidade com que essa partícula chega ao solo (*estado final*).




Solução:

a) Vamos usar a equação (1.34): $g(y_f - y_i) + \frac{1}{2}(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2) = 0.$

Dados:

$$(inicial)\begin{cases} y_i = 10m \text{ (altura inicial),} \\ \upsilon_i = 0m/s \text{ (velocidade inicial),} \end{cases} \qquad (final)\begin{cases} y_f = 0m \text{ (altura final, no chão),} \\ \upsilon_f = ? \text{ (velocidade final, na queda),} \end{cases}$$

$$isolando \quad \upsilon_f: \quad \upsilon_f = \sqrt{-2 \cdot g \cdot \Delta y + \upsilon_i^2} \qquad \Delta y = y_f - y_i = 0 - 10m = -10m,$$

$$\upsilon_f = \sqrt{-2 \cdot g \cdot \Delta y + \upsilon_i^2},$$

$$\upsilon_f = \sqrt{-2 \cdot 10m/s^2 \cdot (-10m) + 0^2} = \boxed{14{,}1m/s}.$$

b)

$$\upsilon_i = 5m/s \text{ (velocidade inicial),}$$

$$\upsilon_f = \sqrt{-2 \cdot 10m/s^2 \cdot (-10m) + (5m/s)^2} = \boxed{15m/s}.$$

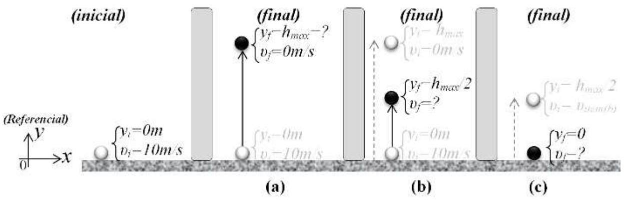
**E.2)** Uma partícula é jogada verticalmente, a partir da superfície, com velocidade inicial de $\upsilon_i$=*10m/s*(*estado inicial*).
a) Calcule a altura máxima atingida por essa partícula (*estado final*).
b) Calcule a velocidade da partícula quando essa se localiza na metade da altura máxima (*estado final*).
c) Calcule a velocidade com que essa partícula atinge o solo (*estado final*).

*Solução*

a) *Na altura máxima, a velocidade da partícula vale zero, portanto, a altura máxima pode ser calculada pela equação:*

$$g(y_f - y_i) + \frac{1}{2}(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2) = 0.$$

*Dados*:




$$(inicial)\begin{cases} y_i = 0m \text{ (posição inicial a partir da superfície),} \\ \upsilon_i = 10m/s \text{(velocidade inicial),} \end{cases} \quad (final)\begin{cases} y_f = ? \text{ (altura máxima a partir da superfície),} \\ \upsilon_f = 0 \text{ (velocidade final na altura máxima),} \end{cases}$$

*isolando* $y_f$: $y_f = \dfrac{-1}{2g}\cdot(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2) + y_i$

$$y_f = \frac{-1}{2\cdot 10m/s^2}\cdot(0^2 - (10m/s)^2) + 0m = \boxed{5m}.$$

b) calcular a velocidade na metade da altura máxima $y_f = 5m/2 = 2,5m$. Usar $v_f$ isolada na questão E.1:

$$\Delta y = y_f - y_i = 2,5m - 0m = 2,5m,$$

$$\upsilon_f = \sqrt{-2\cdot g\cdot \Delta y + \upsilon_i^2},$$

$$\upsilon_f = \sqrt{-2\cdot 10m/s^2\cdot(2,5m) + (10m/s)^2} = \boxed{7,07m/s}.$$

c) a partícula deve retornar com velocidade igual a de lançamento (*10m/s*), pela conservação da energia.

Faça a você mesmo a conta, considerando $y_i = 2,5m$, $y_f = 0m$, $\upsilon_i = 7,07m/s$ e calcule $\upsilon_f$.

**2º Caso: Apenas a Força Elástica $F_e$ realiza trabalho:** $W_{total} = W_{F_e}$. $W_{total} = W_e$ e $W_e = -\Delta U_e$, portanto $W_{total} = -\Delta U_e \Rightarrow \Delta U_e + W_{total} = 0 \Rightarrow \Delta U_e + \Delta K = 0$. Aplicando o teorema, e sabendo que $U_e = \frac{1}{2}k\cdot z^2$ e a energia cinética é $K = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2$, temos que

$$\boxed{\underbrace{\left(\frac{1}{2}k\cdot z_f^2 - \frac{1}{2}k\cdot z_i^2\right)}_{\Delta U_e} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_f^2 - \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_i^2\right)}_{\Delta K} = 0},$$

$$\text{ou} \tag{1.35}$$

$$\boxed{k\cdot\left(z_f^2 - z_i^2\right) + m\left(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2\right) = 0.}$$

Você também pode escrever a equação (1.35) como: $\frac{1}{2}k\cdot z_i^2 + \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_i^2 = \frac{1}{2}k\cdot z_f^2 + \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_f^2$, que é exatamente a aplicação da conservação da energia mecânica $E_{m(i)} = E_{m(f)}$, onde $E_m = U_e + K = \frac{1}{2}k\cdot z^2 + \frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2$.

*Exemplos*

**E.1)** Um bloco de massa *m=1kg*, anexado a uma mola presa na horizontal de constante elástica *k=1000N/m*, é puxado em *10 cm* em relação à posição de equilíbrio da mola. O bloco é, então, liberado. Calcule:

a) A velocidade com que o bloco passa pela posição de equilíbrio da mola.
b) A velocidade máxima atingida pelo bloco.
c) A velocidade do bloco quando este passa pela posição $x=\pm 5cm$.
*Solução*
*a) Usar a equação* (1.35): $k\cdot\left(z_f^2-z_i^2\right)+m\left(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2\right)=0$ e isolar o $\upsilon_f$.
*Dados:*

$$(inicial)\begin{cases} z_i = 0{,}1m \text{ (distensão máxima)}, \\ \upsilon_i = 0 \text{ (na distensão ou compressão máxima)}, \end{cases} \qquad (final)\begin{cases} z_f = 0m \text{ (posição de equilíbrio)}, \\ \upsilon_f = ? \text{ (incógnita a determinar)}, \end{cases}$$

$$\upsilon_f^2=\frac{-k\cdot\left(z_f^2-z_i^2\right)}{m}+\upsilon_i^2 \quad\Rightarrow\quad \upsilon_f=\sqrt{\frac{-k\cdot\left(z_f^2-z_i^2\right)}{m}+\upsilon_i^2} \quad\Rightarrow\quad \upsilon_f=\sqrt{\frac{-1000N/m\cdot\left(0^2-(0.1m)^2\right)}{1kg}+0^2}=\boxed{3{,}16m/s}.$$

*b)* a velocidade máxima ocorre na posição de equilíbrio, calculada no item a.
*c)* velocidade no ponto $z=\pm 5cm$. Escolher a posição inicial $z_i=0{,}1m$, $v_i=0m/s$, $z_f=0{,}05m$ e $v_f=calcular$:

$$\upsilon_f=\sqrt{\frac{-k\cdot\left(z_f^2-z_i^2\right)}{m}+\upsilon_i^2} \quad\Rightarrow\quad \upsilon_f=\sqrt{\frac{-1000N/m\cdot\left((0{,}05m)^2-(0{,}1m)^2\right)}{1kg}+0^2}=\boxed{2{,}74m/s}.$$

**E.2)** Uma mola, disposta na horizontal, de constante elástica $k=2000N/m$ está presa na parede pela sua extremidade esquerda e um bloco de massa $m$ está preso na extremidade direita da mola.

*a)* Para uma compressão da mola de $z=-0{,}2m$ a velocidade do bloco é zero. Quando a mola está na posição de equilíbrio, a velocidade do bloco é $5m/s$. Calcule a massa do bloco anexado à mola e a sua velocidade máxima.
*b)* Calcule a compressão ou distensão $z$, quando a velocidade do bloco é $4m/s$.
solução:
*a)* o bloco atinge velocidade zero na compressão ou distensão máxima da mola, portanto $\upsilon=5m/s$. Usar (1.35) $k\cdot\left(z_f^2-z_i^2\right)+m\left(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2\right)=0$.
Dados:

$$(inicial)\begin{cases} z_i = -0{,}2m \text{ (compressão máxima)}, \\ \upsilon_i = 0 \text{ (velocidade na compressão máxima)}, \end{cases} \qquad (final)\begin{cases} z_f = 0m \text{ (posição de equilíbrio)}, \\ \upsilon_f = 5m/s \text{ (velocidade máxima)}, \end{cases}$$

*m=? (incógnita a determinar)*

Isolar m: $m=\dfrac{-k\cdot\left(z_f^2-z_i^2\right)}{\left(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2\right)}$,

$$m=\frac{-2000N/m\cdot\left(0^2-(0{,}2m)^2\right)}{\left((5m/s)^2-0^2\right)}=\boxed{3{,}2kg}.$$ Cuidado para não obter uma massa negativa.

*b)* Escolher a posição inicial $z_i=0.2m$*(distensão máxima)*, $\upsilon_i=0m/s$, $z_f=calcular$ e $\upsilon_f=4m/s$. Usar equação (1.35)

$k\cdot\left(z_f^2-z_i^2\right)+m\left(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2\right)=0$. Isolar $z_f$ :

$$z_f^2=\frac{-m\left(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2\right)}{k}+z_i^2,$$

$$z_f=\pm\sqrt{\frac{-m\left(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2\right)}{k}+z_i^2} \quad\Rightarrow\quad z_f=\pm\sqrt{\frac{-3{,}2kg\left((4m/s)^2-0^2\right)}{2000N/m}+(0{,}2m)^2}=\boxed{\pm 0{,}12m}.$$

**E.3)** Um bloco de massa $m=5kg$ se move sobre uma superfície horizontal sem atrito, com velocidade $\upsilon_o=10m/s$, em rota de colisão com uma mola de constante elástica $k=2000N/m$. Escreva a velocidade do bloco em função de $z$, $m$, $k$ e $\upsilon_o$ e calcule a compressão máxima $z_m$ da mola.

Solução: Vamos aproveitar as contas do Exemplo (**E.1**)

$$\upsilon(z)=\sqrt{\frac{-k\cdot z^2}{m}+\upsilon_o^2} \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\upsilon(z_m)=0}_{\text{Na compressão máxima}} \quad\Rightarrow\quad \frac{-k\cdot z_m^2}{m}+\upsilon_o^2=0 \quad\Rightarrow\quad z_m=\upsilon_o\sqrt{\frac{m}{k}}$$ (compressão máxima). Substituir os valores numéricos: $z_m=10m/s\sqrt{\frac{5kg}{2000N/m}}=\boxed{0,5m}$. Se a velocidade inicial do bloco é $\upsilon_o=5m/s$ então, $z_m=5m/s\sqrt{\frac{5kg}{2000N/m}}=\boxed{0,25m}$.

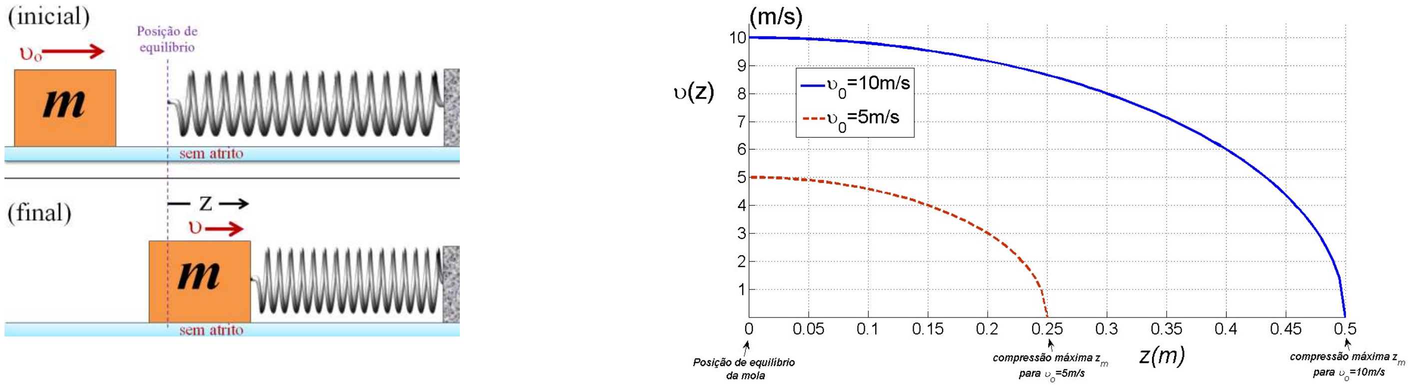



Figura 38 - Na figura à esquerda, tem-se a o bloco *m* em rota de colisão com a mola. Na figura à direita, o gráfico da velocidade do bloco $\upsilon$ em função da compressão *z* da mola, para velocidade inicial de colisão $\upsilon_o=10m/s$ e $5m/s$.

**3º Caso: Apenas a Força Aplicada Fi realiza trabalho**: $W_{total}=W_{F_1}$ . Neste caso, como não conhecemos se existe um potencial associado a força Aplicada, então o Trabalho realizado pela força aplicada é calculado usando a equação (1.23), ou seja, $W_{F_1}=F_1\cdot\Delta X_1\cdot\cos(\theta_1)$ , e aplicando o teorema, temos

$$W_{F_1}=\Delta K \quad\Rightarrow\quad F_1\cdot\Delta X_1\cdot\cos(\theta_1)=\Delta K \quad\Rightarrow\quad F_1\cdot\Delta X_1\cdot\cos(\theta_1)=\left(\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_f^2-\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_i^2\right). \tag{1.36}$$

Se houver várias forças aplicadas atuando sobre *m*, então devemos somar todos os trabalhos realizados por todas as forças aplicadas. Para *n* forças aplicadas atuando em *m*, então

$$\sum_{j=1}^{n}F_j\cdot\Delta X_j\cdot\cos(\theta_j)=\left(\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_f^2-\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_i^2\right), \tag{1.37}$$

o símbolo Σ representa o somatório, o sub índice *j* representa o contador de *1* até *n* (número de forças externas que realizam trabalho).

*Exemplos*

**E.1)** Um bloco de massa *10kg* se move com velocidade constante de *10m/s*. Subitamente uma força aplicada de $F_1=30N$ passou atuar na mesma direção e sentido do deslocamento do bloco por uma distância de 50m.
a) Qual o trabalho realizado pela força aplicada sobre o bloco?
b) Calcule a velocidade final do bloco.
Solução:
*a)*

$$W_F=F_1\cdot\Delta X_1\cdot\cos(0^o)=30N\cdot 50m=\boxed{1500J}$$

*b) calcular* $\upsilon_f$ *a partir de* $W_F=\frac{1}{2}m\cdot(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2)$. Isolar $\upsilon_f$ :

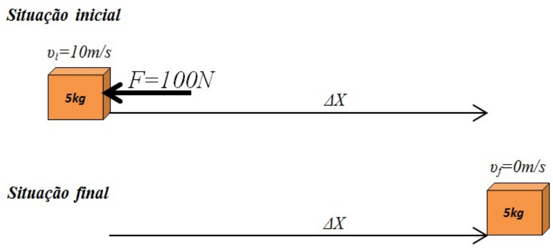
$$\frac{2\cdot W_F}{m}=(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2)\Rightarrow\upsilon_f^2=\frac{2\cdot W_F}{m}+\upsilon_i^2 \quad\Rightarrow\quad \upsilon_f=\sqrt{\frac{2\cdot W_F}{m}+\upsilon_i^2} \quad\Rightarrow\quad \upsilon_f=\sqrt{\frac{2\cdot 1500J}{10kg}+(10m/s)^2}=\boxed{20m/s}.$$

**E.2)** Um bloco de massa *5kg* se move com velocidade *10m/s*. Subitamente uma força aplicada de $F_1=100N$ passou atuar na mesma direção e sentido oposto ao deslocamento do bloco.

a) Calcule a distância necessária que a força aplicada dever atuar para colocar o bloco em repouso.

b) Calcule o trabalho realizado pela força aplicada sobre o bloco até o seu repouso.

Solução:




$$a)\ F_1\cdot\Delta X_1\cdot\underbrace{\cos(180^o)}_{-1}=\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_f^2-\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_i^2\ ,$$

$$\Delta X_1=\frac{\frac{1}{2}m\cdot(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2)}{-F_1}\ \Rightarrow\ \Delta X_1=\frac{\frac{1}{2}5kg\cdot(0^2-(10m/s)^2)}{-100N}=\boxed{2,5m}$$

$$\text{b)}\ W_F=F_1\cdot\Delta X_1\cdot\underbrace{\cos(180^o)}_{-1}=100N\cdot 2,5m(-1)=\boxed{-250J}$$

*O sinal negativo indica que a força F removeu energia da partícula. Essa quantidade de energia removida veio da energia cinética da partícula, por isso esta diminuiu sua velocidade (na verdade, entrou em repouso).*

**4º Caso: A Força Peso e Força Elástica realizam trabalho:** $W_{total}=W_g+W_e$. Podemos escrever $W_g=-\Delta U_g$ e $W_e=-\Delta U_e$, portanto $W_{total}=-\Delta U_g-\Delta U_e$. Aplicando o teorema: $W_{total}=\Delta K$ $\Rightarrow -\Delta U_g-\Delta U_e=\Delta K$ ou $\boxed{\Delta U_g+\Delta U_e+\Delta K=0}$. Como $U_g=m\cdot g\cdot y$, $U_e=\frac{1}{2}k\cdot z^2$ e $K=\frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2$, temos que

$$\boxed{\begin{gathered}\underbrace{\left(m\cdot g\cdot y_f-m\cdot g\cdot y_i\right)}_{\Delta U_g}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}k\cdot z_f^2-\frac{1}{2}k\cdot z_i^2\right)}_{\Delta U_e}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_f^2-\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_i^2\right)}_{\Delta K}=0\\ \text{ou}\\ m\cdot g\underbrace{\left(y_f-y_i\right)}_{\Delta y}+\frac{1}{2}k\cdot\left(z_f^2-z_i^2\right)+\frac{1}{2}m\cdot\left(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2\right)=0.\end{gathered}}\tag{1.38}$$

A expressão pode até parecer longa, mas veja que estamos apenas aplicando o teorema $W_{total}=\Delta K$, isso é tudo que você precisa lembrar. Novamente, podemos escrever $\Delta U_g+\Delta U_e+\Delta K=0$ como $\Delta(U_g+U_e+K)=0$, chamamos a soma desses três termos de energia mecânica $E_m=U_g+U_e+K=m\cdot g\cdot y+\frac{1}{2}k\cdot z^2+\frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2$. E esta é sempre constante, pois $\Delta E_m=0$, ou seja, $E_{m(i)}=E_{m(f)}$

$$\underbrace{m\cdot g\cdot y_i+\frac{1}{2}k\cdot z_i^2+\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_i^2}_{\text{Energia Mecânica Inicial}}=\underbrace{m\cdot g\cdot y_f+\frac{1}{2}k\cdot z_f^2+\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_f^2}_{\text{Energia Mecânica Final}},\tag{1.39}$$

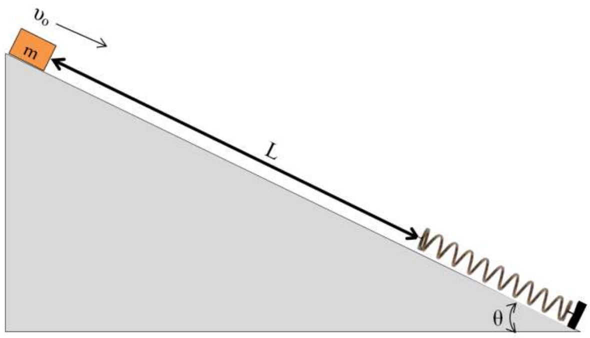
que é exatamente a equação (1.38) escrita em termos de variação do estado *inicial* e *final*.

*Exemplos*

**E.1)** Um bloco de massa $m=1kg$ é solto do alto de um plano inclinado de $\theta=40^o$, sem atrito, já com velocidade $\upsilon_0=4m/s$. Abaixo do plano inclinado existe uma mola de constante elástica $k=1000N/m$.

a) Calcule com que velocidade o bloco chega na iminência de colidir com a mola, sabendo que o deslocamento, ao longo da superfície do plano, da posição inicial até a mola é $L=5m$.

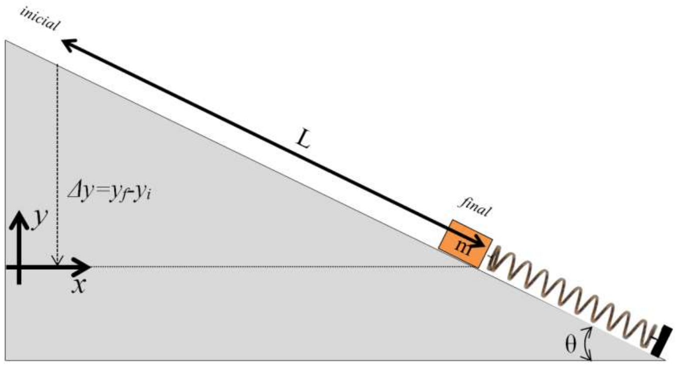
b) Calcule a compressão máxima da mola devido à colisão do bloco.




*Solução:*

*a) Vamos aplicar a equação (1.38) para calcular a velocidade final (na iminência de colisão com a mola). Veja que neste caso, por enquanto, não existe trabalho realizado pela mola, então temos que* $\Delta U_e = 0$ *(ver figura ao lado)*

$$\underbrace{m \cdot g \cdot (y_f - y_i)}_{\Delta U_g} + \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot (\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2)}_{\Delta K} = 0$$




Dados:

$$(inicial)\begin{cases} y_i = L \cdot sen(\theta) & \text{(ver referencial na figura)} \\ \upsilon_i = 4m/s & \text{(velocidade inicial do bloco),} \end{cases} \qquad (final)\begin{cases} y_f = 0 & \text{(ver referencial na figura)} \\ \upsilon_f = \upsilon_f & \text{(incógnita).} \end{cases}$$

$$\cancel{m} \cdot g \cdot \left(y_f - y_i\right) + \frac{1}{2}\cancel{m}\left(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2\right) = 0, \quad \text{isolar } \upsilon_f : \text{"neste caso, a velocidade não depende da massa } m\text{"}$$

$$\upsilon_f^2 = -2 \cdot g \cdot \left(y_f - y_i\right) + \upsilon_i^2$$

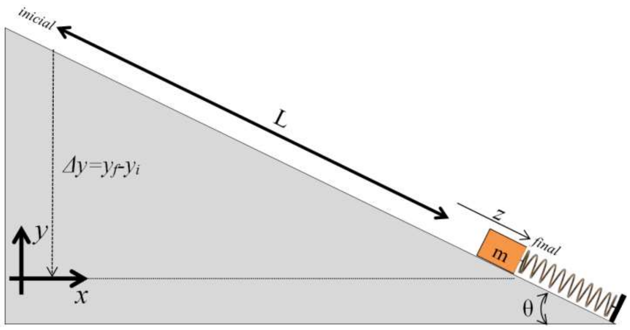
$\Delta y = y_f - y_i = -L \cdot \text{sen}(\theta)$ deslocamento vertical entre o ponto inicial e final.

$$\upsilon_f = \sqrt{-2 \cdot g \cdot \left(-L \cdot \text{sen}(\theta)\right) + \upsilon_i^2}$$

$$\upsilon_f = \sqrt{-2 \cdot 10m/s^2 \cdot \left(-5m \cdot \text{sen}(40^\circ)\right) + \left(4m/s\right)^2} = \boxed{8{,}96m/s}$$

*b) Na compressão máxima z da mola, a velocidade do bloco é zero. Vamos aplicar, novamente, a equação (1.38)*

$$m \cdot g\left(y_f - y_i\right) + \frac{1}{2}k \cdot \left(z_f^2 - z_i^2\right) + \frac{1}{2}m \cdot \left(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2\right) = 0$$




Dados:

$$(inicial)\begin{cases} y_i = (L+z)sen(\theta) \\ z_i = 0m & \text{(mola relaxada),} \\ \upsilon_i = 4m/s & \text{(velocidade inicial do bloco),} \end{cases} \qquad (final)\begin{cases} y_f = 0 \\ z_f = z & \text{(compressão máxima, nossa incógnita),} \\ \upsilon_f = 0m/s & \text{(na compressão máxima).} \end{cases}$$

$\Delta y = y_f - y_i = -(L+z)sen(\theta)$ (ver figura)

$$1kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\left[-(5m+z)sen(40^o)\right]+\frac{1}{2}1000\frac{N}{m}\cdot z^2+\frac{1}{2}1kg\cdot\left(-\left(4m/s\right)^2\right)=0,$$

$$-32{,}14-6{,}43\cdot z+500\cdot z^2-8=0,$$

$\underline{500\cdot z^2-6{,}43\cdot z-40{,}14=0}$ resolvendo esta equação do 2ºgrau: $\boxed{z=0.29m}$. A raiz negativa não serve.

Observação: você também pode usar como posição inicial a posição final do item (a):

$$1kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\left[-z\cdot sen(40^o)\right]+\frac{1}{2}1000\frac{N}{m}\cdot z^2+\frac{1}{2}1kg\cdot\left(-\left(8.96m/s\right)^2\right)=0,$$

$500\cdot z^2-6{,}43\cdot z-40{,}14=0$ (mesma equação anterior).

**5º Caso: A Força de Atrito, a força Peso, a força Elástica realizam trabalho:** ($W_{total}=W_{fat}+W_g+W_e$). O trabalho realizado pela força de atrito é: $W_{fat}=-f_{at}\cdot\Delta X$, a força de atrito atua sempre na mesma direção do deslocamento *ΔX* e sentido oposto, por isso o sinal negativo. O trabalho total será $W_{total}=W_{fat}-\Delta U_g-\Delta U_e$. Agora aplicando o teorema $W_{total}=\Delta K \;\Rightarrow\; W_{fat}-\Delta U_g-\Delta U_e=\Delta K \;\Rightarrow\; W_{fat}=\Delta U_g+\Delta U_e+\Delta K$, temos

$$W_{fat}=\underbrace{\left(m\cdot g\cdot y_f-m\cdot g\cdot y_i\right)}_{\Delta U_g}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}k\cdot z_f^2-\frac{1}{2}k\cdot z_i^2\right)}_{\Delta U_e}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_f^2-\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_i^2\right)}_{\Delta K}$$

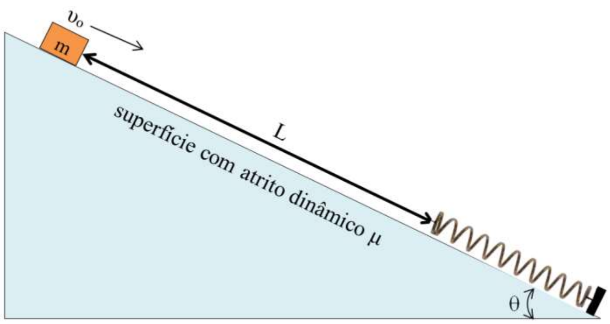
ou (1.40)

$$-f_{at}\cdot\Delta X=m\cdot g\left(\underbrace{y_f-y_i}_{\Delta y}\right)+\frac{1}{2}k\cdot\left(z_f^2-z_i^2\right)+\frac{1}{2}m\cdot\left(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2\right).$$

Lembrar que $f_{at}=\mu_d\cdot\mathbb{N}$ (ver equação (1.17)), *ΔX* é o deslocamento (horizontal, vertical ou inclinado) sofrido por *m* durante a atuação da força de atrito, *y* é sempre uma altura vertical (com o referencial positivo para cima), *z* é associado à compressão ou distensão da mola em relação ao sua posição de equilíbrio e υ é a velocidade da partícula *m*. A força de atrito dissipa a energia mecânica do sistema $W_{fat}=\Delta(U_g+U_e+K)<0$. Essa energia mecânica dissipada pode aparecer na forma de calor sobre a superfície, por isso ela esquenta. Parte dessa energia dissipada também pode aparecer como forma de energia sonora, atrite um objeto contra outro e você ouvirá ruídos, e assim por diante.

*Exemplo*

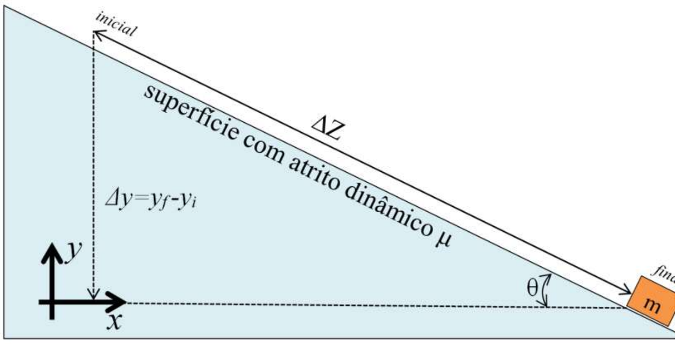
**E.1)** Um bloco de massa *m=1kg* é solto do alto de um plano inclinado de *θ=20º*, com coeficiente de atrito dinâmico dado por *μ=0.4* e a uma velocidade inicial de *υ0=3m/s*. Abaixo do plano inclinado existe uma mola de constante elástica *k=1000N/m*.
a) Verifique se o bloco irá atingir a mola, dado que sua distância até a mola é *L=4m*(ver figura ao lado).
b) Caso o bloco atinja a mola, calcule a compressão máxima sofrida por essa mola.




*Solução:*

*a) Para saber se o bloco irá atingir a mola, você pode calcular a distância total que o bloco irá percorrer até parar, caso a mola não exista. Se essa distância for maior que L=4m, então o bloco irá atingir a mola. Caso contrário, o bloco não irá chega até a mola. Ou você também pode verificar se o bloco chega até o inicio da mola com velocidade diferente de zero.*

*Vamos calcular a distância total ΔZ, ao longo da superfície do plano inclinado, que o bloco percorreria, caso não existisse a mola. Neste caso, temos que* $\Delta U_e = 0$ *(vamos assumir que a mola não existe) e vamos aplicar a equação (1.40):*




$$-f_{at}\cdot\Delta Z = m\cdot g\left(y_f - y_i\right)+\frac{1}{2}m\cdot\left(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2\right)$$

*Dados* :

$$(inicial)\begin{cases} y_i = \Delta Z\cdot sen(\theta) & \text{(ver referencial na figura ao lado)} \\ \upsilon_i = 3m/s, & \text{(velocidade inicial do bloco)}\end{cases}$$

$$(final)\begin{cases} y_f = 0 & \text{(ver referencial na figura ao lado)} \\ \upsilon_f = 0 & \text{(bloco em repouso),}\end{cases}$$

$\Delta y = y_f - y_i = -\Delta Z\cdot sen(\theta)$ deslocamento vertical,

$f_{at} = \mu\cdot\mathbb{N}$, calcular $\mathbb{N}$.

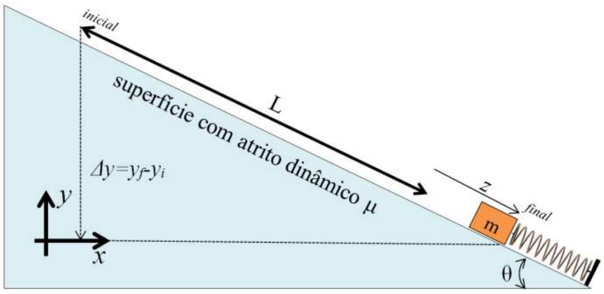
$\mathbb{N} = m\cdot g\cdot\cos(\theta)$ faça o D.C.L. e aplique a 2ª lei de Newton na direção perpendicular à superfície do plano inclinado

$$-\mu\cdot\cancel{m}\cdot g\cdot\cos(\theta)\cdot\Delta Z = \cancel{m}\cdot g\left(-\Delta Z\cdot sen(\theta)\right)+\frac{1}{2}\cancel{m}\cdot\left(-\upsilon_i^2\right)\Rightarrow \text{ isolar } \Delta Z:$$

$$\Delta Z = \frac{\upsilon_i^2}{2\cdot g\left(\mu\cdot\cos(\theta)-sen(\theta)\right)},$$

$$\Delta Z = \frac{\left(3m/s\right)^2}{2\cdot 10m/s^2\left(0,4\cdot\cos(20^o)-sen(20^o)\right)} = \boxed{13,29m} > L = 4m \text{(o bloco irá atingir a mola).}$$

*b) calcular a compressão máxima z da mola:*




$$-f_{at}\cdot(L+z) = m\cdot g\left(\underbrace{y_f - y_i}_{\Delta y}\right)+\frac{1}{2}k\cdot\left(z_f^2-z_i^2\right)+\frac{1}{2}m\cdot\left(\upsilon_f^2-\upsilon_i^2\right)$$

Dados:

$$(inicial)\begin{cases} y_i = (L+z)\cdot sen(\theta) & \text{(ver ref. na figura)} \\ z_i = 0 & \text{(mola relaxada),} \\ \upsilon_i = 3m/s & \text{(velocidade inicial do bloco),}\end{cases}$$

$$(final)\begin{cases} y_f = 0 & \text{(ver referencial na figura)} \\ z_f = z & \text{(compressão máxima),} \\ \upsilon_f = 0 & \text{(na compressão máxima).}\end{cases}$$

$\Delta y = y_f - y_i = -(L+z)\cdot sen(\theta)$ Deslocamento na vertical,

$f_{at} = \mu\cdot\mathbb{N}$ (força de atrito dinâmico ao longo do deslocamento),

$\mathbb{N} = m\cdot g\cdot\cos(\theta)$ análogo ao item (a).

$$-\mu\cdot m\cdot g\cdot\cos(\theta)\cdot(L+z) = m\cdot g\left(-(L+z)\cdot sen(\theta)\right)+\frac{1}{2}k\cdot\left(z^2-0\right)+\frac{1}{2}m\cdot\left(0-\upsilon_i^2\right)\Rightarrow$$

$$-0.4\cdot 1kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\cos(20^o)\cdot(4m+z) = 1kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\left(-(4m+z)\cdot sen(20^o)\right)+\frac{1}{2}1000\frac{N}{m}\cdot\left(z^2-0\right)+\frac{1}{2}1kg\cdot\left(0-\left(3m/s\right)^2\right)\Rightarrow \text{isolar z}:$$

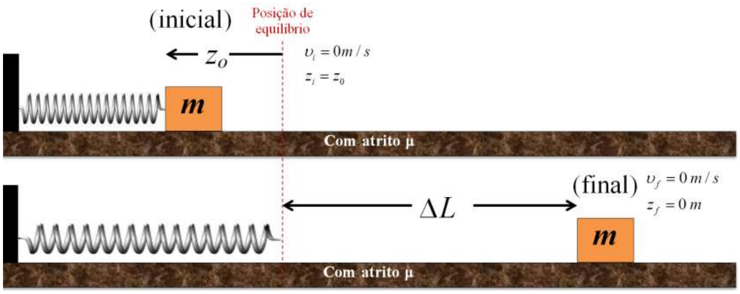
$500\cdot z^2 + 0,34\cdot z - 3,14 = 0$ (resolver esta equação do 2º grau) $\Rightarrow \boxed{z\cong 0,08m = 8cm}$.

*Veja que se não existisse a mola, o bloco iria descer 13,29m ao longo da superfície do plano inclinado. Mas, como a mola realiza um trabalho também oposto ao deslocamento, o bloco irá descer apenas (L+z=4m+0,08m)=4,08m.*

**6º Caso: Existem dezenas de possíveis combinações.** O mais importante é saber identificar corretamente as forças externas que realizam trabalho sobre $m$ e aplicar o teorema (1.33).

## Como medir experimentalmente o coeficiente de atrito dinâmico μ

Podemos medir o coeficiente de atrito dinâmico μ entre um bloco ***m*** e uma superfície, colocando esse bloco ao lado de uma mola, de constante elástica $k$, que se encontra na horizontal e comprimida inicialmente de $z_o$. Liberamos a mola da compressão e medimos com uma trena a distância máxima horizontal $\Delta L$, em relação à posição de equilíbrio da mola, que o bloco é lançado (veja figura ao lado). Neste problema, somente a força de atrito e a força elástica realizam trabalho. Vamos aplicar o teorema $W_{TOTAL} = \Delta K$ e calcular o coeficiente de atrito dinâmico μ.




$$W_{fat} + \underbrace{W_e}_{-\Delta U_e} = \Delta K \quad \Rightarrow \quad W_{fat} = \Delta K + \Delta U_e \quad \Rightarrow W_{fat} = \frac{1}{2}m\cdot\left(\underbrace{\upsilon_f^2}_{=0} - \underbrace{\upsilon_i^2}_{=0}\right) + \frac{1}{2}k\cdot\left(\underbrace{z_f^2}_{=0} - \underbrace{z_i^2}_{z_o}\right).$$

$f_{at} = \mu\cdot\mathbb{N}$ e $W_{fat} = -f_{at}\cdot\Delta X$ (a força de atrito é sempre oposta ao deslocamento $\Delta X$).

$$-f_{at}\cdot\Delta X = \underbrace{(0-0)}_{\Delta K} + \left(0 - \frac{1}{2}k\cdot z_o^2\right). \quad \Rightarrow \quad \cancel{-}\mu\cdot\underbrace{m\cdot g}_{\mathbb{N}}\cdot(\underbrace{z_o + \Delta L}_{\text{deslocamento}=\Delta X}) = \cancel{-}\frac{1}{2}k\cdot z_o^2 \quad \overset{\text{isolar } \mu}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mu = \frac{\frac{1}{2}k\cdot z_o^2}{m\cdot g\cdot(z_o + \Delta L)}}.$$

Se a constante elástica da mola é $k=4000N/m$, $z_o=0.1m$, $m=2kg$ e $\Delta L=2.5m$, o coeficiente de atrito dinâmico vale:

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}k\cdot z_o^2}{m\cdot g\cdot(z_o+\Delta L)} = \frac{\frac{1}{2}4000N/m\cdot(0{,}1m)^2}{2kg\cdot 10m/s^2\cdot(0{,}1m + 2{,}5m)} = \boxed{0{,}38}.$$

## Exercícios

**1)** Um objeto de massa *10kg* se move com velocidade *10m/s*. Após um instante, a velocidade do objeto passou a ser *20m/s*.

a) Qual o trabalho realizado pela força constante sobre o objeto durante o seu movimento?

b) Considerando que a força resultante (***$F_R$=50N***) foi sempre constante e na mesma direção do deslocamento, calcule esse deslocamento do objeto entre a transição de velocidades de *10m/s* para *20m/s*. A força resultante atuou no mesmo sentido do deslocamento ou sentido contrário?

**2)**

a) Calcule a energia cinética de uma bola de massa *0,2kg* e velocidade de *10m/s*.

b) Dado que a energia cinética inicial de uma bola de massa *0,2kg* é de *40J*, qual o valor da velocidade inicial dessa bola?

**3)** A energia potencial gravitacional de uma bola de massa *0,5kg* é de *40J.*

a) A que altura essa bola se encontra?

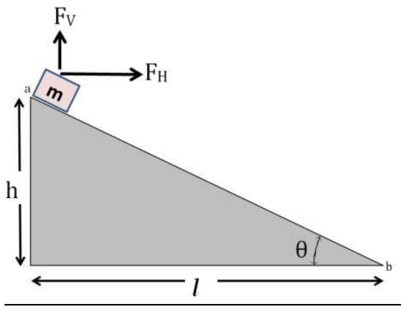
b) Se essa bola é solta a partir do repouso, estando na altura do item **a**, com que velocidade essa atinge o solo?

c) Calcule também o tempo de queda dessa bola do item **b**.

**4)**

a) Calcule os trabalhos realizados sobre o bloco de massa **m=15kg**, entre os pontos **a (topo)** e **b (chão),** ao longo da superfície do plano inclinado sem atrito, pelas forças: $P_g$ (peso), $\boldsymbol{F_V=50N}$, $\boldsymbol{F_H=60N}$ e $\boldsymbol{N}$ (normal), dado que a inclinação do plano inclinado é de $\theta=40^o$ e $h=8m$.

b) Se o bloco de massa **m** é liberado a partir do repouso no ponto **a** (topo), com que velocidade o bloco chega ao ponto **b**? (você pose usar $W_{TOTAL}=\Delta K$)

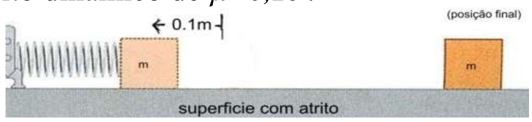



**5)** Uma mola quando comprimida de *0,02m* exerce uma força elástica de *100N*.

a) Qual é a energia potencial elástica armazenada na mola quando esta é comprimida de *0,1m?*

b) Qual o trabalho realizado e a variação da energia potencial elástica da mola durante uma compressão de *0,05m* até *0,1m*.

c) Um bloco de massa $m=2kg$ é colocado na extremidade direita da mola, quando esta se encontra comprimida de *0.1m* (ver figura abaixo). A que distância máxima na horizontal, em relação à posição de equilíbrio da mola, o bloco é lançado quando a mola é liberada da sua compressão, sabendo que a superfície de contato com o bloco possui um coeficiente de atrito dinâmico de $\mu=0,25$?




**6)** Uma espingarda, de mola comprimida, lança verticalmente uma esfera de chumbo de *10g*, atingindo uma altura máxima de *20m*.

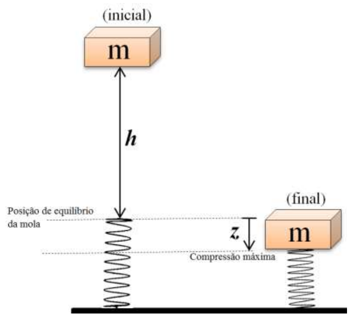
a) Qual a energia potencial elástica armazenada na mola quando esta se encontra comprimida?

b) Qual é a altura máxima atingida por uma esfera de chumbo, agora de massa *20g*, disparada pela mesma espingarda (mesma compressão da mola)?

**7)** A constante de uma mola de massa desprezível vale $k=2000N/m$.

a) Qual deve ser a distância de compressão dessa mola para que essa armazene uma energia potencial elástica de *50J*?

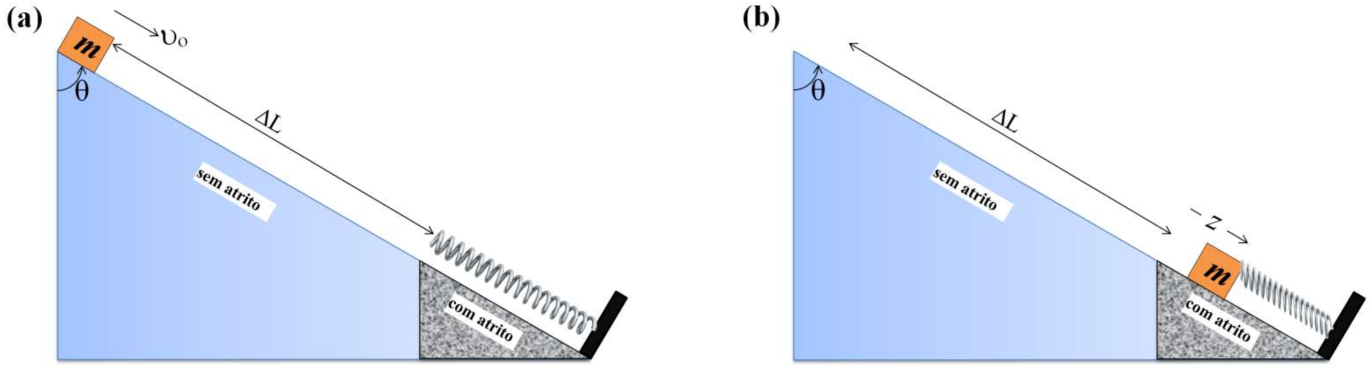
b) Essa mola é posta na vertical, com sua extremidade inferior anexada ao solo (ver figura ao lado). Você deixa cair sobre a mola, de uma altura de $h=2,0m$ a partir da extremidade superior da mola, um bloco de massa $m=5kg$. Calcule a compressão máxima *'z'* dessa mola. (Dica: *use a conservação da energia* $\Delta U_g + \Delta U_e + \Delta K = 0$ *e resolva a equação do segundo grau para z*).




**8)** Um bloco de massa $m=0,5kg$ é colocado sobre uma mola, de massa desprezível, de constante elástica $k=2000N/m$ que está comprimida de *5cm (posição inicial)*. Que altura máxima (quando $\upsilon_f=0$), a partir da posição inicial, o bloco será arremessado quando a mola for liberada? (o bloco não está preso à mola). Este problema é o inverso da questão ***7.b.***

**9)** Um bloco de massa $m=10kg$ encontra-se preso no topo de um plano inclinado $\theta=60^o$ (ver figura (a)). O bloco é liberado, a partir do repouso, descendo um trecho sem atrito de $\Delta L=5.0m$ ao longo da superfície do plano inclinado. Então, o bloco começa a percorrer um trecho com atrito ($\mu_d=0,2$) e também sob a ação de uma mola de constante elástica $k=1000N/m$. Calcule a compressão máxima $\underline{z}$ da mola devido ao bloco (ver figura (b)).

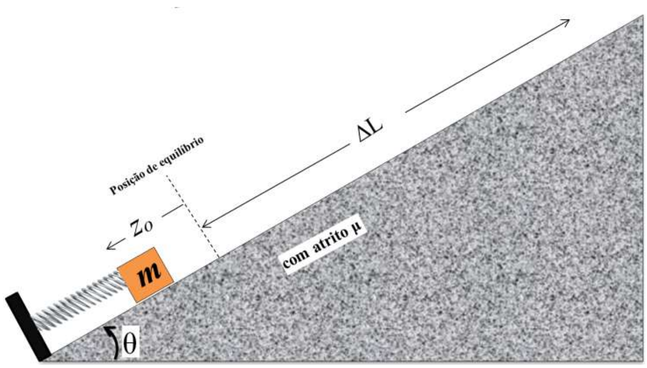
*Dica: Você pode usar a conservação da energia entre o ponto inicial e final ($W_{fat} = \Delta U_g + \Delta U_e + \Delta K$ ) e resolver a equação do segundo grau para z. Veja que: $\Delta K=0$; ($W_{fat} = -f_{at} \cdot z$ e $f_{at} = \mathbb{N} \cdot \mu_d$) ; $\Delta U_e = 1/2 \cdot k \cdot z^2$ e $\Delta U_g = -mg(\Delta L + z)\cos(\theta)$.*

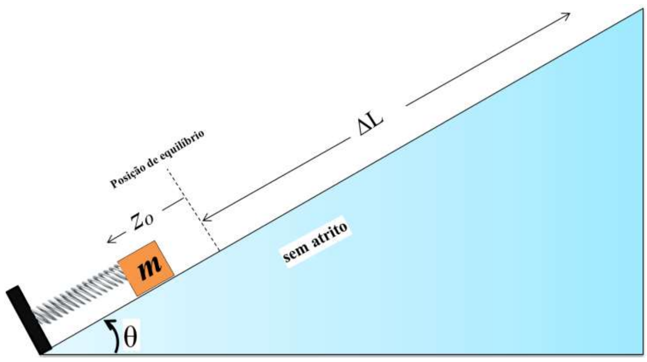



**10)** Uma mola de constante elástica *k=8000N/m* encontra-se comprimida de $z_o=0,1m$ e está localizada na base de um plano inclinado de $\theta=40^o$. Um bloco de massa *m=2kg* é colocado apoiado sobre essa mola (mas não preso). Calcule a distância máxima ΔL, em relação à posição de equilíbrio da mola, que o bloco é lançado quando a mola é liberada da sua compressão, para os casos:

a) Plano inclinado com atrito μ=0,25.

b) Plano inclinado sem atrito. (Dica: use o resultado do item (a) e faça μ=0).




**Respostas**:

1. a) 1500s; b) 30m
2. a) 10J; b) 20m/s
3. a) 8m; b) 12,7m/s; c) 1,27s
4. a) 1200J, -400J, 572J, 0J; b) 13.5m/s
5. a) 25J; b) -18,75J, 18,75J; c) 4,9m
6. a) 2,0 J; b) 10m
7. a) 0,22m; b) 0,34m
8. a) 0,5m
9. 0,74m
10. a) 2,3m; b) 3,0m

*Anotações:*

## Fluidos

fonte da imagem http://elbibliote.com/resources/destacados/notad327.html

O estudo da mecânica dos fluidos se divide em:

- Hidrostática - lida com fluido em repouso.
- Hidrodinâmica - trata com fluidos em movimento no regime estacionário (em que a velocidade não depende do tempo).

A seguir, vamos definir algumas grandezas importantes que iremos estudar ao longo do curso.

### Definições Gerais

♠Densidade volumétrica[3] ou massa específica (ρ) - É a razão entre a massa do corpo e o seu volume, ou seja,

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}} \quad \left(\frac{kg}{m^3}\right), \tag{2.1}$$

onde ***m*** é a massa em ($kg$) e ***V*** é o volume total do corpo em $m^3$. Com essa relação, é possível obter a massa $m$, quando se é conhecida a densidade volumétrica $\rho$ e o volume do corpo $V$,

$$\boxed{m = \rho \cdot V}. \quad (kg) \tag{2.2}$$

Com a massa ***m*** calculada, pode-se obter o peso, que é ***P=m·g***, ou

$$\boxed{P = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g}. \quad (N)$$

As expressões (2.1) e (2.2) são válidas apenas quando a densidade $\rho$ é constante ao longo do volume, ou seja, quando o corpo é homogêneo. Quando a densidade varia ao longo do volume, deve-se usar o cálculo integral, que não será abordado neste curso ( $\rho = \frac{dm}{dV}$; $m = \int \rho \cdot dV$ ).

[3] Alguns livros definem densidade de um corpo como sendo a massa específica do corpo dividida pela massa específica da água.

Exemplos:

**E.1)** A densidade volumétrica da água é $\rho=1000kg/m^3$, calcule a massa de um volume de *200ml* de água ($0{,}2L=0{,}2\cdot10^{-3}m^3$, pois $1000L=1m^3$).


*Solução*: Como a massa é dada por $m=\rho\cdot V$. Substituindo os valores numéricos temos:

$$m=\left(1000\frac{kg}{\cancel{m^3}}\right)\cdot\left(0,2\cdot10^{-3}\cancel{m^3}\right)=0,2kg\,.$$

**E.2)** Calcule o volume do recipiente necessário para caber *1kg* de mercúrio líquido de densidade $\rho_{Hg}=13600kg/m^3$.

Solução: A partir da relação (2.2), o volume isolado fica: $V=\dfrac{m}{\rho}$, substituindo os valores numéricos,

$$V=\frac{1\cancel{kg}}{13600\cancel{kg}\,/\,m^3}=7,35\cdot10^{-5}m^3(=7,35\cdot10^{-2}\cdot\underbrace{10^{-3}m^3}_{1litro}=7,35\cdot10^{-2}l=73,5ml).$$

Por completeza, vamos definir a seguir, densidade superficial e linear de massa.

♠Densidade superficial (σ) - É a razão entre a massa do corpo e a sua área, ou seja,

$$\boxed{\sigma=\frac{m}{A}}\quad\left(\frac{kg}{m^2}\right),\tag{2.3}$$

tal que ***m*** é massa em ($kg$) e ***A*** é a área total do corpo (em $m^2$). Com essa relação, a massa pode ser calculada por $\boxed{m=\sigma\cdot A}$ $(kg)$. E o peso $\boxed{P=m\cdot g=\sigma\cdot A\cdot g}$ $(N)$.

Ilustração: para um corpo homogêneo (quando a densidade é constante) é análogo a distribuir toda a massa ***m*** uniformemente ao longo de toda sua área ***A****,* como mostrado na Figura 39.(a) e (b).

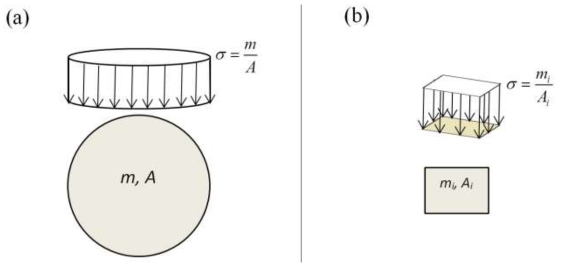
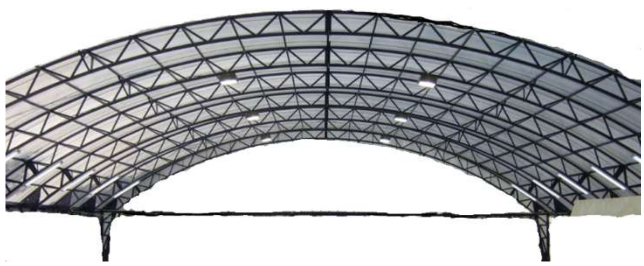



**Figura 39** – Ilustração da densidade superficial de massa em uma área circular, fig.(a) e retangular, fig.(b). O valor de σ representa a massa ***m*** distribuída ao longo da área ***A***.

Exemplo:

**E.1)** Um telhado de área total de $250m^2$(ver figura ao lado) deve ser recoberto por uma lona. Sabe-se que $1m^2$ dessa lona possui massa de 1.75kg. Calcule o peso da lona sobre a estrutura do telhado.



*Solução: O peso é dado por:*

Peso total: $P=m\cdot g=\sigma\cdot A\cdot g$.

Calcular $\sigma=\dfrac{m}{A}\Rightarrow\sigma=\dfrac{1,75kg}{1m^2}=1,75kg/m^2$ (constante),

$$P=m\cdot g=\sigma\cdot A\cdot g=1,75kg/m^2\cdot250m^2\cdot10m/s^2=\boxed{4375N}$$

♠Densidade linear (μ) - é a razão entre a massa do corpo e o seu comprimento, ou seja,

$$\boxed{\mu = \frac{m}{L}} \quad \left(\frac{kg}{m}\right),$$

o seu significado é a massa distribuída ao longo do comprimento, Figura 40.(a) e (b). A sua utilidade é que podemos calcular a massa $\boxed{m = \mu \cdot L}$ $(kg)$, a partir de um comprimento ***L*** qualquer do corpo, quando se conhece $\mu$. Com a massa calculada, o peso é obtido por $\boxed{P = m \cdot g = \mu \cdot L \cdot g}$ $(N)$. Quando é de interesse calcular, tendo $\mu$, o comprimento total do objeto, então $L_{total} = \dfrac{m_{total}}{\mu}$.

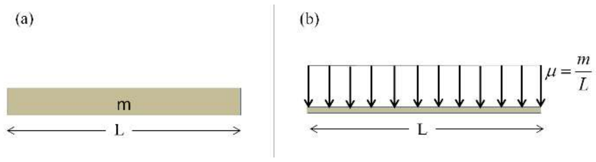



Figura 40 – Na figura (a), temos um corpo de massa total *m* e comprimento *L*. Em (b), massa do corpo *m* está distribuída uniformemente ao longo de todo o seu comprimento *L*. A essa distribuição, damos o nome de densidade linear de massa $\mu$.

Exemplo:
**E.1)** Calcule o comprimento total de *30kg* de corda (do rolo da figura ao lado), sabendo que *1 metro* dessa corda possui massa de 200*g(=0,2kg)*.
Solução: Calcular a densidade linear de massa μ:


$$\mu = \frac{m_{pedaço}}{L_{pedaço}} = \frac{0,2kg}{1m} = 0,2kg/m,$$

$$L_{total} = \frac{m_{total}}{\mu} = \frac{30kg}{0,2kg/m} = \boxed{150m}. \text{ Veja que } \mu = \frac{m_{total}}{L_{total}} = \frac{30kg}{150m} = 0,2kg/m(\text{constante})$$

*Você <u>não precisa</u> desenrolar a corda e medir o seu comprimento com uma trena.*

## Pressão

Quando temos uma força concentrada em um ponto e desejamos representar essa força distribuída ao longo de uma área ***A***, dividimos essa força por essa área e chamamos essa razão de *pressão* (ver Figura 41),

$$\boxed{P = \frac{F_{\perp}}{A} \quad \left(\frac{N}{m^2}\right)}, \tag{2.4}$$

onde $F_{\perp}$ é a força perpendicular à área ***A***. A unidade de pressão é o $N/m^2$ que é comumente abreviada por $P_a$ (Pascal, em homenagem a Pascal).

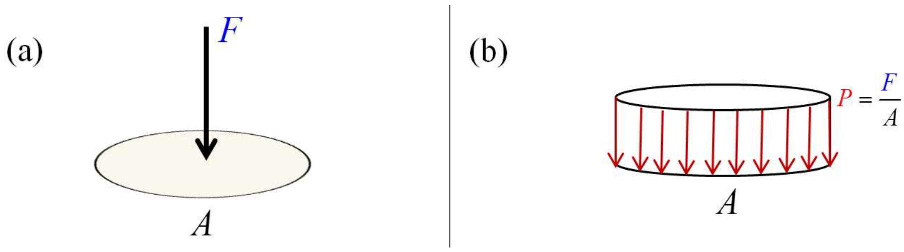


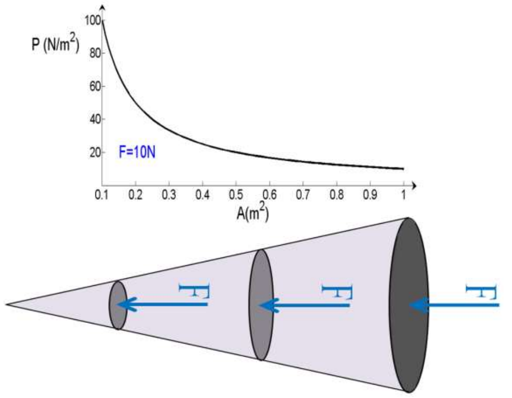

**Figura 41** – Em (a), temos uma força concentrada aplicada sobre uma área ***A***. Em (b), definimos pressão ***P*** como sendo a força ***F*** distribuída uniformemente ao longo de toda área ***A***.

Conhecendo a pressão sobre uma superfície, é possível conhecer a força aplicada, bastando apenas isolar ***F*** da equação (2.4),

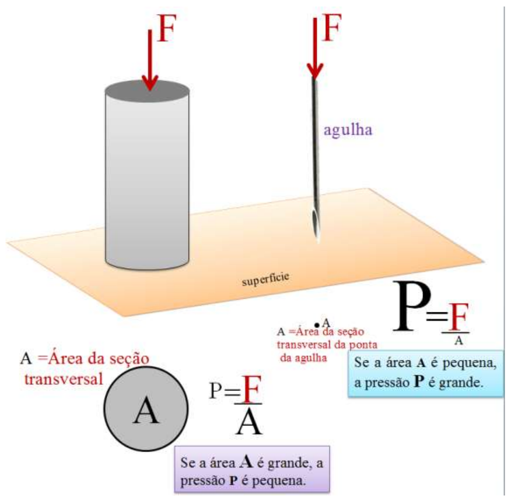
$$\boxed{F = P \cdot A \quad (N)}, \tag{2.5}$$

sendo $F$ a força perpendicular à área $A$. O volume do diagrama de pressão (Figura 41.b) é numericamente igual a força (volume=área da base $x$ altura). Essa relação é útil quando se tem um diagrama de pressão de forma irregular. Observação: caso a força não seja perpendicular, essa deve ser decomposta e a sua componente perpendicular é a que deve ser usada.

Da definição de pressão, para uma força constante, digamos ***F=10N***, à medida que a área ***A*** aumenta, a pressão diminui. Caso contrário, quando a área da seção transversal é pequena, a pressão é grande, veja figura ao lado direito da *pressão (**P**)* versus *área (**A**)*.




Agora podemos entender o porquê da ponta da agulha poder perfurar a maioria das superfícies, isso é por causa da alta pressão exercida pela ponta da agulha (veja figura ao lado direito). A agulha é usada para perfurar a pele (que é a superfície) quando se deseja administrar um medicamento por meio intravenoso, pois a pele oferece resistência com uma pressão chamada tensão superficial. A agulha também é usada para costurar, por poder furar com facilidade o tecido.



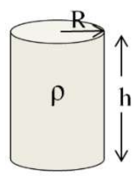

Exemplos

**E.1)** Calcular a pressão exercida por uma força de *100N* perpendicular a uma área de $0.5m^2$.
*Solução: P=F/A, portanto* $P=100N/0.5m^2=\underline{200N/m^2}$.

**E.2)** A pressão exercida por uma força de *100N* é $10^3N/m^2$. Calcule a área em que essa força se encontra distribuída.

*Solução:* $P = \dfrac{F}{A} \overset{\text{isolar } A}{\Rightarrow} \quad A = \dfrac{F}{P} = \dfrac{100\cancel{N}}{10^3\cancel{N}/m^2} = \boxed{0{,}1m^2}$.

**E.3)** Sabendo que um cilindro, de raio $R=0{,}5m$ e altura $h=0{,}2m$, exerce uma pressão de $10^4N/m^2$ sobre a superfície que este se apoia. Calcule a densidade volumétrica do material que é feito o cilindro.
*Solução: A força concentrada sobre a superfície é o próprio peso do cilindro distribuído na sua área de base circular.*




$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow P = \frac{m_{cilindro} \cdot g}{A_{cilindro}} = \frac{\rho \cdot V_{cilindro} \cdot g}{\pi R^2} = \frac{\rho \cdot \left(\cancel{\pi R^2} \cdot h\right) \cdot g}{\cancel{\pi R^2}} \Rightarrow P = \rho \cdot h \cdot g \overset{\text{isolar } \rho}{\Rightarrow} \quad \rho = \frac{P}{h \cdot g} = \frac{10^4\,N/m^2}{0{,}2m \cdot 10m/s^2} = \boxed{5000kg/m^3}.$$

## Viscosidade (*opcional)

A componente tangencial $F_{\parallel}$ da força inclinada sobre a área ***A*** produz tensão de cisalhamento $\tau = \dfrac{F_{\parallel}}{A}$ (ver Figura 42), que deve ser levada em consideração quando se trabalha com fluidos viscosos (fluidos reais).

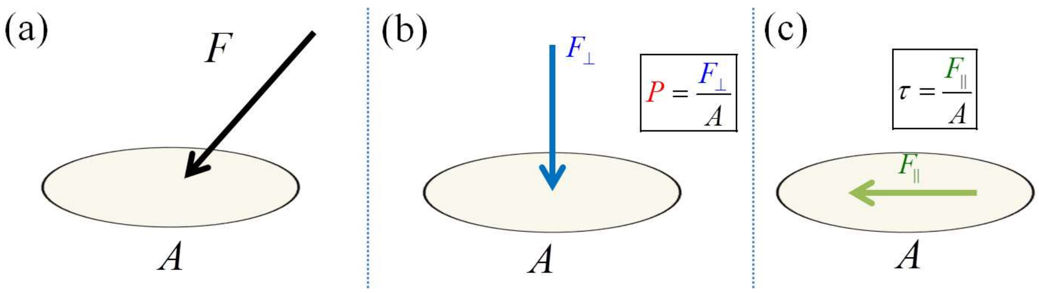



Figura 42 – Para uma força inclinada, a componente perpendicular à área gera pressão de compressão, fig.(b). E a componente paralela à área, gera pressão (tensão) de cisalhamento τ, fig.(c).

Viscosidade é a propriedade que um fluido possui de resistir ao escoamento. Quanto maior for a viscosidade, mais difícil é esse fluido escoar. Portanto, a viscosidade aplica-se apenas a fluido em movimento. Se você jogar um balde de água sobre uma superfície e comparar esse escoamento jogando um balde de óleo de soja sobre outra superfície, você irá perceber que o óleo de soja escoa com maior dificuldade que a água. Isso acontece porque o óleo é mais viscoso que a água.  A viscosidade é diretamente relacionada com a tensão de cisalhamento τ, que é dada pela expressão $\tau = \gamma \frac{d\upsilon}{dy}$, onde $\gamma$ é a viscosidade e $d\upsilon / dy$ é a variação da velocidade do escoamento com a altura *y*. Neste curso, iremos estudar apenas fluidos ideais, sem viscosidade, definido a seguir.

## Exercícios

**l)** Um pedaço de corda de *1.8m* de comprimento pesa *2N*.

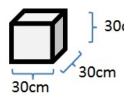
a) Calcule o peso total de *125m* dessa corda.

b) Calcule o comprimento de *30kg* da mesma corda.

**2)** Um rolo de tecido pesa 100N. Sabe-se que o rolo possui *1.2m* de largura. Calcule o comprimento de tecido no rolo, dado que 2m$^2$ desse tecido possui 450g de massa.


**3)** Uma piscina medindo 10.0m de largura por 6.0m de comprimento e 2.0m de profundidade está completamente cheia de água (ρ=1000kg/m$^3$). Determine a força exercida sobre o fundo da piscina devido ao peso da água.

4) Ache o peso de um cubo de chumbo de *30cm* de aresta, cuja densidade é de $\rho_{pb}$=11300kg/m$^3$.




**5)** Uma pessoa quando enche os pulmões ao nível do mar, inspira um volume de 1 litro de ar. Calcule a massa de ar inspirada (em grama), dado que a densidade do ar é $\rho_{ar}=1{,}2 kg/m^3$.

**6)** Calcule a pressão ***P*** exercida por uma força de *10N* sobre uma área de:

a) 1,0 m$^2$  b) 0,5 m$^2$  c) 0,10 m$^2$  d) 10$^{-4}$ m$^2$

**7)** A seção transversal de uma seringa hipodérmica é 2 $cm^2$ ($1cm^2=10^{-4}m^2$) e da agulha é 0.5$mm^2$ ($1mm^2=10^{-6}m^2$). Dado que a pressão sanguínea na veia do paciente é *12mmHg*, calcule:

a) A força mínima que se deve ser aplicada sobre o êmbolo para injetar o fluido na veia.

b) Se o êmbolo da seringa fosse da mesma área da seção transversal da agulha, qual deveria ser a força aplicada para injetar o fluido na veia do paciente? (veja que quanto mais fina for a seringa, menor é a força externa necessária).


***Respostas***:

*1) (a) 139N; (b) 270m*

*2) 37m*

*3) 1200000 N*

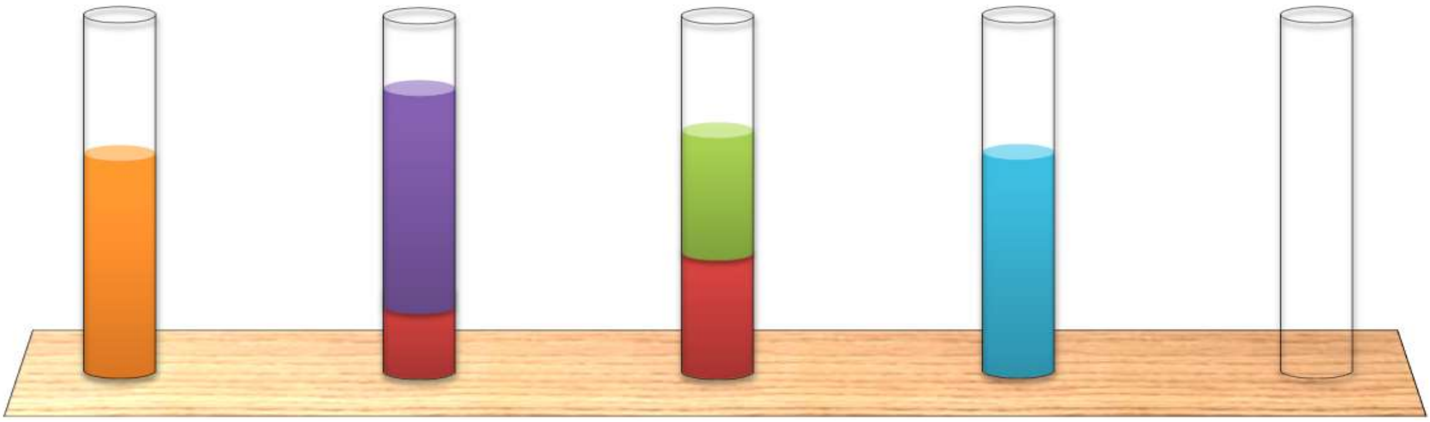
*4) 3051N*

*5) 1.2g*

*6) 10N/m² ; 20N/m² ; 100N/m² ; 100000N/m²*

*7)* a) 0,326N(na verdade, você irá precisar de uma força maior para vencer o atrito entre a borracha do êmbolo e o corpo plástico da seringa); b) $8,16\cdot10^{-4}$N;

## Hidrostática (fluido em repouso)



Nesta primeira seção, vamos estudar fluidos ideais em repouso. A seguir, vamos definir um fluido ideal.

### Considerações sobre Fluido Ideal

- **Fluido incompressível** - fluido em que ρ é sempre constante, ou seja, Δρ=0. Isso quer dizer que não é possível comprimir o fluido. Matematicamente, o fluido possui uma rigidez infinita.
- **Fluido sem viscosidade** – o fluido não oferece resistência ao cisalhamento, portanto toda força de pressão exercida pelo fluido sobre um corpo imerso nesse fluido deve ser perpendicular à superfície do corpo.
- (*reservado para a seção hidrodinâmica*)

## Variação da pressão com a profundidade (lei de Stevin)

Para um fluido em repouso, podemos retirar um *elemento* de massa $\Delta m$ desse fluido e fazer o D.C.L. e impor a condição de equilíbrio estático, ou seja, que força resultante na direção $y$ (ou qualquer direção) é igual a zero, ver Figura **43**.

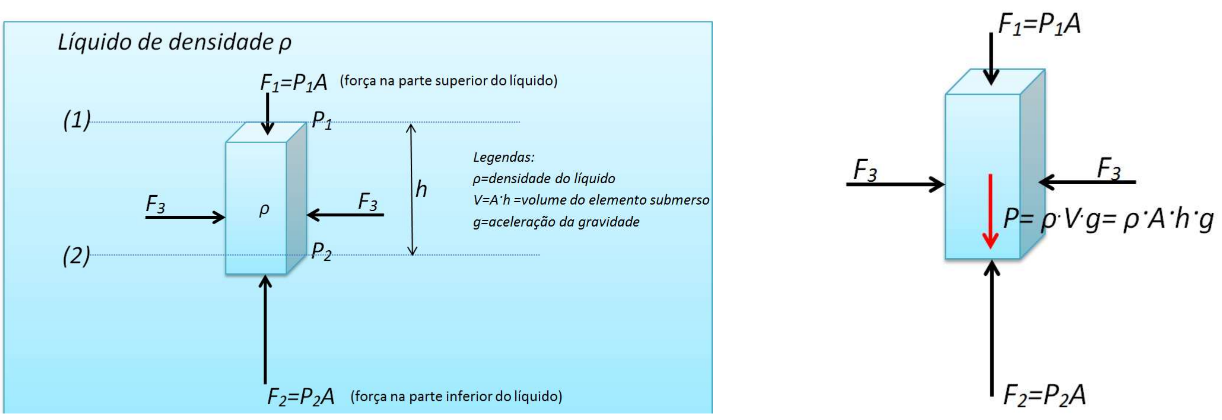



Figura 43 – As forças $F_1$, $F_2$ e $F_3$ são uma espécie de reação normal devido ao contato do elemento de fluido com a vizinhança. Na figura ao lado direito, temos o diagrama de corpo livre para o elemento de fluido em análise.

Aplicando a primeira lei de Newton (*direção-y*), para o líquido em repouso (equilíbrio estático), temos: $+\uparrow\sum F_{(ext),y} = F_2 - F_1 - P = \underbrace{0}_{\substack{\text{fluido em}\\ \text{repouso}}} \quad \Rightarrow \quad P_2\cdot\cancel{A} - P_1\cdot\cancel{A} - \rho\cdot\cancel{A}\cdot h\cdot g = 0$. Isolar $P_2$:

$$\boxed{P_2 = P_1 + \rho\cdot g\cdot h} \quad (N/m^2). \qquad (2.6)$$

A equação (2.6) é a chamada lei de Stevin. Conforme essa equação, a pressão no ponto (2) é devido ao peso (por área) de tudo que está acima desse ponto. Portanto, o termo ($\rho\cdot h\cdot g$) é o peso da coluna $h$ de líquido de densidade $\rho$ e ($P_1$) é a pressão de tudo que tá acima do ponto 1 (ver Figura 44). Logo, a pressão no ponto 2 é devido ao peso de tudo que está acima do ponto 2. A pressão aumenta linearmente com a profundidade $h$. É por isso que quando a gente mergulha em um rio profundo, à medida que mergulhamos mais para o fundo, temos a sensação de uma força nos comprimindo, fica até difícil respirar (expandir os pulmões) mesmo com tubo de oxigênio. Dai a necessidade de usar ar comprimido quando a profundidade $h$ é grande.

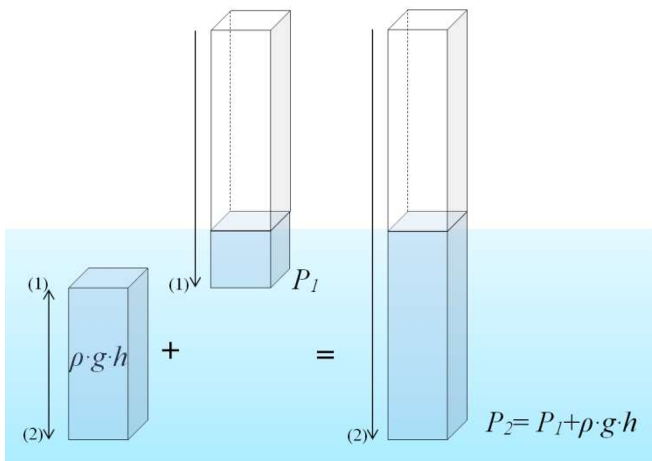



**Figura 44** – Variação da pressão com a profundidade $h$. A pressão em um ponto (2) é devido ao 'peso' de tudo que está acima desse ponto ($P_2=P_1+\rho\cdot g\cdot h$).

A partir da equação (2.6), fazendo $h=0$, temos que $P_2=P_1$, ou seja: "para um fluido em repouso, a pressão em um mesmo nível horizontal (mesma altura vertical) possui o mesmo valor". Esse é o princípio para a solução de problemas envolvendo vasos comunicantes ou manômetros de tubos (aberto e fechado). Na Figura 45, temos os pontos 1, 2, 3 e 4 no mesmo nível (mesmo nível horizontal). Isso implica que $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$, embora a gente ainda não saiba o valor da pressão, o que sabemos no momento é que elas são todas iguais.


**Figura 45** – Para um mesmo nível vertical, a pressão neste nível possui o mesmo valor. Neste caso, $P_1=P_2=P_3=P_4$.

Já sabemos que a pressão varia linearmente com a profundidade $h$ e que o diagrama de pressão que está sujeito um corpo de qualquer forma geométrica deve ser sempre perpendicular à superfície de contato desse corpo, devido ao fluido ser não viscoso. Temos a seguinte declaração: *"um corpo imerso em um fluido estará sujeito a uma força de pressão que é sempre perpendicular à superfície do corpo (direção) e aponta do fluido para o corpo (sentido)"*. Devemos lembrar que pressão é uma grandeza escalar, mas que, às vezes, lhe atribuímos direção e sentido por causa da força ($F=P\cdot A$). Na Figura 46(a e b), temos uma ilustração para um corpo de forma retangular e triangular. A força $\boldsymbol{F}$ devido a pressão é obtida multiplicando a pressão pela área da seção transversal (ou numericamente igual ao volume do diagrama de pressão). O ponto de aplicação da força deve ser o ponto médio do diagrama de pressão.

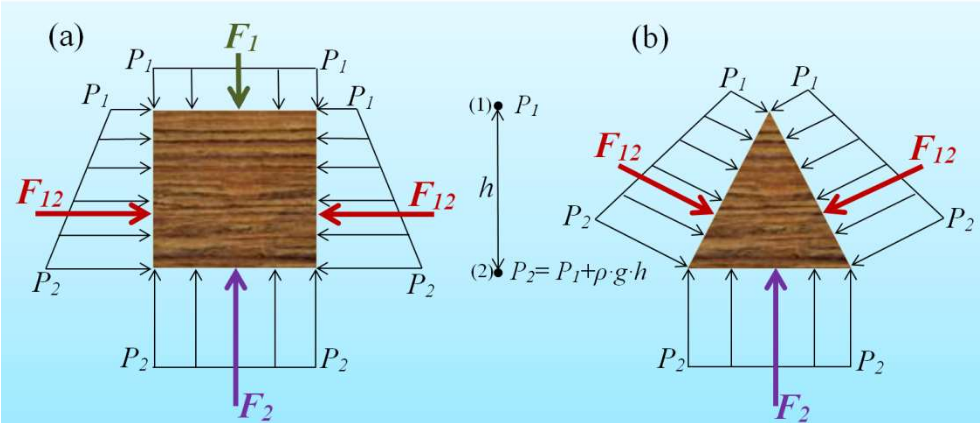



**Figura 46** – A pressão é sempre perpendicular à superfície de contato do corpo imerso em um líquido. A força F que atua em cada lado do corpo, devido a pressão, também é sempre perpendicular à superfície do corpo (lembre-se da definição de reação Normal).

## Pressão Atmosférica

Vamos medir a pressão atmosférica a nível do mar. Uma forma experimental de medir a pressão atmosférica é utilizar uma bacia contendo qualquer líquido, aqui vamos usar mercúrio líquido e uma proveta, de modo que possamos conectá-la a uma bomba que produza vácuo. Na Figura 47.(a) temos uma bacia contendo mercúrio líquido. Na Figura 47.(b), a proveta é colocada de cabeça pra baixo na bacia de mercúrio. Como o interior da proveta se encontra na mesma pressão atmosférica, nada acontece, porque a pressão no seu interior é igual a pressão atmosférica. Agora quando conectado essa proveta a uma bomba de vácuo para retirar todo o ar do seu interior, observamos que uma coluna $h$ de mercúrio subiu através das paredes da proveta (Figura 47.(c)). A nível do mar, essa coluna $h$ de mercúrio seria exatamente 0,76m (760mm). Com essa altura, agora podemos calcular a pressão atmosférica aplicando o princípio que em um mesmo nível, para um fluido em repouso, a pressão possui o mesmo valor. Na Figura 47.(c), temos que a pressão no ponto **a** vale: $P_a=\rho_{hg}\cdot g\cdot h+0$ (o valor 0 é a pressão de vácuo no interior da proveta, $P_0=0$). Note que o ponto **a** está exatamente no mesmo nível de atuação da pressão atmosférica, portanto essas pressões devem ser iguais. Isso implica que $P_a=P_{atm}$, portanto $P_{atm}=\rho_{hg}\cdot g\cdot h$. Agora vamos substituir os valores numéricos: $P_{atm}=13600kg/m^3\cdot 9{,}8m/s^2\cdot 0{,}76m=1{,}01\cdot 10^5 N/m^2$ ou

$$\boxed{P_{atm}=10^5 N/m^2} \text{ (vamos usar este valor arrendondado).} \qquad (2.7)$$

Esse é o valor da pressão atmosférica a nível do mar. Esse número significa que em 1m$^2$ o peso dos gasese da amosfera é $10^5$N. A pressão atmosférica diminui com a altura, mas essa diminuição não é mais seguindo a equação (2.6), pois a atmosfera é formada por gases e a essa equação é válida apenas para líquidos ou sólidos, desde que a densidade seja mantida constante.

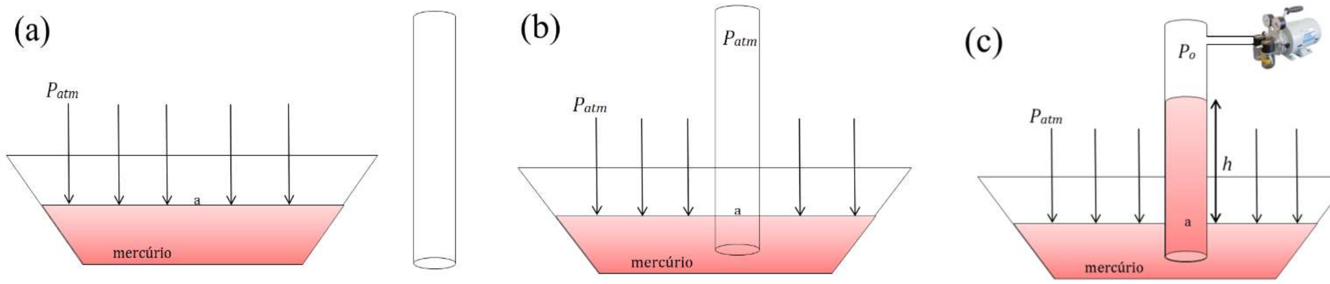



Figura 47 – Medindo a pressão atmosférica utilizando mercúrio líquido, uma proveta, bacia e bomba para produzir vácuo.

Se ao invés de mercúrio, fosse utilizada água, qual seria a altura da coluna de água que iria subir pela proveta? Para responder essa pergunta, podemos usar a equação (2.7) e calcular o novo $h$:

$$P_{atm} = \rho_{agua} \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{P_{atm}}{\rho_{agua} \cdot g} = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 N/m^2}{1000kg/m^3 \cdot 9{,}81m/s^2} = \boxed{10{,}3m}.$$

Veja que <u>uma pressão atmosférica</u> ($1P_{atm}$) é equivalente a <u>*0,76m* de coluna de mercúrio</u> ou a <u>*10,3m* de coluna de água</u>. Seria bem inconveniente calcular a pressão atmosférica usando água, pois a altura da proveta deveria ser superior a *10m*. O valor encontrado aqui, *10,3m*, mostra que essa é a altura máxima de coluna de água que a pressão atmosférica pode elevar. Antigamente, as bombas de poços artesianos eram manuais, Figura 48(à esquerda), sendo necessário bombear uma manivela para criar uma região de vácuo, análogo a Figura 47.(c), e a pressão atmosférica se encarregava de elevar a água. A grande limitação dessas bombas era que essas não serviam para poços com profundidade superior a 10.3m. Esse processo é o mesmo usando em bombas domésticas de garrafões de 20L de água mineral (Figura 48 à direita). O ato de pressionar a parte de cima da bomba é para reduzir a pressão no interior da mangueira e a pressão atmosférica elevar a água até o nosso copo.

Figura 48 – Na figura à esquerda, temos uma bomba manual antiga para retirada de água de poço artesiano. Na figura à direita, quando você pressiona o dispositivo na parte de cima da bomba d'água é para criar uma região de baixa pressão no interior da mangueira e a pressão atmosférica elevar a água até o seu copo.

## Pressão Absoluta

Agora podemos calcular a pressão em um ponto abaixo do nível de um lago ou do mar, usando a equação (2.7), fazendo o ponto *1* exatamente na superfície livre do líquido e o ponto *2* a uma profundidade *h (*ver Figura 49*)*, temos

$$\boxed{P = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h \quad (N/m^2)} \quad \text{(Pressão absoluta na profundidade } h\text{).} \qquad (2.8)$$

Da equação (2.8), $P_{atm} = 10^5 N/m^2$ (pressão atmosférica), $\rho$ é a densidade volumétrica (ou massa específica) e $h$ é a profundidade abaixo da superfície livre do líquido.

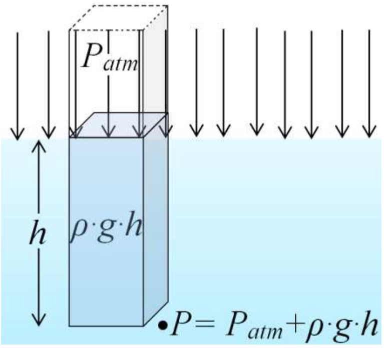



Figura 49 – Variação da pressão com a profundidade $h$ abaixo da superfície livre de um lago, rio ou mar. A pressão absoluta a uma profundidade $h$ é a pressão devido a coluna $h$ de líquido mais a pressão atmosférica.

*Exemplos*

**E.1)** Calcule a pressão absoluta a uma profundidade de *8m* abaixo do nível de um lago (*ρ=1000kg/m³*).

Solução: $P = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad P = 10^5 N/m^2 + 1000 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2 \cdot 8m = \boxed{1{,}8 \cdot 10^5 N/m^2}$.

**E.2)** Calcule a profundidade $h$ em que a pressão corresponde a 10 atmosferas ($10 \cdot P_{atm}$) em:

a) água doce.

Solução: $P = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot P_{atm} = P_{atm} + 1000 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2 \cdot h \quad \Rightarrow h = \dfrac{9 \cdot P_{atm}}{1000 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2}$,

$$h = \frac{9 \cdot 10^5 N/m^2}{1000 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2} = \boxed{90m}.$$

b) água salgada ($\rho_{mar}$*=1020kg/m³*).

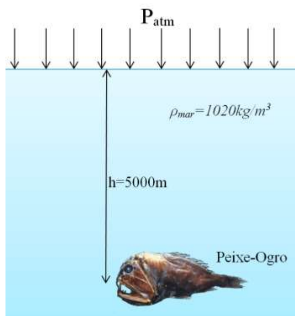
Solução: $P = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot P_{atm} = P_{atm} + 1020 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2 \cdot h \quad \Rightarrow h = \dfrac{9 \cdot P_{atm}}{1020 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2}$,

$h = \dfrac{9 \cdot 10^5 N/m^2}{1020 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2} = \boxed{88.2m}$. Pois a água salgada é mais 'pesada' que a água doce.

**E.3)** Calcule a pressão que está sujeito o *peixe-ogro* que sobrevive a *h=5000m* de profundidade no fundo do oceano.

Solução: $P = P_{atm} + \rho_{mar} \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow P = P_{atm} + 1020 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2 \cdot 5000m =$

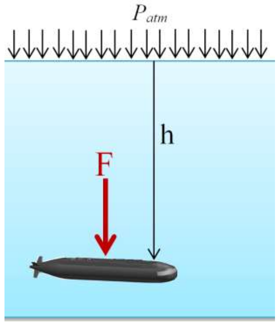
$$= \underbrace{10^5 N/m^2}_{P_{atm}} + 510 \cdot 10^5 N/m^2 \Rightarrow P = (1+510) \cdot 10^5 N/m^2 = \boxed{511 \cdot \underbrace{10^5 N/m^2}_{P_{atm}}} = \boxed{511 \cdot P_{atm}}$$




**E.4)** Sabe-se que a força externa que atua no teto, de área *500m²*, de um submarino nuclear é ***F****=2.10·10⁸N*.

a) Calcule a que profundidade se localiza esse submarino no fundo do mar (considere $\rho_{mar}$*=1020kg/m³*).

Solução: A pressão que atua no teto do submarino vale: $P = \frac{F}{A}$, ou $P = \frac{2{,}1 \cdot 10^8 N}{500 m^2} = 4{,}2 \cdot 10^5 N/m^2$. Agora vamos calcular a profundidade $h$ correspondente a essa pressão, usando a equação $P = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$. Isolando h: $h = \frac{P - P_{atm}}{\rho \cdot g} \Rightarrow h = \frac{4{,}2 \cdot 10^5 N/m^2 - 10^5 N/m^2}{1020 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2} = \frac{3{,}2 \cdot 10^5 N/m^2}{1020 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2} = \boxed{31{,}37m}$.




b) A pressão máxima que o submarino pode suportar é $15 \cdot P_{atm}$. Calcule a profundidade $h$ máxima que esse submarino pode descer. *Solução:* $h = \frac{P - P_{atm}}{\rho \cdot g} \Rightarrow h = \frac{15 \cdot 10^5 N/m^2 - 10^5 N/m^2}{1020 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2} = \frac{14 \cdot 10^5 N/m^2}{1020 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2} = \boxed{137{,}25m}$.

## Exercícios

**1)** O corpo humano pode ser submetido, sem consequências danosas, a pressão de no máximo $4 \cdot 10^5 N/m^2 (4P_{atm})$. A que profundidade máxima o ser humano pode mergulhar, em água doce, com segurança?

**2)** Um oceanógrafo construiu um aparelho para medir a profundidades do mar. Sabe-se que o aparelho suporta uma pressão de até $2.0 \cdot 10^6 N/m^2$. Qual a máxima profundidade $h$ que o aparelho consegue medir?

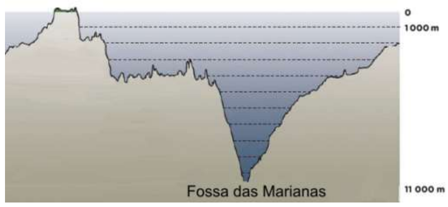
**3)** A que pressão está sujeito um mergulhador em alto mar, a uma profundidade de *40m*?

**4)** A que profundidade se encontra um mergulhador no fundo do mar, sabendo que a pressão que atua neste mergulhador é de $6.0 \cdot 10^5 N/m^2$? Dado: $\rho_{mar} = 1020 kg/m^3$.

**5)** Sabendo que a força que está sujeito o teto de um submarino nuclear, de área $50m^2$, é de $9.0 \cdot 10^7 N$. Calcule a profundidade que se localiza esse submarino no fundo do mar.

**6)** Calcule a pressão no fundo da fossa das Marianas, local mais profundo do oceano, com profundidade de $h=11034m$. Considere que a densidade da água do mar sem mantém constante ($\rho_{mar}=1020kg/m^3$) a qualquer profundidade.

*A figura ao lado representa o corte de perfil da fossa das Marianas*, que é *uma fenda no fundo do oceano pacífico.*




**Respostas:**

1) 30m
2) 186,3m
3) $5{,}08 \cdot 10^5 N/m^2$
4) 49m
5) 166,7m
6) $1126{,}5 \cdot 10^5 N/m^2 = 1126{,}5 \cdot P_{atm}$

## Pressão Manométrica

É muito comum o termo ‘pressão negativa’, embora a pressão a seja uma grandeza sempre positiva. Quando se fala em pressão negativa, a pessoa está se referindo a pressão manométrica $\Delta P$, que é definida como sendo a pressão absoluta menos a pressão atmosférica, ou seja:

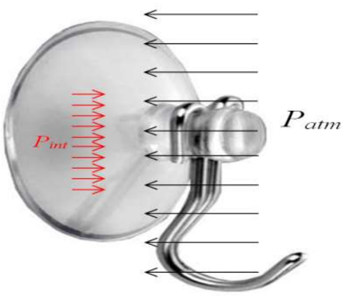
$$\boxed{\Delta P = P - P_{atm}}, \quad \Rightarrow P_{manométrica} = P_{absoluta} - P_{atmosférica} \tag{2.9}$$

A pressão manométrica abaixo da superfície de um líquido é dada por $\Delta P = P - P_{atm} = \left(\cancel{P_{atm}} + \rho \cdot h \cdot g\right) - \cancel{P_{atm}}$,

$$\boxed{\Delta P = \rho \cdot g \cdot h \quad (N/m^2)} \quad \text{(Pressão Manométrica)} \tag{2.10}$$

onde $\Delta P$ é a pressão manométrica, $P$ é a pressão absoluta no ponto de medição e $P_{atm}$ é a pressão atmosférica. Então, o termo pressão 'negativa', significa que a pressão absoluta é menor que a pressão atmosférica. E quando a pressão é positiva, quer dizer que a pressão absoluta é maior que a pressão atmosférica. Durante a respiração, quando você respira e puxa o ar para dentro dos seus pulmões (inspiração), você cria uma pressão negativa. Já quando você libera o ar para o meio externo (expiração), você cria uma pressão positiva no interior dos seus pulmões. Se não for mencionada pressão manométrica, a pressão atmosférica deve ser levada em consideração. Tenha cuidado com isso.

Quando se gruda uma ventosa sobre uma superfície lisa (Figura 50 à esquerda), cria-se no interior da ventosa uma pressão negativa, e a pressão atmosférica é a responsável por manter essa ventosa grudada na parede. Com o passar do tempo, a pressão no interior da ventosa se iguala a pressão atmosférica e a ventosa cai. É por isso que a superfície deve ser lisa, para evitar que o ar externo entre para o interior da ventosa e iguale as pressões. Quando você toma suco em embalagem de caixa *Tetra Pak* (Figura 50 à direita), você suga o ar através *canudinho* para criar uma região de pressão negativa no interior desse canudinho e a pressão atmosférica é que fica responsável por elevar o suco para a sua boca. Prova que é a pressão atmosférica que eleva o suco, basta você vedar a passagem do canudinho para dentro da caixa de suco e agora tente sugar novamente o suco. Você irá perceber que esse não sobe mais.



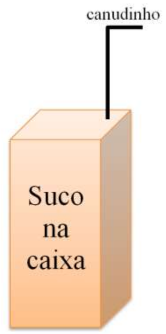




**Figura 50**- Na figura à esquerda, temos uma ventosa grudada em uma superfície lisa. A pressão interna $P_{int}$ é menor que a atmosférica. Quando você multiplica a diferença de pressão pela área da ventosa, a força devido à diferença de pressão é que vai manter a ventosa grudada na parede. Na figura à direita, temos uma caixa de suco com o canudinho. Sugamos o canudinho para criar uma *'pressão negativa'* em seu interior e a pressão atmosférica elevar o suco até a nossa boca.

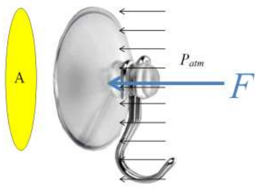
*Exemplo*

**E.1)** Para uma ventosa de área efetiva $A=10cm^2$, calcule a força que mantém essa ventosa grudada na parede, caso a pressão no interior da ventosa seja:

a) $P_{int}=0$ (vácuo).

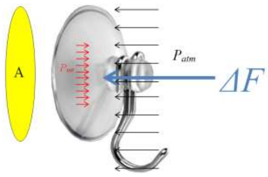
*Solução*:

$$P = \frac{F}{A}; \quad F = P \cdot A = 10^5 N/m^2 \cdot 10 \cdot \underbrace{10^{-4} m^2}_{1cm^2} = \boxed{100N}.$$



b) $P_{int}=0,1\cdot10^5 N/m^2$ *(10% da pressão atmosférica)*

$$Solução: \quad \Delta P=\frac{\Delta F}{A}; \quad \Delta F=F_{\text{externa}}-F_{\text{interna}}=\Delta P\cdot A,$$
$$\Delta F=\left(10^5\,N/m^2-0{,}1\cdot10^5\,N/m^2\right)\cdot10\cdot\underbrace{10^{-4}m^2}_{1cm^2}=\boxed{90N}.$$



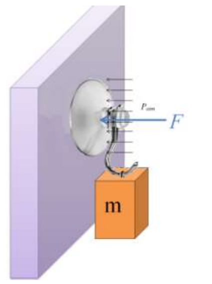

c) $P_{int}=0,9\cdot10^5 N/m^2$ *(90% da pressão atmosférica)*

$$Solução: \quad \Delta P=\frac{\Delta F}{A}; \quad \Delta F=F_{\text{externa}}-F_{\text{interna}}=\Delta P\cdot A,$$
$$\Delta F=\left(10^5\,N/m^2-0{,}9\cdot10^5\,N/m^2\right)\cdot10\cdot\underbrace{10^{-4}m^2}_{1cm^2}=\boxed{10N}.$$

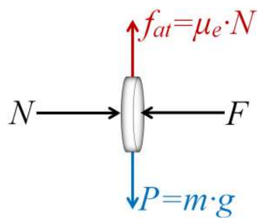
d) $P_{int}=1,0\cdot10^5 N/m^2$ *(100% da pressão atmosférica).*

*Solução: $\Delta F=0N$ (não existe sustentação).*

e) Para o item (a), calcule o maior valor de ***m*** que pode ser pendurado na ventosa (*F=100N*), dado que o coeficiente de atrito estático entre a parede e a ventosa é $\mu_e=0,3$.




*Solução: aqui vamos desprezar a massa da ventosa e apenas o bloco m pendurado é que irá contribuir para a força peso. Pelo D.C.L. da ventosa (figura ao lado), vamos impor a condição de equilíbrio estático em todas as direções:*




$$\rightarrow\sum F_{(ext),x}=N-F=\underbrace{0}_{\substack{ventosa\ em\\ repouso}}\Rightarrow N=F,$$

$$\uparrow\sum F_{(ext),y}=\underbrace{f_{at}}_{\mu_e\cdot N}-\underbrace{P}_{m\cdot g}=\underbrace{0}_{\substack{ventosa\ em\\ repouso}}\Rightarrow\mu_e\cdot\underbrace{F}_{=N}=m\cdot g\quad\Rightarrow\quad m=\frac{\mu_e\cdot F}{g}=\frac{0{,}3\cdot100N}{10m/s^2}=\boxed{3kg}.$$

## Pressão em termos de coluna *h*

Sempre que for mencionada *pressão* em função de coluna *h* de algum líquido conhecido, para converter essa pressão para N/m² é só usar a relação (2.10), ou $\Delta P=\rho\cdot g\cdot h$. Por exemplo, a pressão atmosférica a nível do mar é equivalente a 760mmHg. Aqui, *h=760mm=0,76m* e $\rho$ é a densidade do mercúrio *Hg* que é igual a $\rho_{Hg}=13600kg/m^3$. Portanto, a pressão atmosférica em N/m² é $\Delta P_{atm}=13600kg/m^3\cdot10m/s^2\cdot0{,}76m=103360$ N/m² (ou ≈$10^5$ N/m²). Para uma pressão de *200mmHg*, essa pressão em N/m² pode ser calculada da forma: $\Delta P=\underbrace{13600kg/m^3}_{\rho_{Hg}}\cdot\underbrace{10m/s^2}_{g}\cdot\underbrace{0{,}2m}_{h_{Hg}=200mm}=27200\ N/m^2$. Por último, para uma pressão correspondente a *50cm* de coluna de água, essa pressão em N/m² é: $\Delta P=\underbrace{1000kg/m^3}_{\rho_{H_2O}}\cdot\underbrace{10m/s^2}_{g}\cdot\underbrace{0{,}5m}_{h_{H_2O}=50cm}=5000\ N/m^2$. Agora o caso inverso, para uma pressão de 60000 N/m² corresponde a que altura de mmHg? Vamos calcular a altura de mercúrio equivalente a essa pressão, usando $\Delta P=\rho\cdot g\cdot h\overset{isolar\ h}{\Rightarrow}h_{Hg}=\frac{\Delta P}{\rho_{Hg}\cdot g}=\frac{60000N/m^2}{13600kg/m^3\cdot10m/s^2}=0{,}44m\overset{ou}{=}440mm$.

Logo, 60000 N/m² é equivalente a 440mmHg (coluna de mercúrio) ou a *6,0m* (*6000mm*$H_2O$) de coluna de água.

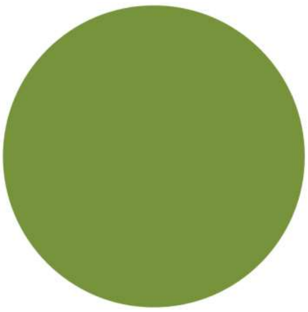
Uma unidade de pressão que é muito usada é o **m.c.a.** (metro de coluna de água). Por exemplo, ***30mca*** significa que a pressão é equivalente a 30m de coluna de água, ou a $\Delta P = \underbrace{1000 kg / m^3}_{\rho_{H_2O}} \cdot \underbrace{10 \mathrm{m} / \mathrm{s}^2}_{g} \cdot \underbrace{30\mathrm{m}}_{h_{mca}} = 300000 \mathrm{~N} / \mathrm{m}^2$.

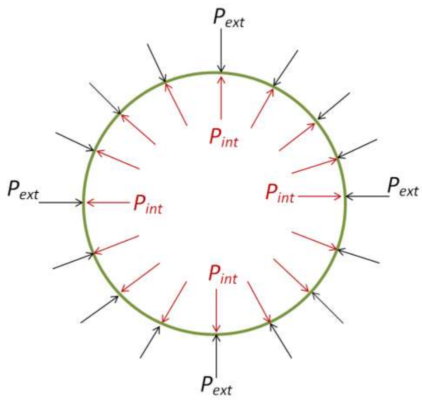
## Exercícios

1) Converta *20mmHg* para $N/m^2$.
2) Converta *500cm*$H_2O$ para $N/m^2$.
3) Qual é a altura *h* equivalente, em *mmHg* e a *cm*$H_2O$*,* a uma pressão de 80000 $N/m^2$?
4) Uma pressão de *20mmHg* equivale a quantos *cm*$H_2O$*?*

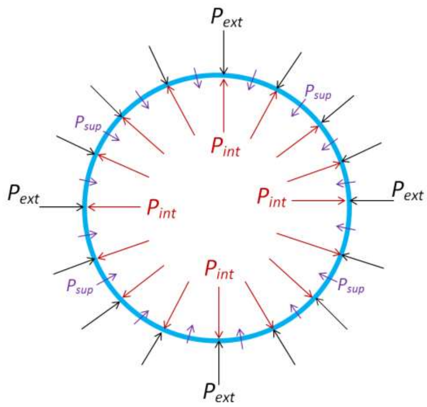
*1) 2720* $N/m^2$ *3) 588mmHg e 800cm*$H_20$
*2) 50000* $N/m^2$ *4) 27,2cm*$H_20$

## Influência da Pressão






Para um corpo, uma esfera por exemplo, que se encontra em equilíbrio, tal que o seu volume não varia, isso significa que a pressão *int*erna é igual a pressão *ext*erna ($P_{ext}=P_{int}$). Se a pressão *ext*erna é removida ($P_{ext}=0$), a pressão *int*erna tende a expandir o volume do corpo. Agora o caso contrário, se a pressão *int*erna é removida ($P_{int}=0$) e a pressão *ext*erna mantida, esta pressão tende a esmagar (comprimir) o corpo.




Quando levamos em conta a *tensão superficial* da superfície que envolve o corpo, para que haja o equilíbrio, a pressão *int*erna ($P_{int}$) deve ser igual a soma da pressão *ext*erna ($P_{ext}$) com a pressão exercida pela *sup*erfície ($P_{sup}$), ou seja, $P_{int}= P_{ext}+P_{sup}$. Como exemplo, quando enchemos uma bexiga de festa de aniversário, a pressão *int*erna do ar na bexiga é igual a pressão atmosférica mais a pressão exercida pelo látex, que é a borracha da bexiga. Se você furar a bexiga, o ar vai sair do interior para o exterior. Quando a bexiga está cheia de ar e esta assume uma forma irregular, é devido a tensão superficial do latex ser diferente em cada ponto da bexiga. Se a tensão superficial da bexiga for igual em todos os pontos, a bexiga irá assumir uma forma esférica perfeita.

Quando você compra um pacote de café lacrado a vácuo, observe que o pacote de café se encontra altamente compactado, parecendo um tijolo. Isso acontece porque a pressão no interior do pacote é quase zero (vácuo) e a pressão atmosférica compacta (comprime) o pacote. Quando você fura o pacote de café, o ar vai passar do meio externo para o interior do pacote até as pressões se igualarem.

## Consequências das baixas pressões

Para entendermos como baixa pressão pode ser extremamente perigosa para o ser biológico, precisamos entender como a água se comporta quando a temperatura e a pressão externa é variada. As principais fases da água são: fase sólida, líquida e gasosa. Todas essas fases dependem da pressão e da temperatura externa. Para pressão de uma atmosfera, a água se encontra no estado sólido para temperaturas inferiores a 0ºC. Para temperaturas entre 0ºC e 100ºC, a água é encontrada no estado líquido. Já para temperaturas acima de 100ºC, só existe água no estado gasoso. A água entra em ebulição (ferve) quando a sua pressão de vapor $\boldsymbol{P_V}$ é maior que a pressão externa (que é a pressão atmosférica). Para temperatura de 100ºC a pressão de vapor da água é 760mmHg ou $1P_{atm}=10^5N/m^2$. Quando a água se encontra na temperatura de 60ºC sua pressão de vapor é $0{,}2\cdot P_{atm}$ (ver Figura 51.b). Portanto, a água não ferve a essa temperatura porque a pressão externa, que é igual a $1P_{atm}$, é maior que a pressão de vapor da água. Nestas condições, se a água líquida for colocada em uma região em que a pressão externa é igual a $0{,}2\cdot P_{atm}$, a água irá entrar em ebulição (ferver) para temperatura de 60ºC e não mais a 100ºC. Você provavelmente já deve ter visto na tv experiências em que a água entrava em ebulição a temperatura ambiente, digamos 20ºC. Nesta temperatura, a pressão externa deve ser em torno de 5,2% da pressão atmosférica, que é conseguida usando uma bomba para sugar o ar do interior da câmara, onde a água se encontra, e reduzir a pressão.

Se o ser humano, que a temperatura interna média do corpo é em torno de 37ºC, for exposto em uma região que a pressão externa é em torno de 9% da pressão atmosférica, toda a água que compõe o seu corpo irá vaporizar e a pessoa explode, literalmente. No planeta marte, que possui sua pressão atmosférica equivalente a *1%* da pressão atmosférica da terra, a água entra em ebulição para temperatura igual a -25ºC. Portanto, só é possível encontrar água no estado líquido para temperaturas inferiores a -25ºC. Água no estado líquido é uma condição necessária (mas não suficiente) para a existência de vida.

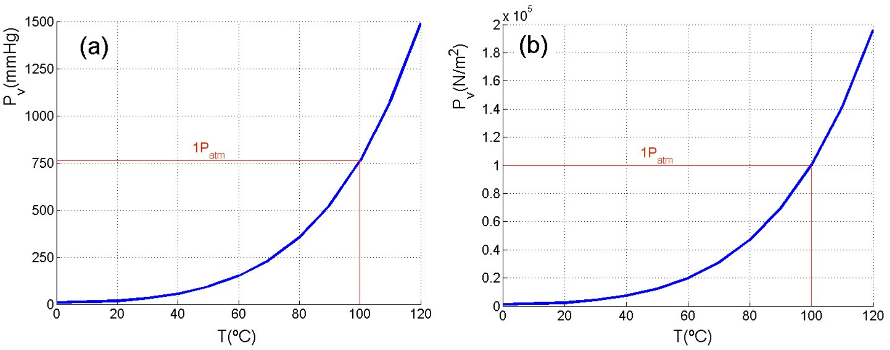



**Figura 51** – Pressão de vapor da água pura versus a sua temperatura de ebulição. Na figura (a), tem-se a pressão de vapor na escala de mmHg. Na figura (b), tem-se a pressão de vapor na escala de N/m$^2$. A água entre em ebulição (ferve) quando a sua pressão de vapor ($\boldsymbol{P_{int}}$) é maior que a pressão externa ($\boldsymbol{P_{ext}}$). A equação aproximada pra a pressão de vapor da água em função da temperatura é: $P_v(T)=2498N/m^2\cdot exp(0{,}0365/ºC\cdot T)$.

O corpo humano ou qualquer animal que sobrevive na superfície da terra a nível do mar é adaptado a pressão de uma atmosfera ($1P_{atm}$). A pressão atmosférica diminui com a altura. Para altura de 11000m (11km), altura essa de cruzeiros dos aviões comerciais, o interior da aeronave deve ser pressurizado (a pressão de $1P_{atm}$), pois nessa altitude a pressão atmosférica é baixa o suficiente para fazer o ser humano perder a consciência, desmaiar e morrer. A quantidade de gás oxigênio $O_2$ que respiramos, também diminui com a altitude. A *5000m* de altura, a quantidade de oxigênio é a metade do valor a nível do mar. Quando a quantidade de oxigênio diminui, a frequência respiratória aumenta na mesma proporção, assim como a frequência cardíaca.

Percebemos, agora, importância dos trajes espaciais para os astronautas, que se encontram no espaço, em regiões de pressão externa zero (ou no vácuo). A roupa do astronauta deve ser pressurizada a pressão de $1P_{atm}$, para equilibrar a pressão no interior do nosso corpo, que também é de $1P_{atm}$. Pois, se o corpo humano for exposto ao vácuo, todos os fluidos do nosso corpo (água, sangue, etc) irão vaporizar e a pessoa explode.

## Consequências das altas pressões

Da equação dos gases ideais $P{\cdot}V=n{\cdot}R{\cdot}T$, para temperatura $T$ constante, implica que o produto $P{\cdot}V=constante$. Portanto, se você aumenta a pressão $P$ sobre um gás o seu volume $V$ deve diminuir. Quando se mergulha muito profundo, a pressão exercida sobre os gases contido no sangue, principalmente o gás nitrogênio $N_2$, suas bolhas passam a ocupa um pequeno volume. O perigo ocorre quando o mergulhador sobe muito rápido à superfície. Isso faz com que as bolhas do gás nitrogênio se expandam rapidamente devido a rápida descompressão (redução da pressão). Essas grandes bolhas de gás podem vir a ocasionar diversos problemas, principalmente entupimento de artérias ou veias, fazendo com que o mergulhador perca, por exemplo, o movimento de alguns dos membros. Esse efeito é chamado *embolia gasosa*.

Se a pressão diminui, os volumes das bolhas gasosas aumentam, podendo entupir artérias ou veias.

Os animais marinhos que sobrevivem a altas profundidades no fundo do oceano (animais exóticos), não podem ser trazidos à superfície. A pressão no interior do seu corpo é equivalente à pressão em que esses animais se encontram no seu habitat natural (adaptação natural). Por isso, esses animais marinhos não podem ser trazidos à superfície, pois a pressão na superfície ($P_{atm}$) é bem inferior a pressão interna do seu corpo.

Essa pressão interna não encontra mais a resistência da pressão externa e os órgãos desses animais começam a falhar e o animal morre lentamente. Uma forma de trazer esses animais com segurança à superfície para estudos científicos é mantê-los pressurizados com pressão equivalente a do seu habitat natural.

Na figura ao lado, temos o *peixe-ogro* (http://hypescience.com/as-20-mais-assustadoras-criaturas-das-profundidades/). Este peixe pode ser encontrado a uma profundidade de 5000m abaixo do nível do mar ($\rho_{mar}=1020kg/m^3$). A pressão que o corpo do peixe é sujeito nessa profundidade é equivalente a $511P_{atm}$. O corpo humano seria esmagado se submetido a essa pressão.

## Manômetro de tubo aberto, fechado e Fluidos Imiscíveis (que não se misturam)

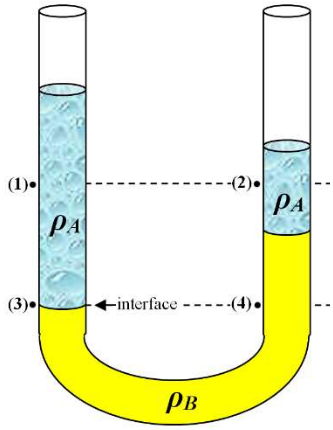
Manômetros são dispositivos utilizados para medir pressão (ver figura ao lado). É utilizado um manômetro para verificar a calibração dos pneus de carros, motos, bicicletas, para medir a pressão no interior de um botijão de gás, e assim por diante. Na ausência de um manômetro profissional, podemos usar um manômetro de tubo aberto (ou fechado) para calcular pressão ou densidade de qualquer líquido desconhecido. A unidade de pressão mais comum nesses monômetros é o ***psi*** (**p**und **s**quare **i**nch=libra força por polegada quadrada). A relação de conversão é $1P_{atm}=14,7\ psi$ (e $P_{atm}=10^5N/m^2$).


Manômetros de tubo aberto ou fechado usam líquidos imiscíveis em seu interior, tal que podemos ter informações sobre pressão ou densidade, medindo com uma régua os desníveis entre os líquidos no interior desse tubo. Quando colocamos dois (ou mais líquidos) imiscíveis em um tubo, que pode ser aberto, fechado ou ambos os casos, notaremos que haverá um desnível entre a superfície livre de cada líquido se estes forem de densidades diferentes. Com essa informação, podemos calcular densidade, por exemplo, de algum dos fluidos.

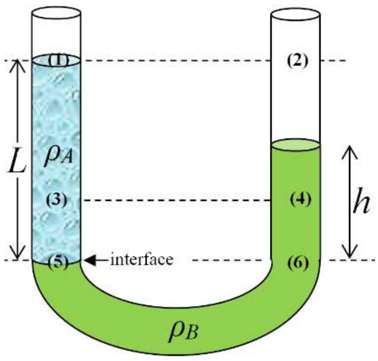
As regras de ouro para se resolver problemas envolvendo tubos com vários líquidos ou gases são:
*(i) - A pressão em um ponto é devido à pressão de tudo que está acima desse ponto.*
*(ii) - Para pontos no mesmo nível horizontal, as pressões são iguais desde que esses pontos estejam diretamente conectados por um único fluido ou na interface de um fluido com outro diferente.*
*(iii) - Para um gás, a pressão <u>não</u> varia com a altura, é <u>sempre constante no interior do tubo</u>.*

*Observação: Quando falamos em pressão em um ponto, estamos nos referindo à pressão no interior do fluido. Para aplicar corretamente a regra (ii), os pontos devem estar diretamente conectados por um único fluido. No exemplo da figura ao lado, a pressão no ponto* ***(1)*** ***<u>não</u>*** *é igual a pressão no ponto* ***(2)*** *($P_{(1)} \neq P_{(2)}$) apesar dos pontos estarem no mesmo nível horizontal e os fluidos possuírem a mesma densidade ($\rho_A$), mas os pontos não estão diretamente conectados por um único fluido. Veja que existe o fluido B ($\rho_B$) separando os dois.*

*Neste exemplo, a pressão no ponto* ***(3)*** *é igual a pressão no ponto* ***(4)*** *($P_{(3)} = P_{(4)}$), pois os pontos estão no mesmo nível horizontal e estão diretamente conectados através de um único fluido, $\rho_B$.*




Mais exemplos:
**E.1)** Na figura ao lado, temos $P_{(3)}$ (no lado esquerdo) e $P_{(4)}$ (no lado direito). Apesar de $P_{(3)}$ e $P_{(4)}$ estarem no mesmo nível horizontal, essas pressões ***não são iguais***, pois os pontos não estão diretamente conectados através de um único fluido. Já as pressões nos pontos **(5)** e **(6)** estão no mesmo nível horizontal e os pontos estão diretamente conectados pelo fluido $\rho_B$, portanto $P_{(5)} = P_{(6)}$. Essas pressões são: $P_{(5)} = \rho_A \cdot g \cdot L + P_{atm}$ e $P_{(6)} = \rho_B \cdot g \cdot h + P_{atm}$. Lembre-se que a pressão em um ponto é devido ao peso (por área) de tudo que está acima desse ponto.




**E.2)** Na construção civil, uma mangueira transparente contendo apenas água (ver Figura 52 à esquerda) é usada como um nivelador, pois a altura da superfície livre de água no lado esquerdo da mangueira deve ser igual a lado direito (mesmo nível). Na hora de efetuar a medida, normalmente o pedreiro retira a tampa em cada lado da mangueira para que ambas as extremidades da mangueira fiquem exposta à pressão atmosférica. Após a medida, cada extremidade da mangueira é novamente tampada para que a água não derrame. Se a água no interior da mangueira contêm bolhas de ar (ver figura à direita), os níveis em cada extremidade serão ligeiramente diferentes. Portanto, quando isso ocorrer, a água deve ser substituída por água limpa. Normalmente, bolha de ar é associada à atividade de bactérias.

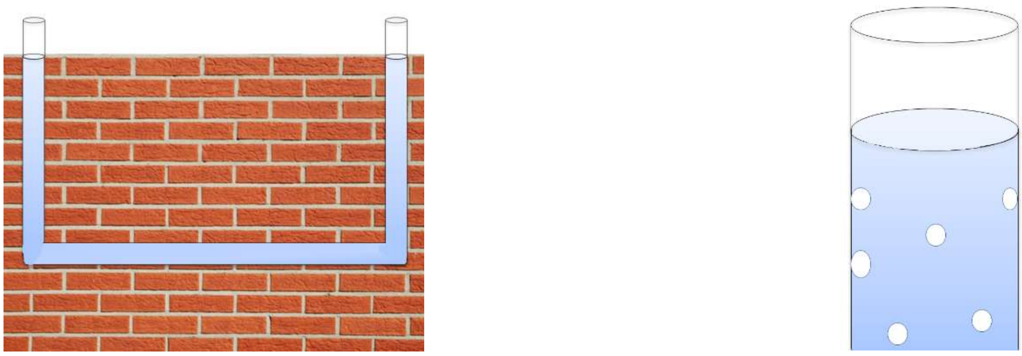
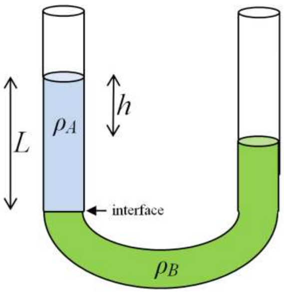


**Figura 52** – Uma mangueira, flexível e transparente, contendo água e aberta em ambas as extremidades, pode ser usada como um nivelador horizontal. Cuidado, bolhas de ar na água podem interferir no resultado da medida, figura à direita.

**E.3)** Nas figuras a seguir, temos dois exemplos de tubos contendo líquidos imiscíveis (**A** e **B**). Na figura à esquerda, temos um tubo aberto em ambas às extremidades. Já na figura á direita, temos um tubo aberto na extremidade esquerda e pressurizado na extremidade direita com uma pressão de $1.2P_{atm}$. Em ambos os casos, vamos calcular a densidade do líquido $A$ em função do líquido $B$.




Exemplo 1: Considere o tubo aberto à pressão atmosférica em ambas as extremidades. Escreva a densidade do fluido A ($\rho_A$) em função da densidade do fluido B ($\rho_B$), de $h$ e $L$.

*Solução*: Vamos usar o ponto de interface entre os líquidos A e B (*mesmo nível e pontos diretamente conectados por um único fluido*).

Pressão no lado esquerdo $P_{esquerdo} = \rho_A \cdot g \cdot L + P_{atm}$

Pressão no lado direito $P_{direito} = \rho_B \cdot g \cdot (L-h) + P_{atm}$

Igualando as pressões:

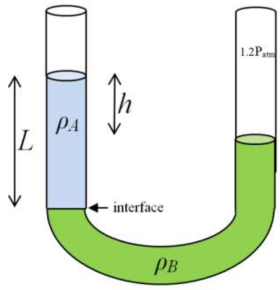
$$\underbrace{\rho_A \cdot g \cdot L + \cancel{P_{atm}}}_{\text{lado esquerdo}} = \underbrace{\rho_B \cdot g \cdot (L-h) + \cancel{P_{atm}}}_{\text{lado direito}}.\ \text{Isolar } \rho_A:$$

$$\boxed{\rho_A = \rho_B \cdot \frac{(L-h)}{L}} \quad ou \quad \boxed{\rho_A = \rho_B \cdot \left(1 - \frac{h}{L}\right)}.$$

Se $h=0$ implica que $\rho_A = \rho_B$.

Se $h=L/2$ implica que $\rho_A = \rho_B/2$.

Observe neste caso, para tubo com dois líquidos de densidades diferentes, não serve como nivelador horizontal, mostrado na Figura 52. É por isso que bolhas de ar interferem no resultado da medida. Pois estas bolhas se comportam como um segundo fluido.




Exemplo 2: Considere o tubo aberto à pressão atmosférica na extremidade esquerda e fechado na extremidade direita com uma pressão residual de $1.2P_{atm}$. Escrever, novamente, a densidade do líquido A ($\rho_A$) em função da densidade do líquido B ($\rho_B$), de $L$ e $h$.

*Solução*: Vamos usar a *interface* entre os líquidos.

Pressão no lado esquerdo $P_{esquerdo} = \rho_A \cdot g \cdot L + P_{atm}$

Pressão no lado direito $P_{direito} = \rho_B \cdot g \cdot (L-h) + 1.2P_{atm}$

Igualando as pressões (*mesmo nível e pontos diretamente conectados*).

$$\underbrace{\rho_A \cdot g \cdot L + P_{atm}}_{\text{lado esquerdo}} = \underbrace{\rho_B \cdot g \cdot (L-h) + 1,2 \cdot P_{atm}}_{\text{lado direito}}.\ \text{Isolar } \rho_A:$$

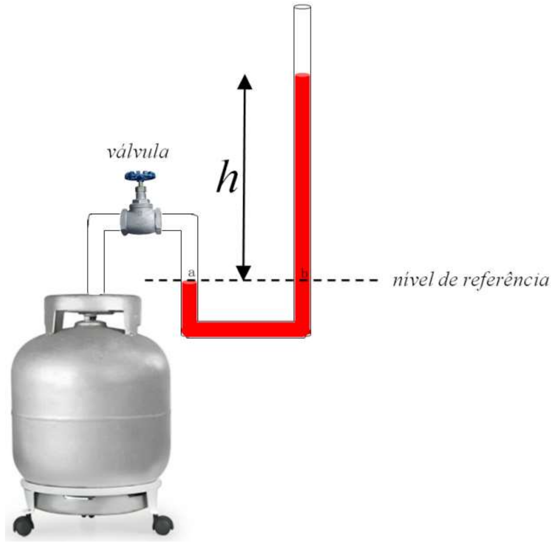
$$\boxed{\rho_A = \rho_B \cdot \frac{(L-h)}{L} + \frac{0,2 \cdot P_{atm}}{L \cdot g}}.$$

Observe que densidade $\rho_A$ é maior que o caso anterior por um montante $+\frac{0,2 \cdot P_{atm}}{L \cdot g}$.

Se $h=0$, implica que $\rho_A = \rho_B + \frac{0,2 \cdot P_{atm}}{L \cdot g}$.

Se $h=L/2$, implica que $\rho_A = \frac{\rho_B}{2} + \frac{0,2 \cdot P_{atm}}{L \cdot g}$.

**E.4)** Na ausência de um manômetro profissional, podemos medir a pressão do gás (butano) dentro de um botijão de cozinha, usando apenas uma mangueira resistente a pressão e qualquer líquido, aqui vamos utilizar mercúrio (em vermelho na figura ao lado) por este ser bem denso (a água também serve). Quando abrimos a válvula, a pressão no interior do botijão irá fazer com que uma coluna $h$ de mercúrio suba. Quando essa altura estabilizar, podemos medir a pressão do gás butano usando as regras de ouro.




Pressão no ponto **a**:

Usando a regra (iii), está é a pressão do gás butano, $P_a = P_{gas}$.

Pressão no ponto **b**:

$P_b = \rho_{hg} \cdot g \cdot h + P_{atm}$ (tubo aberto à atmosfera).

Como os pontos **a** e **b** estão no mesmo nível horizontal (*nível de referência*) e diretamente conectados por um único fluido, o *mercúrio*, podemos igualar essas pressões: $\underbrace{P_{gas}}_{P_a} = \underbrace{\rho_{hg} \cdot g \cdot h + P_{atm}}_{P_b}$ e encontrar a pressão no interior do botijão. Se a altura medida foi de *h=4.4m*, então a pressão do gás vale: $P_{gas} = \rho_{hg} \cdot g \cdot h + P_{atm} \rightarrow$

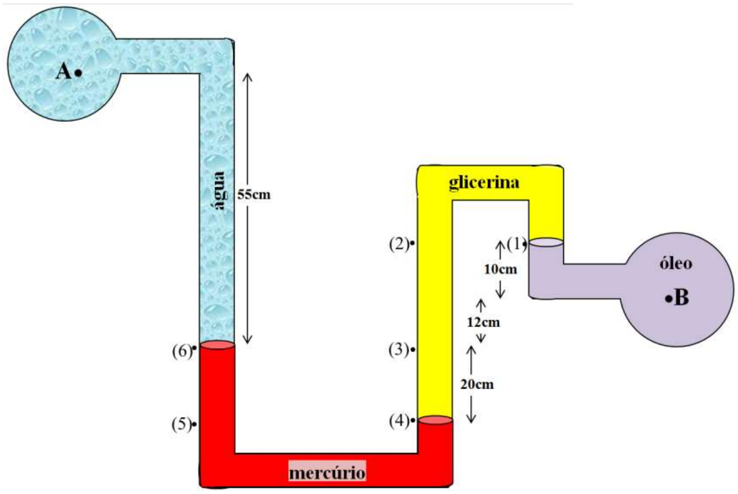
$$= 13600 kg/m^3 \cdot 10 m/s^2 \cdot 4,4 m + 10^5 N/m^2$$

$$\boxed{P_{gas} = 6,98 \cdot 10^5 N/m^2 \sim 7 \cdot P_{atm}}$$

*Essa é a* ***pressão de vapor*** *do gás butano para temperatura ambiente, ~20ºC. O butano líquido vaporiza quando a pressão externa é menor que* $7 \cdot P_{atm}$.

Dentro do botijão, aproximadamente 85% do butano encontra-se no estado líquido e 15% em forma de vapor (gás) na pressão de $7 \cdot P_{atm}$. À medida que o gás vai sendo consumido pelas chamas do fogão, a pressão do gás começa a diminuir e neste instante mais butano líquido passa para vapor (gás) até novamente a pressão do gás atingir $7 \cdot P_{atm}$. Pressão de vapor é a pressão de coexistência de duas fases: líquida e gasosa.

**E.5)** Na figura ao lado, tem-se um manômetro com vários líquidos imiscíveis, são eles: água $\rho$=1000kg/m$^3$, mercúrio $\rho_{Hg}$=13600kg/m$^3$, glicerina $\rho_g$=1260kg/m$^3$ e óleo $\rho_o$=880kg/m$^3$. As alturas das colunas de cada líquido estão ilustradas na figura. Calcule a diferença de pressão entre o ponto **B** e o ponto **A**, ou seja, $\Delta P = P_B - P_A$.




*Solução:*

*Regras que iremos usar:*

*(i) A pressão em um ponto é devido à pressão de tudo que está acima desse ponto.*

*(ii) Para um mesmo nível horizontal (e pontos diretamente conectados por um único fluido) as pressões são iguais.*

Vamos começar pelo ponto **B**. A pressão neste ponto é: $P_B = \rho_o \cdot g \cdot 10cm + P_{(1)}$ (*regra (i)*). Como o ponto **(1)** está no mesmo nível horizontal do ponto **(2)** e estão diretamente conectados pela glicerina, então $P_{(2)} = P_{(1)}$ (*regra (ii)*). Isolando a pressão no ponto **(1)**:

$$P_{(2)} = P_{(1)} = P_B - \rho_o \cdot g \cdot 10cm. \tag{2.11}$$

Agora vamos montar a equação para a pressão no ponto **(4)**: $P_{(4)} = \rho_g \cdot g \cdot (20cm+12cm+10cm) + P_{(2)}$ (*regra (i)*). Como o ponto **(5)** está no mesmo nível horizontal do ponto **(4)** e estão diretamente conectados pelo mercúrio, então podemos igualar essas pressões, ou $P_{(4)} = P_{(5)}$ (*regra (ii)*). Substituindo a pressão $P_{(2)}$ em $P_{(4)}$:

$$P_{(4)} = P_{(5)} = \rho_g \cdot g \cdot (20cm + 12cm + 10cm) + \underbrace{P_B - \rho_o \cdot g \cdot 10cm}_{P_{(2)}} \tag{2.12}$$

Observação: Apesar do ponto **(6)** estar no mesmo nível horizontal do ponto **(3)**, essas pressões **não** são iguais *($P_{(6)} \neq P_{(3)}$)*. Esses pontos não estão diretamente conectados por um único fluido. Veja que, saindo do ponto **(6)** é preciso passar pelo ***mercúrio*** e pela ***glicerina*** para se chegar ao ponto **(3)**.

A equação para a pressão no ponto **(5)** é: $P_{(5)} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot (20cm) + P_{(6)}$ (*regra (i)*). Por último, precisamos conhecer o valor da pressão $P_{(6)}$ que é facilmente montada da forma $P_{(6)} = \rho \cdot g \cdot (55cm) + P_A$ (*regra (i)*). Vamos substituir $P_{(6)}$ em $P_{(5)}$:

$$P_{(5)} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot (20cm) + \underbrace{\rho \cdot g \cdot (55cm) + P_A}_{P_{(6)}} \tag{2.13}$$

Por último, é só igualar a equação (2.12) com a equação (2.13) e depois isolar $P_B - P_A$:

$$\rho_g \cdot g \cdot (20cm + 12cm + 10cm) \; + \; P_B - \rho_o \cdot g \cdot 10cm \;\; = \;\; \rho_{Hg} \cdot g \cdot (20cm) + \rho \cdot g \cdot (55cm) + P_A \, ,$$

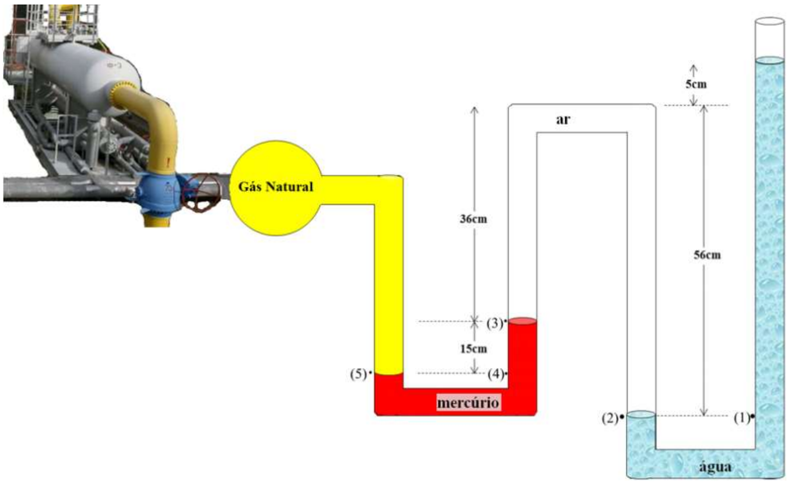
$P_B - P_A \;=\; \rho_{Hg} \cdot g \cdot (20cm) + \rho \cdot g \cdot (55cm) + \rho_o \cdot g \cdot 10cm - \rho_g \cdot g \cdot (20cm + 12cm + 10cm)$. Agora vamos inserir os valores numéricos para as densidades e também vamos trocar as alturas em *cm* por *m,*

$$P_B - P_A = 13600 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,2m + 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,55m + 880 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,1m - 1260 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,42m$$

$\boxed{P_B - P_A = 28288 \frac{N}{m^2}}$. A pressão no ponto (**B**) é maior que a pressão no ponto (**A**) por um montante 28288N/m$^2$.

Este resultado é coerente, pois o ponto (**B**) está em um nível horizontal mais baixo que o ponto (**A**). Neste problema, é impossível determinar $P_B$ ou $P_A$, apenas a sua diferença.

**E.6)** A pressão em uma tubulação de gás natural foi medida acoplando um manômetro, como mostrado na figura ao lado. O manômetro é composto por mercúrio $\rho_{Hg}$=13600kg/m$^3$, ar e água $\rho$=1000kg/m$^3$. Com as alturas em cada fluido, calcule a pressão absoluta na tubulação de gás natural. O tubo no lado direito está aberto à pressão atmosférica.




*Solução:*

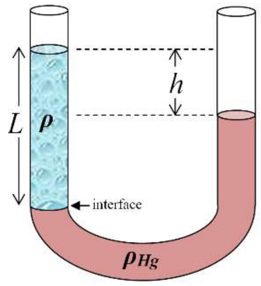
Vamos começar pelo ponto **(1)**. A pressão neste ponto é: $P_{(1)} = \rho \cdot g \cdot (56cm+5cm) + P_{atm}$ (*regra (i)*). Como o ponto **(1)** está no mesmo nível horizontal do ponto **(2)** e estão diretamente conectados pela água, então $P_{(2)} = P_{(1)}$ (*regra (ii)*), que também é igual a pressão exercida pelo gás *ar*. A pressão no interior de um gás não varia com a altura, portanto, a pressão no ponto **(3)** (*regra (iii)*) também é igual a pressão do gás *ar*, que é igual a $P_{(2)}$, logo, $P_{(3)} = P_{(2)} = P_{(1)}$.

Pressão no ponto **(4)**: $P_{(4)} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot (15cm) + P_{(3)}$, (*regra (i)*). Como o ponto **(4)** está no mesmo nível horizontal do ponto **(5)** e estão diretamente conectados por um único fluido (o mercúrio), então $P_{(4)} = P_{(5)}$ (*regra (ii)*). A pressão $P_{(5)}$ é a pressão do gás natural, ou seja, $P_{(5)} = P_{(4)} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot (15cm) + \underbrace{\rho \cdot g \cdot (56cm + 5cm) + P_{atm}}_{P_{(1)} = P_{(2)} = P_{(3)}}$. Agora vamos substituir os valores numéricos das densidades e vamos trocar as alturas em *cm* por *m:*

$$P_{(5)} = 13600 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,15m + 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,61m + 10^5 \frac{N}{m^2} = \boxed{126500 \frac{N}{m^2}}.$$

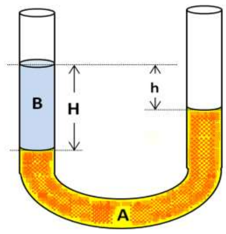
## Exercícios

**1)** Um tubo em forma de U (mesmo diâmetro) está aberto em ambas às extremidades e já contém uma porção de mercúrio no seu interior. Uma quantidade de água é cuidadosamente derramada na extremidade esquerda do tubo até que a coluna de água seja igual a $L=20.0cm$ (a água não se mistura com o mercúrio).



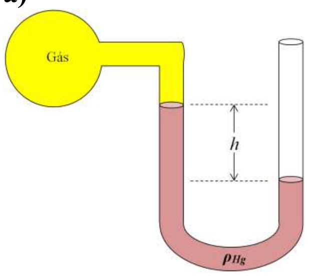

a) Qual é a pressão manométrica na interface água-mercúrio?
b) Calcule a altura vertical $h$ entre o topo da superfície do mercúrio do lado direito e o topo da superfície da água do lado esquerdo.

**2)** Dois líquidos imiscíveis **A** e **B** (que não se misturam), de densidade $\boldsymbol{\rho_A}$=6g/cm$^3$ e $\boldsymbol{\rho_B}$, respectivamente, estão em equilíbrio hidrostático em um tubo em forma de U, aberto em ambas as extremidades (<u>ver figura ao lado</u>). Dado $\boldsymbol{H}=30cm$ e $\boldsymbol{h}=10cm$, determine a densidade $\boldsymbol{\rho_B}$.

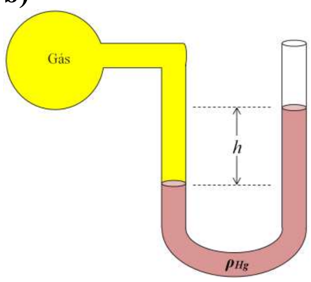



**3)** Para o sistema em equilíbrio, aberto à pressão atmosférica no lado direito (ver figuras ao lado), calcule a pressão do gás, no item **a** e **b**, dado que $h=25cm$ em ambos os casos e a substância em vermelho é mercúrio ($Hg$) líquido $\rho_{Hg}=13600kg/m^3$.

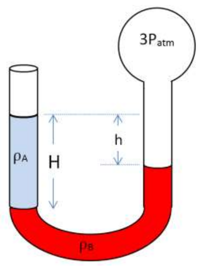
**a)**



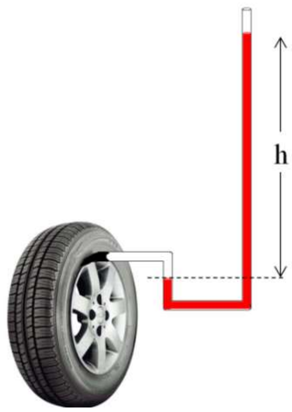

**b)**




**4)** Para o sistema em equilíbrio, aberto na extremidade esquerda e na extremidade direita contém um gás pressurizado à pressão de $3P_{atm}$ (ver figura ao lado), calcule a densidade do liquido **A**, dado que $\rho_B=2000kg/m^3$, $\boldsymbol{h=2m}$ e $\boldsymbol{H=3m}$.




**5)** Um manômetro de tubo aberto foi conectado na válvula de um pneu para medir a pressão no seu interior (ver figura ao lado). Sabendo que a pressão no interior do pneu é de $32psi$, calcule:



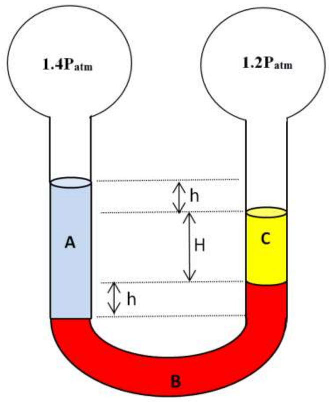

a) A altura $h$ de coluna de mercúrio (em vermelho) se o tubo estiver aberto à pressão atmosférica.

b) A nova altura $h$ de coluna de mercúrio, caso a pressão na parte superior do tubo seja vácuo (tubo fechado).

c) Se ao invés de mercúrio, fosse utilizada água, calcule novamente as alturas para o tubo aberto (do item a) e fechado (do item b).

Dados: $1P_{atm}=14,7psi$, $\rho_{Hg}=13600kg/m^3$ e $P_{atm}=10^5N/m^2$.

**6)** Três líquidos imiscíveis **A**, **B** e **C** (que não se misturam), de densidades $\rho_A$=2g/cm$^3$, $\rho_B$=13,6g/cm$^3$ e $\rho_C$=1g/cm$^3$, respectivamente, estão em equilíbrio hidrostático em um tubo em forma de U, pressurizado em ambas as extremidades (ver figura ao lado). Calcule **h,** sabendo que **H**=40cm.




**Respostas:**

1) a) 2000N/m$^2$; b) 18,5cm
2) $\rho_B$=4000 kg/m$^3$
3) *a)66000N/m$^2$; b) 134000N/m$^2$*
4) $\rho_A$=7333,3 kg/m$^3$
5) a) 0,87m , b) 1,6m
6) h=25cm

## Princípio de Pascal (prensa hidráulica)

A partir da equação (2.6) ($P_2 = P_1 + \rho \cdot h \cdot g$), aplicando uma variação em ambos os lados da igualdade, temos $\Delta P_2 = \Delta P_1 + \Delta\rho \cdot h \cdot g$. Como o fluido ideal é incompressível, então *Δρ=0* e ficamos com $\Delta P_2 = \Delta P_1$. Ou seja, uma variação de pressão no ponto 2 corresponde a mesma variação de pressão no ponto 1 $(\Delta P_2 = \Delta P_1)$. Na Figura 53.(a), temos a situação inicial, com dois pontos de análise: nível (1) corresponde e pressão $P_1$ e nível (2), associada a pressão $P_2$. Em (b), uma pressão adicional $P_o$ é aplicada sobre o fluido. Veja que essa pressão adicional é transmitida a todos os pontos do fluido em qualquer profundidade *h*. A partir dessa figura, calculando a variação de pressão no ponto 1 e 2, temos $\Delta P_1 = \underbrace{(P_o + P_1)}_{final} - \underbrace{P_1}_{inicial} = P_o$. E a variação de pressão no ponto 2 é: $\Delta P_2 = \underbrace{(P_o + P_2)}_{final} - \underbrace{P_2}_{inicial} = P_o$, ou seja, a pressão adicional $P_o$ foi transmitida integralmente aos pontos 1 e 2 ou qualquer ponto que você escolha, pois o resultado independe da altura *h*.

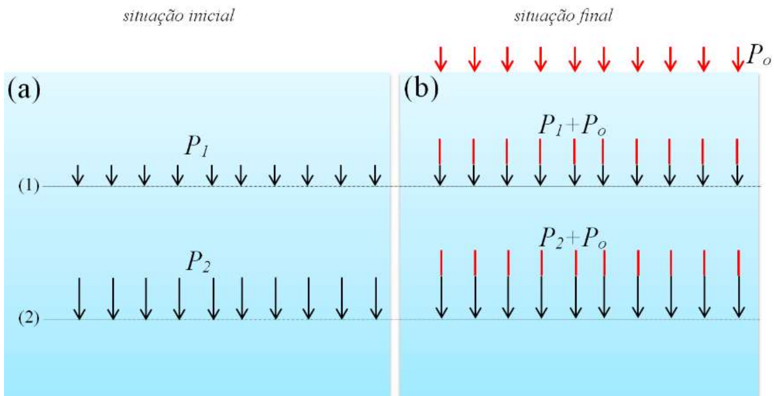



Figura 53 – Em (a) temos a situação inicial. Já na figura (b), uma pressão adicional $P_o$ é aplicada. Essa pressão é transmitida integralmente a todos os pontos do líquido e também para as paredes do recipiente em que esse líquido está contido.

Umas das grandes aplicações do principio de Pascal é a construção da prensa hidráulica, pois sabendo que a pressão adicional é transmitida integralmente. Essa pressão adicional pode ser um automóvel para ser levantado, pode ser um caminhão, e assim por diante. O fato mais impressionante é que podemos sustentar o peso de um caminhão com o peso de *1kg* de massa, por exemplo, apenas variando as áreas de cada pistão. Se for aplicada uma força ***f*** na área ***a*** do pistão esquerdo da prensa, o nível do lado direito ira subir. Para equilibrar a pressão exercida pela força ***f***, colocamos um objeto pesado, ***F***, no lado direito do pistão de área ***A*** (ver Figura 54). Para o mesmo nível, essas pressões são iguais, portanto $P=\frac{f}{a}+P_{atm}$ (pressão no lado esquerdo) é igual a pressão exercida no lado direito, ou seja, $P=\frac{F}{A}+P_{atm}$. Igualando as pressões,

$$\frac{f}{a}+\cancel{P_{atm}}=\frac{F}{A}+\cancel{P_{atm}} \Rightarrow \boxed{\frac{f}{a}=\frac{F}{A}} \text{ ou } \boxed{f=\frac{a}{A}F}. \tag{2.14}$$

Observe que podemos fazer ***f*** tão pequena quanto queiramos, basta apenas fazer pequena a área ***a*** do pistão menor ou aumentar a área ***A*** do pistão maior.

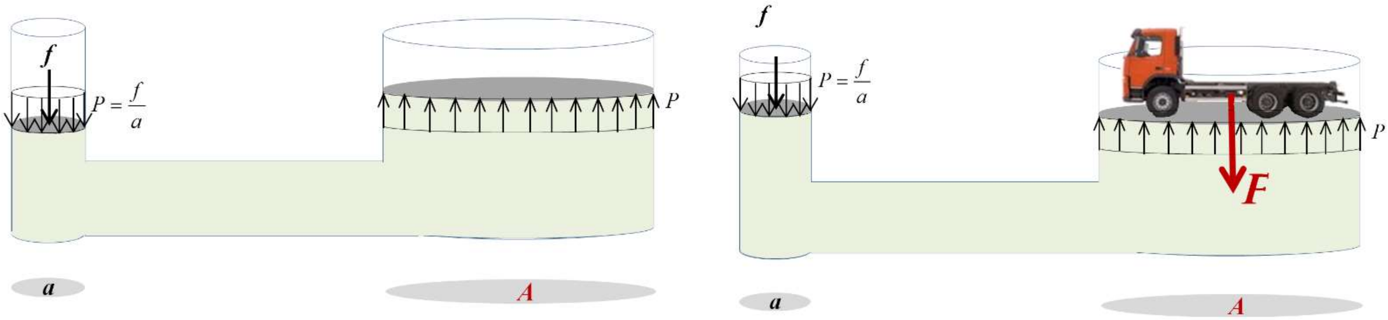



Figura 54- Prensa hidráulica é muito utilizada para sustentar grandes massas (até mesmo um caminhão) com uma pequena força ***f***. A pressão que é transmitida para o pistão no lado direto, produzida pela força ***f***, deve ser equilibrada pelo peso no pistão no lado direito, produzido pela força grande ***F***, que deve ser igual ao peso do caminhão.

## Prensa hidráulica em níveis diferentes (*opcional)

A Pressão no lado esquerdo, no nível de aplicação da força *f*, deve ser $P_{esquerdo}=\frac{f}{a}+P_{atm}$ e pressão no lado direito deve ser $P_{direito}=\frac{F}{A}+\rho\cdot g\cdot h+P_{atm}$, (Figura 55). Para o fluido em repouso, essas pressões devem ser iguais, ou seja, $\frac{f}{a}+\cancel{P_{atm}}=\frac{F}{A}+\rho\cdot g\cdot h+\cancel{P_{atm}} \Rightarrow f=\left(\frac{F}{A}+\rho\cdot g\cdot h\right)\cdot a$. Agora a força ***f*** necessária para sustentar o caminhão de peso $P_g=F$ aumenta por um montante $\rho\cdot g\cdot h\cdot a$. Dado que no lado esquerdo da prensa desceu *h*, podemos calcular quanto que subiu no lado direito da prensa, usando a conservação da massa, pois a massa de líquido que desceu (lado esquerdo ***e***) deve ser igual a massa do líquido que subiu (lado direito ***d***) , ou seja, $m_e=m_d \Rightarrow \cancel{\rho}\cdot\Delta V_e=\cancel{\rho}\cdot\Delta V_d$, $a\cdot h=A\cdot h_d \Rightarrow h_d=\frac{a}{A}\cdot h$. A altura no lado direito $h_d$ será tão pequena quanto maior for a área maior da prensa ***A*** ou menor for a área pequena ***a***.

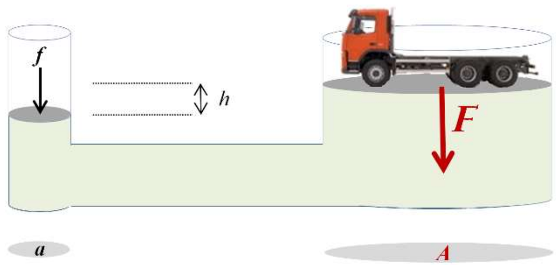



Figura 55 – Prensa hidráulica em níveis diferentes.

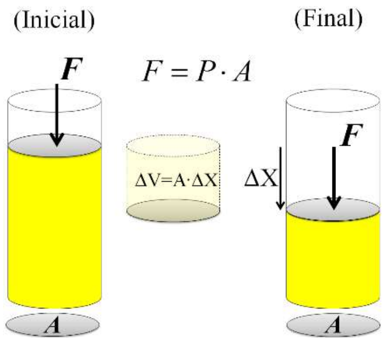
## Exercícios

**1)** Um pistão cilíndrico de um elevador hidráulico de carros possui o diâmetro maior igual a *0,4m*.
a) Qual é a pressão necessária para sustentar um carro de massa igual a *1300kg*? Expresse sua resposta também em pressão atmosférica.
b) Se o diâmetro do pistão menor é de *5,0cm*, qual é a força que deve ser aplicada neste pistão?

**2)** Uma prensa de área menor ***a*** e área maior ***A=50a***, é usada para equilibrar o peso de um pequeno caminhão de massa 7000kg sobre a área maior.
a) Calcule a pressão exercida pelo caminhão, dado que ***a***$=50cm^2$.
b) O valor da menor forca ***f*** que deve ser aplicada para equilibrar a prensa devido ao peso do caminhão.

## Trabalho realizado por uma força externa F

Podemos calcular o trabalho realizado por uma força externa ***F*** para realizar um deslocamento ΔX na prensa. A definição de trabalho é $W = F \cdot \Delta X$. A definição de pressão é $\mathrm{P} = \dfrac{F}{A}$, cuja força é $F = P \cdot A$. Substituindo esta na definição de trabalho, ficamos com: $W = \overbrace{P \cdot A}^{F} \cdot \Delta X = P \cdot \Delta V$, pois $A \cdot \Delta X = \Delta V$, ou




$$\boxed{W = P \cdot \Delta V}. \tag{2.15}$$

A equação (2.15) fornece o trabalho realizado pela força externa ***F*** que é igual à pressão ***P*** (força distribuída ao longo da área ***A***) vezes a variação de volume *ΔV*. Novamente, a equação (2.15) só é válida quando a força é constante ao longo do deslocamento, é análogo a pressão ***P*** ser constante ao longo da variação do volume ***ΔV***. Quando a pressão variar, iremos usar o cálculo integral. Vamos aplicar essa mesma equação para gases ideais, lá vamos usar $dW = P \cdot dV$ (notação infinitesimal) e $W = \int P \cdot dV$ (notação integral).

## Princípio de Arquimedes (lei do Empuxo)

Para um corpo ***c*** de densidade $\rho_c$ imerso em um líquido de densidade $\rho$, vamos calcular a força devido somente a diferença de pressão entre a parte *inferior* e *superior* do corpo. Vamos chamar essa diferença de: $E = \Delta F = F_2 - F_1 = P_2 \cdot A - P_1 \cdot A = \left(P_2 - P_1\right) \cdot A$. A partir da equação (2.6), temos que $\left(P_2 - P_1\right) = \rho \cdot g \cdot h$. Substituindo em *E*, ficamos com: $E = \rho \cdot g \cdot \underbrace{h \cdot A}_{V} = \underbrace{\rho \cdot V}_{m} \cdot g \overset{ou}{=} m \cdot g$ (peso do líquido $\rho$ deslocado pelo volume *submerso* do corpo $V_{sub}$). A essa diferença de força, damos o nome de Empuxo. Portanto

$$\boxed{E = \rho \cdot V_{sub} \cdot g \qquad (N)} \quad \text{(Força de Empuxo)}$$

$\rho =$ densidade do líquido $(kg/m^3)$

$\mathrm{V}_{sub}$=volume submerso do corpo $(m^3)$ (2.16)

g=aceleração da gravidade (g=10$m/s^2$)

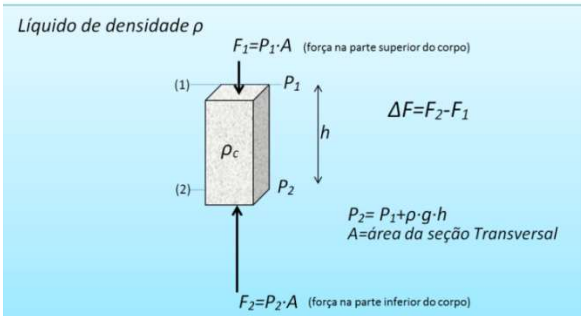



Figura 56 – Força de empuxo $E$ é devido a *diferença de pressão (vezes área)* entre a parte inferior e superior de um corpo submerso em um líquido. A força de empuxo sempre aponta para cima.

Definição de empuxo: "*Todo corpo parcialmente ou completamente submerso em um fluido, estará sujeito a uma força de empuxo, atuando de baixo para cima, cujo módulo é numericamente igual ao peso do volume de fluido que foi deslocado pelo volume do corpo submerso*".

Da equação (2.16), o volume submerso coincide com o volume total do corpo somente quando este estiver completamente submerso no líquido. Quando o corpo estiver parcialmente submerso, apenas o volume submerso do corpo é que irá contribuir para a força de empuxo $E$. Observe que a força de Empuxo ( $E = \rho \cdot V_{sub} \cdot g$ ) não depende da densidade do corpo $\rho_c$ e nem da profundidade $h$. Na Figura 57, temos três situações, com corpos de mesmo volume total, e densidades diferentes. O volume total $V$ do corpo é a soma do volume submerso ($V_{sub}$) com o volume exposto ($V_{exp}$) que fica acima da superfície livre do líquido ($V = V_{exp} + V_{sub}$). A condição de equilíbrio ocorre quando o a força de empuxo coincide com o peso do corpo.

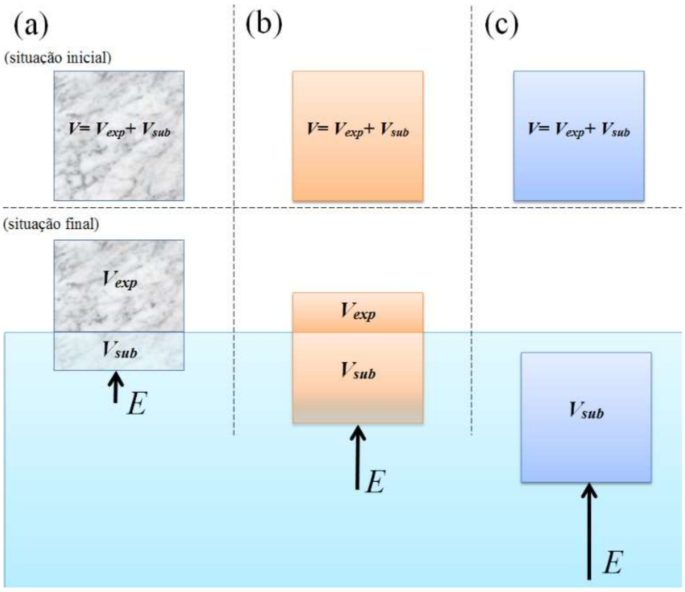
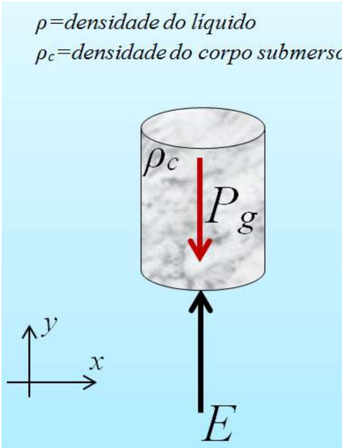



Figura 57 – Apenas o volume submerso contribui para a força de empuxo $E$. Para a figura (a), o volume submerso é menor que o caso (b) e (c), portanto essa força de empuxo é a menor de todas. A maior força de empuxo ocorre na situação (c), pois o volume submerso é o maior de todos. A força de empuxo não depende da densidade $\boldsymbol{\rho_c}$ do corpo submerso. Mas sim, da densidade do fluido $\rho$.

## Condição para flutuabilidade

Para analisarmos a flutuabilidade de um corpo completamente submerso em um fluido, vamos fazer o balanço de forças (fazer o *D.C.L. ver figura ao lado)* e aplicar a segunda lei de Newton para a direção *y* e calcular a aceleração nesta direção;

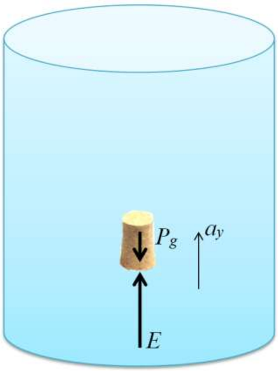



$$+\uparrow\sum F_y = E - P_g = m\cdot a_y \Rightarrow \underbrace{\rho\cdot V\cdot g}_{E} - \underbrace{\rho_c\cdot V\cdot g}_{P_g} = \underbrace{\rho_c\cdot V}_{m}\cdot a_y \quad\Rightarrow\quad a_y = g\left(\frac{\rho-\rho_c}{\rho_c}\right)$$

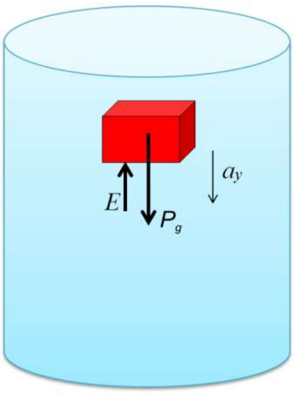
$$\boxed{a_y = g\left(\frac{\rho}{\rho_c}-1\right)}.$$

Esta é a aceleração que um corpo submerso estará sujeito devido ao empuxo e ao seu próprio peso (aqui estamos desprezando a resistência do fluido). Com essa aceleração, vamos analisar três casos:

- ***1º Caso***: Aceleração Positiva $a_y = g\left(\frac{\rho}{\rho_c}-1\right) > 0$. Quando a aceleração for positiva, o corpo estará acelerado para cima. Essa situação ocorre quando $\left(\frac{\rho}{\rho_c}-1\right) > 0 \overset{ou}{\Rightarrow} \frac{\rho}{\rho_c} > 1 \Rightarrow \boxed{\rho_c < \rho}$. Isso significa que um corpo irá acelerar para cima sempre que esse corpo for menos denso que o líquido no qual está submerso. É por isso que quando você coloca um pedaço de cortiça no fundo de um vaso contendo água, essa cortiça sobe acelerada para a superfície. Isso ocorre porque a cortiça é menos densa $(\rho_{cortiça} = 320 kg/m^3)$ que a água $(\rho = 1000 kg/m^3)$, ou seja, a força peso da cortiça $P_g$ é menor que a força de empuxo $E$. Quando você joga óleo de soja $(\rho_{oleo\ soja} = 930 kg/m^3)$ sobre a água, observe que o óleo fica boiando sobre a água líquida $(\rho = 1000 kg/m^3)$. O óleo é menos denso que a água e não se misturam. Até mesmo o gelo $(\rho_{gelo} = 920 kg/m^3)$ boia sobre água, porque o gelo é menos denso que a água líquida $(\rho = 1000 kg/m^3)$. Quando o corpo sobe e fica em equilíbrio na superfície do líquido, a fração do volume submerso do corpo pode ser obtida impondo a condição de equilíbrio, ou seja, que o empuxo é igual ao peso do corpo, ou: $\underbrace{\rho\cdot V_{sub}\cdot g}_{E} = \underbrace{\rho_c\cdot V\cdot g}_{P_g} \Rightarrow \frac{V_{sub}}{V} = \frac{\rho_c}{\rho}$.

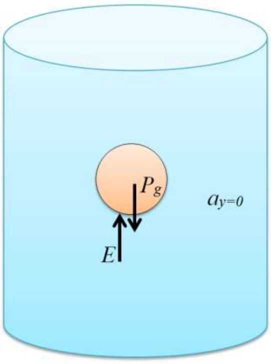



- ***2º Caso***: Aceleração Negativa $a_y = g\left(\frac{\rho}{\rho_c}-1\right) < 0$. Quando a aceleração for negativa, o corpo estará acelerado para baixo. Essa situação ocorre quando $\left(\frac{\rho}{\rho_c}-1\right) < 0 \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_c} < 1 \Rightarrow \boxed{\rho_c > \rho}$. Um corpo irá acelerar para baixo (irá desce até o fundo) sempre que esse corpo for mais denso que o líquido no qual está submerso. É por isso que quando você solta um pedaço de ferro sobre a superfície de um vaso contendo água, esse pedaço de ferro desce acelerado para o fundo do vaso, pois o ferro $(\rho_{ferro} = 7860 kg/m^3)$ é mais denso que a água $(\rho = 1000 kg/m^3)$. O peso do ferro $P_g$ é maior que a força de empuxo $E$. Até mesmo quando a gente entra em uma piscina, nossa densidade é em média



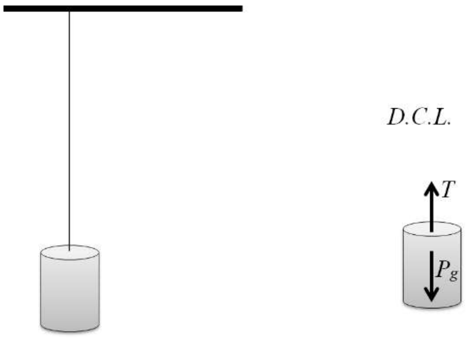
($\rho_{humano} = 1080 kg/m^3$), afundamos porque nossa densidade é ligeiramente maior que a da água.

- ***3º Caso***: <u>Aceleração Nula</u> $a_y = g\left(\dfrac{\rho}{\rho_c} - 1\right) = 0$. Para aceleração nula, devemos ter $\boxed{\rho_c = \rho}$, a densidades do corpo e a do líquido são iguais. Agora, a força Peso é igual a força de empuxo. Neste caso, o corpo fica onde você deixar. Para esse caso, o corpo deve estar <u>completamente submerso</u> no fluido.




## Peso Aparente

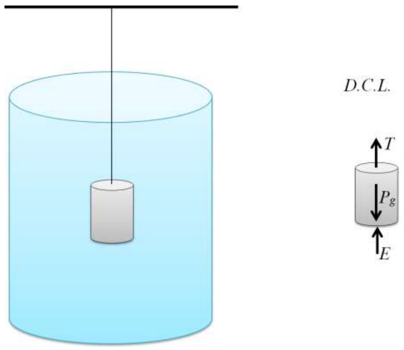
Já sabemos que quando mergulhamos um corpo sob um líquido, irá haver uma força de empuxo atuando de baixo para cima que irá subtrair o peso real do corpo submerso. Chamamos esse peso reduzido de '*peso aparente*'. Quando penduramos um corpo por um cabo, a tensão no cabo é igual ao peso do corpo pendurado. Quando penduramos um corpo completamente submerso em um líquido, a tensão no cabo, que é o peso aparente, não mais vai coincidir com o peso real do corpo (ver figura abaixo à direita).




1ªLei Newton: $+\uparrow \sum F_y = -P_g + T = 0$, isolando T:

$$\underbrace{T}_{\text{Peso Aparente}} = \underbrace{P_g}_{\text{Peso real}}$$

Quando não existe fluido, a tensão no cabo (peso aparente) coincide com o peso real do corpo ($P_g = m \cdot g$).




1ªLei Newton: $+\uparrow \sum F_y = E - P_g + T = 0$, isolando T:

$$\underbrace{T}_{\text{Peso Aparente}} = \underbrace{P_g}_{\text{Peso real}} - \underbrace{E}_{\text{Empuxo}}$$

Quando o corpo é colocado imerso em um líquido, o peso aparente (tensão no cabo) é o peso real menos o empuxo.

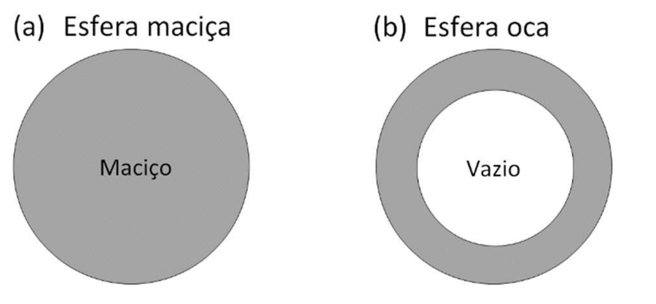
O peso aparente de um corpo imerso em um fluido é dado por

$$\boxed{\underbrace{P_{ap}}_{\text{Peso Aparente}} = \underbrace{P_g}_{\text{Peso real}} - \underbrace{E}_{\text{Empuxo}}} \quad \text{(Peso Aparente)} \qquad (2.17)$$

onde $\boldsymbol{P_g} = m \cdot g$ é o peso real do corpo e $\boldsymbol{E}$ é o empuxo ($E = \rho \cdot V_{sub} \cdot g$). Se um corpo flutua sobre um fluido, é porque seu peso aparente é igual a zero $P_{ap} = 0\ N$ ou $P_g = E$ (o peso real é igual ao empuxo). Quando entramos em uma piscina sentimos a sensação de menor peso, pois a força de empuxo atua a reduzir o nosso peso. A força de empuxo pode reduzir até zero o peso aparente, para isso basta que o empuxo seja igual ao peso real. Nesta situação, estaríamos flutuando ou boiando. A densidade do corpo humano é um pouco superior a da água doce e quando entramos na água afundamos. Mas, podemos reduzir nossa densidade $\left( \rho_{pessoa} = \frac{m_{pessoa}}{V_{pessoa}} \right)$ $\left( m_{pessoa} = \rho_{pessoa} \cdot V_{pessoa} \right)$ até a densidade da água, aumentando o nosso volume com algo adicional $V_{adicional}$. A nova densidade fica: $\left( \rho_{nova} = \frac{m_{pessoa}}{V_{pessoa} + V_{adicional}} \right)$. Para tal, usamos alguns materiais leves, como flutuadores ou bolas infláveis. Esses materiais irão contribuir para aumentar o nosso volume e reduzir a nossa densidade até o valor da densidade da água. Esse volume adicional, você pode mostrar que é igual a: $V_{adicional} = m_{pessoa} \cdot \left( \frac{1}{\rho_{nova}} - \frac{1}{\rho_{pessoa}} \right)$, onde $m_{pessoa}$ é a massa da pessoa, $\rho_{pessoa}$ é a densidade do ser humano (que é em torno de $1080kg/m^3$) e $\rho_{nova}$ é a nova densidade que deve ser igual a do líquido no qual iremos flutuar. Para uma pessoa de até $100kg$, o volume adicional $V_{adicional}$ para essa pessoa flutuar em água doce é: $V_{adicional} = 100kg \cdot \left( \frac{1}{1000kg/m^3} - \frac{1}{1080kg/m^3} \right) = 7,41 \cdot 10^{-3} m^3$, que corresponde a uma bola inflável de raio $R = \left( \frac{3 \cdot V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{3 \cdot 7,41 \cdot 10^{-3} m^3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = \boxed{0,12m = 12cm}$ (aqui desprezamos a massa da bola). Uma pessoa de até $100kg$ pode flutuar em água doce com uma bola inflável totalmente submersa de $12cm$ de raio ou $24cm$ de diâmetro ($D=2 \cdot R$). Este caso corresponde a um peso aparente zero. Agora vamos calcular o volume adicional considerando que a pessoa vai flutuar em água salgada. O volume adicional é: $V_{adicional} = 100kg \cdot \left( \frac{1}{1020kg/m^3} - \frac{1}{1080kg/m^3} \right) = 5,45 \cdot 10^{-3} m^3$, que é menor que o volume adicional para água doce. Isso é devido ao fato que a densidade da água salgada é maior que o da água doce. Como a força de empuxo é constante (igual ao peso da pessoa), se a densidade aumenta, o volume deve diminuir (o empuxo é proporcional à densidade do líquido e ao volume submerso: $E = \rho \cdot V_{sub} \cdot g$). Nesse último caso, o raio da bola inflável deve ser $0,11m$ ou $11cm$.

Nos exemplos anteriores, estudamos materiais maciços, ou seja, compactos. No entanto, alguns materias são ocos por dentro. São esses materias ocos, que mesmo tendo uma densidade maior que a água, por exemplo, conseguem flutuar nesta. É o caso do navio e do submarino (ver exemplos **E.2** e **E.3**) que seus cascos são construídos de ferro, entre outros casos.

**E.1)** Uma esfera de ferro ($\rho_{ferro}=7860kg/m^3$) com massa $m=10kg$ flutua em água com 60% do seu volume submerso. Calcule o volume do espaço vazio no interior da esfera (ver figuras ao lado).
Solução: Se você colocar uma esfera *maciça* de ferro sobre a água, essa esfera irá afundar. Como esta está flutuando, é porque ela é oca, possui vazios no seu interior. O volume que a massa de ferro ocupa é: $V_{massa} = \frac{m}{\rho_{ferro}} = \frac{10kg}{7860kg/m^3} = 1,27 \cdot 10^{-3} m^3$ (este não é o volume externo da esfera).
Agora vamos calcular o volume externo da esfera oca. Sabendo que a esfera está flutuando, então $\frac{V_{submerso}}{V_{externo}} = \frac{\rho_{esfera}}{\rho} = 0,6$ (ρ é a densidade da água = 1000kg/m$^3$). Com esta equação, podemos determinar a densidade da esfera oca, $\rho_{esfera} = \rho \cdot 0,6 = 600kg/m^3$. Note que a densidade do ferro é




$V_{externo} = \frac{m}{\rho_{esfera}} = \frac{10kg}{600kg/m^3} = 1,67 \cdot 10^{-2} m^3$. Veja na figura acima à direita, da esfera oca, que $V_{externo} = V_{massa} + V_{vazio}$. Com isso, $V_{vazio} = V_{externo} - V_{massa} = 1,67 \cdot 10^{-2} m^3 - 1,27 \cdot 10^{-3} m^3 = \boxed{1,54 \cdot 10^{-2} m^3}$. A porcentagem de volume vazio é: $\frac{V_{vazio}}{V_{externo}} = \frac{1,54 \cdot 10^{-2} m^3}{1,67 \cdot 10^{-2} m^3} = 0,92(92\%)$. Temos que 92% do volume externo da esfera é composto por vazio. E

$\rho_{ferro}=7860kg/m^3$ e a densidade da esfera, que é feita de ferro, é $\rho_{esfera} = 600kg/m^3$. Com essa densidade, podemos calcular o volume externo da esfera oca → apenas $\frac{V_{massa}}{V_{externo}} = \frac{1{,}27\cdot 10^{-3}m^3}{1{,}67\cdot 10^{-2}m^3} = 0{,}08(8\%)$ do volume total da esfera é composto por ferro. Isso explica, além do empuxo, porque os navios (ver Figura 58), submarinos, entre outros, flutuam sobre a água.

**E.2)** Um dos maiores navio de passeio do mundo possui: massa total carregado=220000toneladas; comprimento=360m; largura=47m; altura=65m(acima da linha d'água); motores=4 elétricos de 18MW (24480cv cada); velocidade máxima=40km/h. Agora, calcule a altura abaixo da linha d'água ($h_{sub}$), considerando a área da base do navio constante ao longo da altura (considere o navio como sendo uma *caixa*) e $\rho=1020kg/m^3$ (água salgada). Essa altura submersa é chamada de *Calado* do navio.

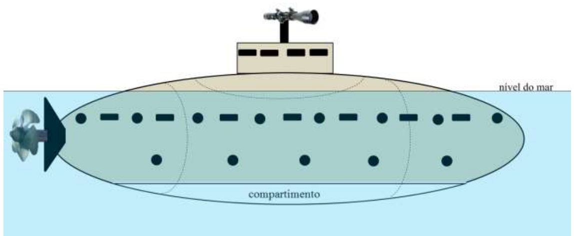

Figura 58 – O navio flutua sobre a água devido o seu peso aparente ser igual a zero. Isso ocorre quando o peso do volume ($V_{sub}$) de água deslocada coincide com o peso do navio (ou quando a força de empuxo é igual ao peso real do navio, $P_{navio}=m_{navio}\cdot g$). Na figura à direita, tem-se o modelo de cálculo do navio, juntamente com as forças externas atuantes.

Solução: Fazendo o *balanço de forças:* $+\uparrow\sum F_y = 0 \Rightarrow E - P_{navio} = 0 \Rightarrow E = P_{navio} \Rightarrow \rho\cdot V_{sub}\cdot \cancel{g} = m_{navio}\cdot \cancel{g}$

$$V_{sub} = \frac{m_{navio}}{\rho} = \frac{220000000kg}{1020kg/m^3} = 215\ 686{,}3m^3 \ \Rightarrow\ V_{sub} = h_{sub}\cdot A_{base} \Rightarrow h_{sub} = \frac{V_{sub}}{A_{base}} = \frac{215\ 686.3m^3}{360m\cdot 47m} = \boxed{12{,}75m}$$

**E.3)** Considere um submarino *s* de massa total $m_s = 7{,}6\cdot 10^6 kg$ (*7.6 mil ton*) e volume externo $V_s = 8\cdot 10^3 m^3$.

**a)** Calcule a densidade do submarino e verifique se este está boiando em água salgada. Caso sim, calcule a fração de volume submerso desse submarino.



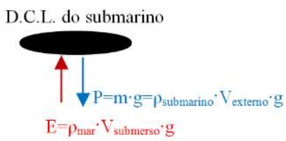

*Solução:*

$$\rho_{submarino} = \frac{m_{submarino}}{V_{externo}} \Rightarrow \rho_{submarino} = \frac{7.6\cdot 10^6 kg}{8\cdot 10^3 m^3} = 950kg/m^3$$

(boiando, pois $\rho_{submarino} = 950kg/m^3 < \rho_{mar} = 1020kg/m^3$)

Fração de volume submerso:

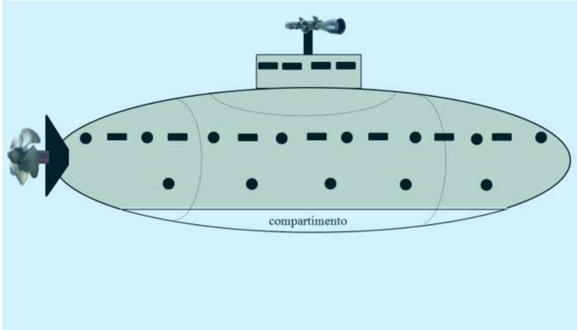
$$+\uparrow\sum F_y = 0 \Rightarrow E - P = 0 \Rightarrow E = P \Rightarrow$$




$$\frac{V_{submerso}}{V_{externo}} = \frac{\rho_{submarino}}{\rho_{mar}} = \frac{950kg/m^3}{1020kg/m^3} = 0{,}93$$

93% do volume total do submarino se encontra submerso no mar e 7% está localizado na parte externa (acima do nível do mar)

**b)** No interior do submarino existe um **compartimento** (ver figura ao lado) de volume $V_c = 1.3 \cdot 10^3 m^3$ destinado a variar a densidade do submarino e controlar a sua flutuabilidade. Calcule a nova densidade do submarino quando esse compartimento interno está cheio de água salgada. Neste caso, o submarino ainda está boiando?




*Solução:*

$$\rho_{submarino} = \frac{m_{submarino} + m_{agua\_compartimento}}{V_{externo}} = \frac{m_{submarino} + \rho_{mar} \cdot V_c}{V_{externo}}$$

$$\rho_{submarino} = \frac{7,6 \cdot 10^6 kg + \left(1020 kg/m^3 \cdot 1,3 \cdot 10^3 m^3\right)}{8 \cdot 10^3 m^3} = 1115,75 kg/m^3$$

Agora o submarino está descendo acelerado para o fundo do mar, pois sua densidade é maior que a densidade da água salgada.

c) Com o compartimento interno vazio, calcule o volume de água salgada que deve ser colocada nesse compartimento interno para que a densidade do submarino seja igual a da água salgada.

*Solução:*

$$\rho_{submarino} = \rho_{mar} = \frac{m_{submarino} + m_{agua\_compartimento}}{V_{externo}} \qquad (\text{isolar } m_{agua\_compartimento})$$

$$\rho_{mar} \cdot V_{externo} = m_{submarino} + m_{agua\_compartimento}$$

$$m_{agua\_compartimento} = \rho_{mar} \cdot V_{externo} - m_{submarino}$$

$m_{agua\_compartimento} = 1020 kg/m^3 \cdot 8 \cdot 10^3 m^3 - 7,6 \cdot 10^6 kg = 5,6 \cdot 10^5 kg$ (com essa massa, vamos calcular o volume que esta ocupa)

$$\rho_{compartimento} = \rho_{mar} = \frac{m_{agua\_compartimento}}{V_{agua\_compartimento}} \Rightarrow V_{agua\_compartimento} = \frac{m_{agua\_compartimento}}{\rho_{mar}} = \frac{5,6 \cdot 10^5 kg}{1020 kg/m^3} = \boxed{549 m^3}$$

Agora o submarino pode se locomover na horizontal (mesmo no fundo do mar), com aceleração nula na vertical. Observe que $549m^3$ representa apenas 42,2% (*$549m^3/1300m^3=0,422$*) do volume total do compartimento interno do submarino que é de $1300m^3$. Quando o submarino precisar subir para a superfície, ele bombeia essa água do compartimento interno para o meio externo (que é o mar). É dessa forma que o submarino controla a sua flutuabilidade, variando a sua densidade através da sua massa, pois o seu volume externo é fixo. A profundidade máxima que o submarino pode descer vai depender da resistência do metal do casco desse submarino.

**E.4)** força de empuxo também se aplica para o ar, pois o balão flutua devido ao empuxo ocasionado pelo volume de ar deslocado pelo volume do balão. É por isso que há necessidade de aquecer o ar no interior do balão para este ar ficar menos denso (*mais leve*) que o ar externo. Para o balão subir, devemos ter a força de empuxo maior que o peso do *balão* (que inclui lona, cesto e passageiros) mais o peso do ar aquecido contido no interior do balão.

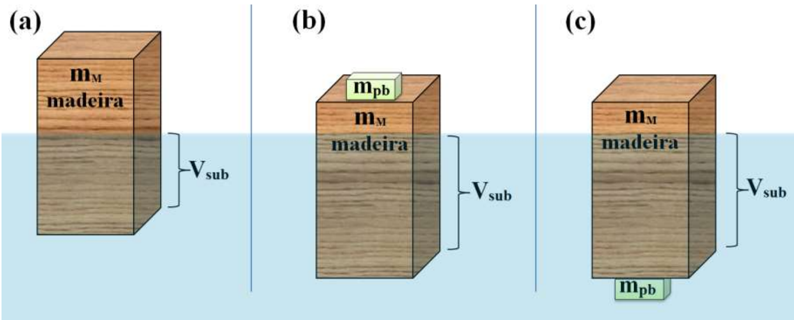
$$+\uparrow \sum F_y \geq 0 \Rightarrow E - P_{balão} - P_{aquecido} \geq 0, \Rightarrow E \geq P_{balão} + P_{aquecido} \quad \Rightarrow \quad \rho_{ar} \cdot V_{balao} \cdot \cancel{g} \geq m_{balão} \cdot \cancel{g} + \underbrace{m_{aquecido}}_{\rho_{aquecido} \cdot V_{balao}} \cdot \cancel{g}$$

$$\rho_{ar} \cdot V_{balao} \geq m_{balão} + \rho_{aquecido} \cdot V_{balao} \quad \Rightarrow \quad (\rho_{ar} - \rho_{aquecido}) \cdot V_{balao} \geq m_{balão} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_{balão} \leq (\rho_{ar} - \rho_{aquecido}) \cdot V_{balao}}.$$

A densidade do ar $\rho_{ar}=1,2kg/m^3$ e do ar aquecido *é* $\rho_{aquecido}=0,3kg/m^3$(~40ºC). Por isso, o volume do balão tem que ser bem grande, aproximadamente $2000m^3$. Neste caso, a massa total (lona+cesto+pessoas) deve ser menor que: $m_{balão} \leq (1,2kg/m^3 - 0,3kg/m^3) \cdot 2000m^3 = \boxed{1800kg}$.

**E.5)** Um bloco de madeira tem massa de *3kg* e densidade $\rho_M=600kg/m^3$. Esse bloco é colocado em água doce.

a) Calcule a fração do volume do bloco de madeira que fica submersa e a fração que fica exposta, veja figura ao lado para os itens (a), (b) e (c).




Esse bloco de madeira deve ser carregado de chumbo $\rho_{pb}=11400kg/m^3$ para flutuar na água com <u>*80%* de seu volume submerso</u>.

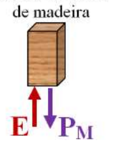
b) Calcule massa de chumbo (*Pb*) necessária para ser colocada no topo do bloco de madeira.

c) Calcule a massa de chumbo que deve ser colocado na *base* do bloco de madeira.

*Solução:*

a) Vamos fazer o D.C.L. do bloco de madeira impondo a condição de equilíbrio estático no eixo-y:

D.C.L. do bloco de madeira



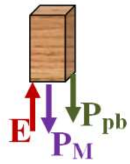

$$+\uparrow \sum F_{ext} = E - P_M = 0 \Rightarrow E = P_M \Rightarrow \underbrace{\rho\cdot V_{sub}\cdot g}_{E} = \underbrace{\overbrace{\rho_M\cdot V_M}^{m_M}\cdot g}_{P_g} \Rightarrow \frac{V_{sub}}{V_M} = \frac{\rho_M}{\rho} = \frac{600kg/m^3}{1000kg/m^3} = \boxed{0,6=60\%}$$

Portanto, *60%* do volume do bloco de madeira fica submerso e (*0.4*)*40%* fica acima da superfície.

O volume total do bloco de madeira é: $\rho_M = \dfrac{m_M}{V_M} \Rightarrow V_M = \dfrac{m_M}{\rho_M} = \dfrac{3kg}{600kg/m^3} = 5\cdot 10^{-3}m^3$. Vamos precisar desse volume para responder os itens (b) e (c).

b) Para o bloco de madeira flutuar com 80%(0,8·$V_M$) do seu volume submerso, devemos colocar um peso de chumbo (**$P_{pb}$**) no topo do bloco de madeira, ver figura ***(b)*** e D.C.L. ao lado:

D.C.L. do bloco de madeira




$+\uparrow \sum F_{ext(y)} = E - P_M - P_{pb} = 0 \Rightarrow E = P_M + P_{pb} \Rightarrow \underbrace{\rho\cdot V_{sub}\cdot g}_{E} = \underbrace{m_M\cdot g}_{P_g} + \underbrace{m_{pb}\cdot g}_{P_{pb}}$. Isolar $m_{pb}$:

$$m_{pb} = \rho\cdot V_{sub} - m_M \Rightarrow m_{pb} = \rho\cdot\left(\underbrace{0,8\cdot V_M}_{V_{sub}}\right) - m_M \Rightarrow m_{pb} = 1000kg/m^3\cdot\left(0,8\cdot 5\cdot 10^{-3}m^3\right) - 3kg = \boxed{1kg}$$

c) Para este item, devemos colocar a massa de chumbo completamente submersa. Portanto, o volume dessa massa de chumbo agora irá contribuir para a força de empuxo atuando no conjunto <u>*bloco de madeira+massa de chumbo*</u>.

$$+\uparrow \sum F_{ext(y)} = E - P_M - P_{pb} = 0 \Rightarrow E = P_M + P_{pb} \Rightarrow \underbrace{\rho\cdot V_{sub}\cdot g}_{E} = \underbrace{m_M\cdot g}_{P_g} + \underbrace{m_{pb}\cdot g}_{P_{pb}}.$$

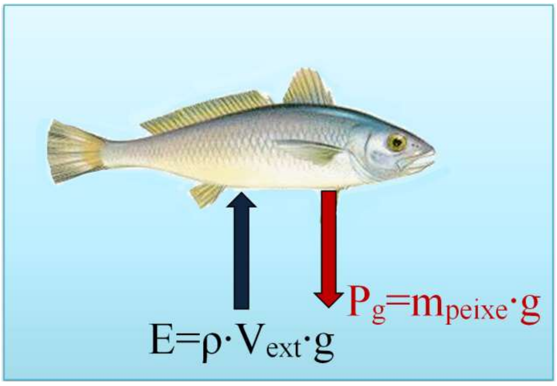
$V_{sub} = V_{sub,madeira} + V_{sub,chumbo} = 0,8\cdot V_M + V_{pb} = 0,8\cdot V_M + \dfrac{m_{pb}}{\rho_{pb}}$. Substituir este volume submerso na equação

$$\underbrace{\rho\cdot V_{sub}\cdot \cancel{g}}_{E} = \underbrace{m_M\cdot \cancel{g}}_{P_g} + \underbrace{m_{pb}\cdot \cancel{g}}_{P_{pb}} \Rightarrow \rho\cdot\left(0,8\cdot V_M + \frac{m_{pb}}{\rho_{pb}}\right) = m_M + m_{pb} \Rightarrow \rho\cdot 0,8\cdot V_M - m_M = m_{pb} - \rho\cdot\frac{m_{pb}}{\rho_{pb}} \overset{isolar\ m_{pb}}{\Rightarrow}$$

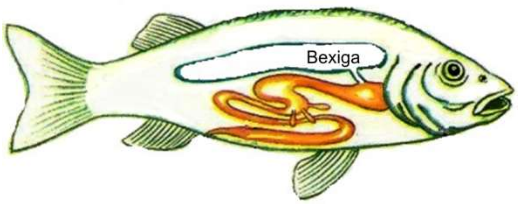
$$m_{pb} = \frac{\rho\cdot(0,8\cdot V_M) - m_M}{\left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_{pb}}\right)} \Rightarrow m_{pb} = \frac{1000kg/\cancel{m^3}\cdot\left(0,8\cdot 5\cdot 10^{-3}\cancel{m^3}\right) - 3kg}{\left(1 - \dfrac{1000\ \cancel{kg/m^3}}{11400\ \cancel{kg/m^3}}\right)} = \boxed{1,1kg}.$$

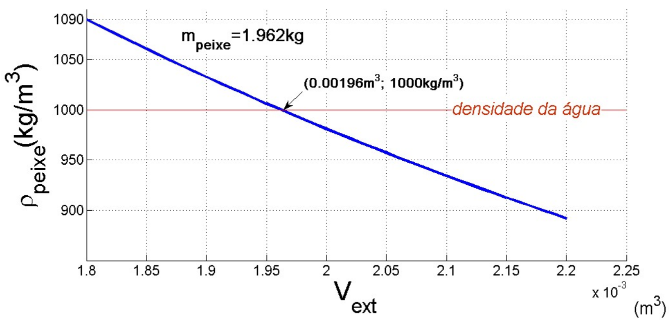
## Flutuabilidade dos Peixes Ósseos

No exemplo anterior, vimos que o submarino controla a sua flutuabilidade por meio da sua massa, pois o seu volume externo é fixo. Para o peixe ósseo, o processo é o oposto ao do submarino. O Peixe controla a sua flutuabilidade, aumentando ou diminuindo o seu volume externo por meio da sua bexiga natatória (*a massa é mantida constante*). Quando o peixe precisar subir à superfície, este infla a sua bexiga natatória (mediante uma troca gasosa com o sangue) com os gases $O_2$, $CO_2$ e $N_2$, o seu volume externo ($V_{ext}$) aumenta e como consequência a sua densidade diminui $\left(\rho_{peixe} = \dfrac{m_{peixe}}{V_{ext}}\right)$ abaixo do valor da densidade da água (neste caso, a força de empuxo passa a ser maior que o peso do peixe). Quando o peixe precisar descer para o fundo do rio, sua bexiga natatória é esvaziada (o gás volta para o sangue), o seu volume externo diminui e a sua densidade aumenta e passa a ser maior que a densidade da água. Agora, o peso do peixe passa a ser maior que a força de empuxo.




**E.6)** Um peixe possui densidade de *1090kg/m³* (com a bexiga vazia) e sua massa é *1,962kg(um quilo e 962 gramas).*
a) Calcule qual deve ser o aumento percentual do volume externo do peixe para que sua densidade coincida com a densidade da água.
b) Calcule o volume da bexiga parcialmente cheia do item a).




Densidade do peixe $\rho_{peixe}$ versus o seu volume externo $V_{ext}$. À medida que o volume aumenta, a densidade diminui.

Solução:

a) O volume externo que o peixe ocupa com a sua bexiga natatória vazia é:

$$\rho_{peixe} = \frac{m_{peixe}}{V_{ext}} \overset{isolar\ V_{ext}}{\Rightarrow} V_{ext(bexiga\ vazia)} = \frac{m_{peixe}}{\rho_{peixe}} = \frac{1,962kg}{1090kg/m^3} = 0,0018m^3 = 1,8\cdot 10^{-3}m^3$$

(veja o gráfico ao lado direito, para a densidade do peixe versus o seu volume externo). Agora vamos calcular o volume externo do peixe com a sua bexiga natatória parcialmente cheia, de modo que a densidade do peixe seja igual a densidade da água:

$$\rho_{peixe} = \underbrace{\rho}_{água} = \frac{m_{peixe}}{V_{ext}} \overset{isolar\ V_{ext}}{\Rightarrow} V_{ext(bexiga\ cheia)} = \frac{m_{peixe}}{\rho} = \frac{1,962kg}{1000kg/m^3} = 0,001962m^3 = 1,962\cdot 10^{-3}m^3$$

. O volume passou de 0,0018m³ (=*1,8·10⁻³m³*) para 0,001962m³(=*1,962·10⁻³m³*). A fração *f* do aumento do volume é:
$V_{inicial}\cdot(1+f) = V_{final}$, onde $f \rightarrow$ é o aumento fracionário. Para obter o aumento percentual é só multiplicar por 100%: $f_{(\%)} = f\cdot 100\%$, continuando a solução:

$$(1+f) = \frac{V_{final}}{V_{inicial}} = \frac{0,001962\cancel{m^3}}{0,0018\cancel{m^3}} = 1,09 \quad \Rightarrow \quad (1+f) = 1,09 \quad \overset{isolar\ f}{\Rightarrow} \quad f = 0,09 \Rightarrow f_{(\%)} = \underbrace{0,09}_{f}\cdot 100\% = \boxed{9\%}.$$

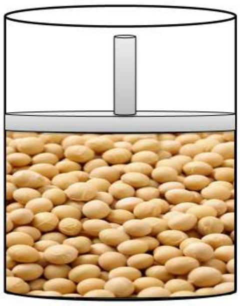
Ou você poderia ter feito que:

$$V_{adicional} = V_{final} - V_{inicial} \quad \text{e a fração} \quad f = \frac{V_{adicional}}{V_{inicial}} = \frac{1{,}962 \cdot 10^{-3} m^3 - 1{,}8 \cdot 10^{-3} m^3}{1{,}8 \cdot 10^{-3} m^3} = 0{,}09.$$

b) O volume adicional é: $V_{adicional} = V_{inicial} \cdot 9\% = \underbrace{1{,}8 \cdot 10^{-3} m^3}_{V_{inicial}} \cdot \underbrace{9/100}_{9\%} = 0{,}162 \cdot 10^{-3} m^3 = \boxed{1{,}62 \cdot 10^{-4} m^3}$.

**E.7)** Densidade média dos peixes osseos é *1070kg/m³*. Mostre que para essa densidade, o volume adicional deve ser em torno de *7%* para água doce e para água salgada ($\rho_{mar}=1020kg/m^3$) o volume adicional deve ser *5%.*

## Densidade aparente



Até agora calculamos densidades de objetos maciços, tal que a densidade desses objetos era a massa dividida pelo volume, sem a presença de vazios. Quando lidamos com grãos, devemos levar em conta a densidade aparente, pois agora o volume ocupado por todos os grãos irá conter vazios (ar). Portanto, o volume aparente é bem maior que o volume real e a densidade aparente é sempre menor que a densidade real quando considerando o objetivo maciço. Veja como exemplo, a soja, a densidade média dos grãos é em torno de 1170kg/m³. Solte um grão de soja em um recipiente contendo água. Esse grão deve afundar porque ele é mais denso que a água, cuja densidade é 1000kg/m3. Já para densidade aparente, se você encher um recipiente de um litro com grãos de soja e medir a sua massa (veja figura à esquerda), e calcular a densidade aparente $\rho_a$ dividindo a massa total dos grãos pelo volume do recipiente que é composto pelo volume dos grãos e dos espaços vazios $\rho_a = \frac{m_{grão}}{V_{grão}+V_{vazio}}$, você deve encontrar um valor menor que a densidade média dos grãos. Agora se você compactar os grãos de soja com auxílio de uma prensa, de modo que não fique nenhum espaço vazio entre os grãos, então você está medindo a densidade real da soja $\rho = \frac{m_{grão}}{V_{grão}}$, que é maior que a densidade aparente. Veja que ao compactar os grãos, o volume diminui (como mostrado na figura à direita), mas a massa permanece a mesma.

## Morte por afogamento

Durante a decomposição, por bactérias, do corpo do animal que morreu afogado, essas bactérias liberam gases e estes inflam o corpo fazendo com que o volume externo aumente e a densidade diminua. Como consequência, o corpo passa a boiar sobre a água por algumas horas ou dias. Até mesmo peixes quando morrem boiam sobre a água.

## Exercícios

**1)** Calcule a força de empuxo a que está sujeito um pedaço de madeira de massa 10kg e densidade *900kg/m³*, quando <u>completamente submerso</u> em:

a) água.

b) mercúrio líquido ($\rho_{Hg}=13600kg/m^3$).

c) álcool ($\rho_{alcool}=800kg/m^3$).

d) Em quais dos líquidos (acima) o pedaço de madeira, quando liberado no fundo, sobe ou permanece onde está?

**2)** Um bloco de material desconhecido pesa *80N* no ar e *70N* quando completamente imerso em água. Calcule a densidade desse material desconhecido.

**3)** Um cubo de gelo ( $\rho_{gelo} = 920kg/m^3$ ) é colocado em um recipiente contendo água doce. Calcule a fração do volume do cubo de gelo que fica submerso na água e a fração do volume do cubo que fica exposto ao ar.

**4)** Uma barra de ferro pesa *90N* no ar ( $\rho_{ferro} = 7900\,kg/m^3$ ).

a) Qual é o seu volume?

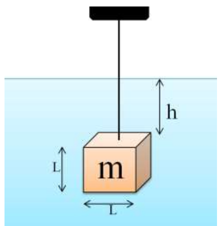
b) A barra de ferro é suspensa por uma corda (de massa desprezível) e mergulhada completamente em água. Calcule é a tensão na corda (que é o peso aparente da barra de ferro). (faça o D.C.L. da barra impondo a condição de equilíbrio estático).

**5)** Um cubo de madeira, com arestas de *20 cm*, flutua em mercúrio (*Hg*) com *5%* do seu volume submerso e em óleo com *90%* do seu volume submerso (considere $\rho_{Hg}=13600kg/m^3$). Calcule:

a) A densidade da madeira e a densidade do óleo. (faça o D.C.L. do cubo, mergulhado em mercúrio e em agua, impondo a condição de equilíbrio estático).

b) A quantidade de massa que você deve adicionar no topo do cubo de madeira para que este flutue em mercúrio com 80% do seu volume submerso.

**6)** Um cubo de arestas $L=0,5m$ e *300kg* de massa está suspenso por uma corda em um tanque aberto, que contém um líquido de densidade $\rho=1020kg/m^3$. A face superior do cubo se localiza a uma profundidade de $h=2,0m$. Calcule:




a) A força exercida pela pressão na face inferior e superior do cubo.

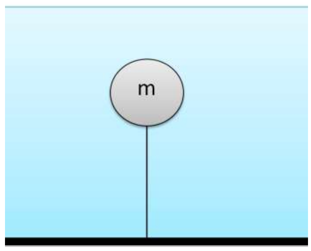
b) A tensão na corda (peso aparente).

c) A força de empuxo (compare com o item (a), pois $E=F_{inferior}-F_{superior}$).

d) Qual deve ser a nova arresta $L^*$ do cubo, para que a tensão na corda seja zero?

(dica: faça o D.C.L. do cubo impondo a condição de equilíbrio estático.)

**7)** Uma esfera de massa *m* e volume $0,01m^3$ está completamente submersa em água e presa por uma corda de massa desprezível (ver figura ao lado). Calcule:




a) A densidade dessa esfera, sabendo que a tensão na corda é 20N.

b) Calcule o peso real dessa esfera.

(dica: faça o D.C.L. da esfera impondo a condição de equilíbrio estático.)

**8)** Um bloco de densidade $\rho_{bloco} = 3000\,kg/m^3$, anexado a uma mola presa ao teto, está suspenso na vertical por uma mola de constante elástica k=1000N/m. Quando o bloco é colocado ao ar livre, a mola de distende 0,1m, enquanto que quando o bloco é posto completamente imerso em um líquido desconhecido, a distensão da mola é de *0,07m*. Calcule:

a) A força de empuxo que atua sobre o bloco quando este está imerso no líquido desconhecido.

b) A densidade do líquido desconhecido. ( faça o D.C.L. do bloco, ao ar livre e imerso, impondo a condição de equilíbrio estático.)

**9)** Navios Graneleiros são embarcações concebidas para o transporte de mercadoria a granel (grãos de soja, arroz, milho, etc). São geralmente navios de grandes dimensões, com capacidade para mais de 200000 toneladas de carga (considere esta a massa total do navio+carga). Dado: 1tonelada=1000kg, $P_{eso}=m\cdot g$.

a) Qual o volume de água salgada que esse navio desloca. (use $\rho_{mar}$)

b) Considerando o navio um paralepipado, de *200m* comprimento e *30m* de largura, calcule a altura (chamada de *Calado*) do navio que fica submersa no mar.

c) Este navio poderia atracar em um porto de *30m* de profundidade?

d) calcule novamente o item b) agora considerando o navio navegando em água doce $\rho=1000kg/m^3$.

**10) <u>...é só a ponta do iceberg</u>.** Próximo ao polo norte, foi medido, via satélite, o volume <u>exposto</u> de um iceberg como sendo igual a $1000000m^3$. Calcule o volume total desse iceberg **(***considere o iceberg composto apenas de água doce ($\rho_{gelo}=920kg/m^3$) flutuando em água salgada***).**

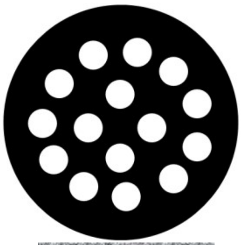
**11)** A densidade média do corpo humano é em torno de 1080kg/m$^3$, ligeiramente superior a da água doce (1000kg/m$^3$), por isso quando entramos em uma piscina afundamos. No entanto, quando usamos o '*espaguete*' (objeto cilíndrico, ver figura ao lado) conseguimos flutuar na água. Calcule:

a) Dado que o diâmetro($D=2R$) desse espaguete é de *6,5cm* (0,065m) e, para uma pessoa de até *80kg*, calcule o comprimento $L$ desse espaguete para que essa pessoa flutue na água . *Despreze a massa do espaguete e considere este completamente submerso. Dado:* $V_{cilindro}=\pi R^2 L$, $\pi=3,14$.

b) Se ao invés de utilizar o espaguete, essa pessoa decida usar uma **bola** inflável. Qual deve ser o raio dessa bola? Novamente, desconsidere a massa da bola e assuma que esta vai estar completamente submersa. *Dado:*

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \quad \Rightarrow \quad R = \left(\frac{3}{4\pi} V_{esfera}\right)^{1/3}.$$

**12)** Uma esfera oca de ferro possui densidade aparente de $\rho_{ap}=4200kg/m^3$. Calcule a fração do volume dos vazios no interior da esfera (veja figura ao lado) em relação ao volume ocupado pela massa do ferro, dado que a densidade do ferro maciço é $\rho_{ferro}=7900kg/m^3$.

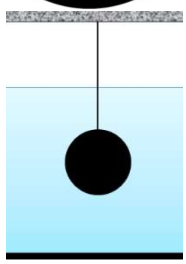


**13)** Uma esfera de massa ***m*** e volume $0,05m^3$ está completamente submersa em água e presa por uma corda de massa desprezível (ver figura ao lado). Calcule:

**a)** - A força de Empuxo sobre a esfera.

**b)** - A densidade dessa esfera, sabendo que a tensão na corda é 1000N.

(dica: faça o D.C.L. da esfera impondo a condição de equilíbrio estático.)



**Respostas:**

1) a) 1511.1N b)88,9N c)
2) 8000 kg/m$^3$
3) 0,92 (92%) submerso e 0,08 (8%) exposto
4) (a) $1,14\cdot 10^{-3} m^3$ ; (b)=78,6N
5) (a)$\rho_{mad}$=680 kg/m$^3$; $\rho_{oleo}$=755,6 kg/m$^3$; (b) 81,6kg (80%) e 103,4kg(100%)
6) $F_{sup}$=30100N; $F_{inf}$=31375N (b) 1725N; (c) 1275N; (d) 0.67m

7) a) 800 kg/m$^3$ b) 80N
8) a) 30N; b) 900 kg/m$^3$
9) a) $1,96\cdot 10^5 m^3$ ; b) 32,7m; d) $2,00\cdot 10^5 m^3$
10) 10000000 m$^3$
11) a) 1,79m; b) 0,11m
12) 0,88

## Hidrodinâmica (fluido em movimento)

### Linha de Fluxo (ou linha de corrente)

- A trajetória de uma partícula fluida durante o seu escoamento é chamada de linha de fluxo. Essas linhas não podem se cruzar, pois dois corpos não podem ocupar a mesma posição no espaço no mesmo instante de tempo. As linhas de fluxos devem estar acompanhadas de uma seta, que tem a finalidade de indicar o sentido do escoamento. Veja um exemplo na Figura 59, cujo escoamento ocorre da esquerda para direita.


**Figura 59** – Linha de fluxo representa a trajetória de uma partícula de fluido ao longo do escoamento.

- O espaçamento entre as linhas de fluxos quantifica o módulo da velocidade do escoamento. Quanto <u>maior</u> for o espaçamento, <u>menor</u> é a velocidade. No exemplo das figuras abaixo (Figura 60), espaçamento das linhas da fig.(a) é maior que o espaçamento da fig.(b). Portanto, velocidade do escoamento $\upsilon_a$ é menor que a velocidade do escoamento $\upsilon_b$.

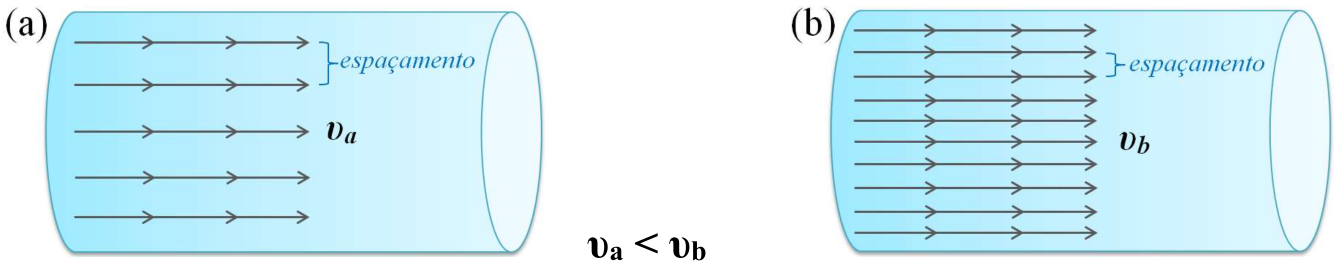



**Figura 60** – O espaçamento entre as linhas de fluxo quantifica a velocidade do escoamento. Quanto maior for o espaçamento, menor é a velocidade. O espaçamento das linhas de fluxo na figura (a) é maior que o espaçamento na figura (b), portanto, a velocidade do escoamento $\upsilon_a$ é menor que $\upsilon_b$.

- Quando as linhas de fluxos são curvas suaves, dizemos que o escoamento é *Laminar*. Caso contrário, o escoamento é chamado *Turbulento*. Fluido Ideal possui escoamento Laminar. Na Figura 61.(a) temos um exemplo de escoamento laminar com curvas suaves para as linhas de fluxos. Nas figuras ao lado (*b*, *c* e *d*) temos três exemplos de escoamento turbulento. Redemoinho é um exemplo de escoamento turbulento. Esse escoamento ocorre quando enchemos a pia do banheiro com água e em seguida retiramos a tampa. Também furacão é um exemplo de escoamento turbulento de ar.

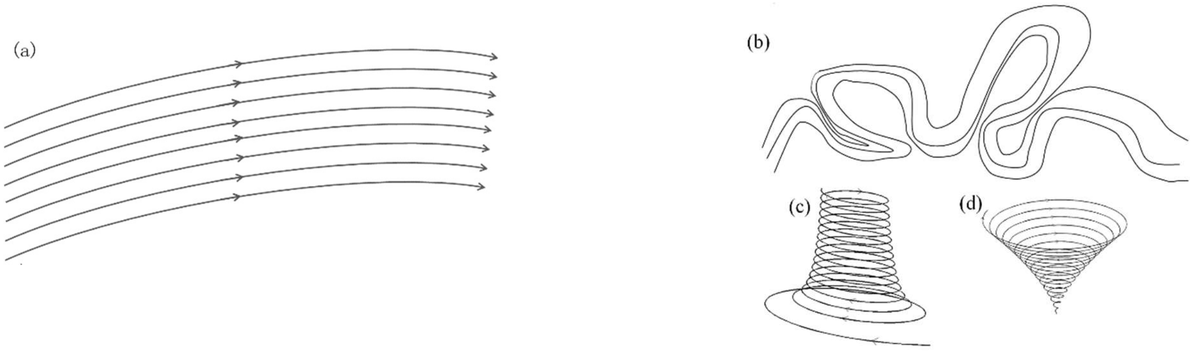



Figura 61 – Em (a) temos um escoamento laminar. Nas figuras (b), (c) e (d) temos exemplos de escoamento turbulento.

### Considerações Finais sobre Fluido Ideal

- **Fluido incompressível** - fluido em que $\rho$ é sempre constante, ou seja, $\Delta\rho=0$. Isso quer dizer que não é possível comprimir o fluido. Matematicamente, o fluido possui uma rigidez infinita.
- **Fluido sem viscosidade** – o fluido não oferece resistência ao cisalhamento, portanto toda força de pressão exercida pelo fluido sobre um corpo imerso nesse fluido deve ser perpendicular à superfície do corpo.
- **Escoamento Laminar** – significa que as linhas de fluxos do escoamento do fluido são curvas suaves ou irrotacionais ($\overline{\nabla}\times\overline{\upsilon}=0$).

## Equação da Continuidade (Vazão)

Considerando que a massa do fluido não varia ao longo do seu escoamento, temos que a massa que entra em um ponto deve ser igual ao mesmo montante de massa que sai em outro ponto. Aqui estamos usando a conservação da massa (obs: a massa só não é conservada se houver, por exemplo, algum vazamento na tubulação).

Modelo de Cálculo:

Na ***Seção 1***, Figura 62, o líquido passa com velocidade $\upsilon_1$ e atravessa uma área de seção transversal $A_1$. Durante um intervalo de tempo $\Delta t$, esse mesmo líquido percorre uma distância $l_1 = \upsilon_1 \cdot \Delta t$. Para o mesmo intervalo de tempo, o montante (*massa*) de líquido que passou na ***Seção 1*** deve ser igual a outro mesmo montante de líquido que atravessou a ***Seção 2***, com velocidade $\upsilon_2$, através de uma área de seção transversal $A_2$ e varrendo uma distância $l_2 = \upsilon_2 \cdot \Delta t$. Agora vamos igualar as massas que atravessou a **Seção 1** e a ***Seção 2***, no mesmo intervalo de tempo $\Delta t$, ou seja: $m_1 = m_2 \Rightarrow \cancel{\rho}\cdot\Delta V_1 = \cancel{\rho}\cdot\Delta V_2 \Rightarrow \Delta V_1 = \Delta V_2$.

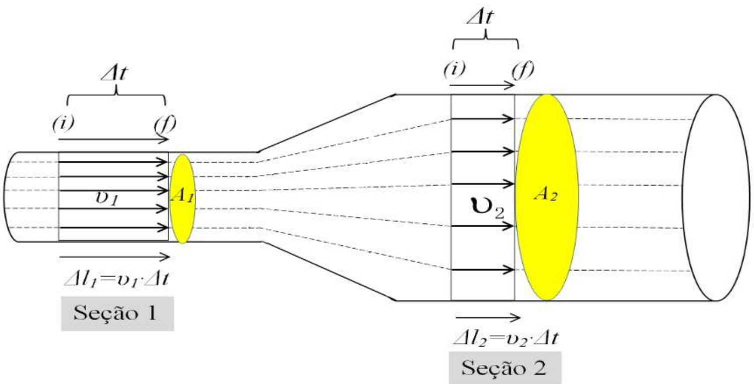



Figura 62 – Equação da continuidade (Vazão Q=υ·A). A massa de fluido que atravessa a *seção 1* no intervalo de tempo $\Delta t$ é a mesma que atravessa a *seção 2* no mesmo intervalo de tempo. Observe que as linhas de fluxos na seção 1 são menos espaçadas que a seção 2. Portanto a velocidade na seção 1 é maior que a da seção 2 ($\boldsymbol{\upsilon_1} > \boldsymbol{\upsilon_2}$).

Como $\Delta V_1 = \underbrace{\upsilon_1 \cdot \Delta t}_{\Delta l_1} \cdot A_1$ e $\Delta V_2 = \underbrace{\upsilon_2 \cdot \Delta t}_{\Delta l_2} \cdot A_2$, implica que: $\upsilon_1 \cdot \cancel{\Delta t} \cdot A_1 = \upsilon_2 \cdot \cancel{\Delta t} \cdot A_2$ ou $\boxed{\upsilon_1 \cdot A_1 = \upsilon_2 \cdot A_2}$. O produto da velocidade pela área, em qualquer ponto do escoamento, é sempre uma constante $\upsilon_1 \cdot A_1 = \upsilon_2 \cdot A_2 = \upsilon_3 \cdot A_3 = ... = \upsilon_n \cdot A_n$=constante. A essa constante, damos o nome de vazão $Q= \upsilon \cdot A$. Se a área $\boldsymbol{A}$ da seção transversal é aumentada, a velocidade υ é reduzida. Por outro lado, se a área $\boldsymbol{A}$ é reduzida, a velocidade υ é aumentada. Observamos este último efeito quando utilizamos uma mangueira de jardim e obstruímos a passagem de água com o dedo (reduzimos a área). Observe que o jato d'água aumenta de velocidade, conforme Figura 63. Definição de Vazão:

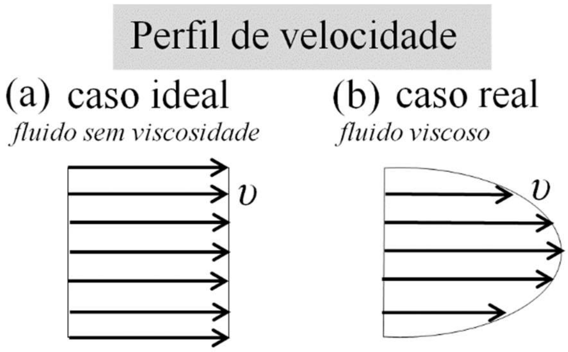
**Figura 63** – Diminuindo, com o polegar, a área de saída de água da mangueira do jardim, a velocidade do jato aumenta.

$$\boxed{Q = \upsilon \cdot A \quad (m^3/s)} \quad \boxed{Q = \text{velocidade} \times \text{área da seção transversal}} = \text{Vazão},$$

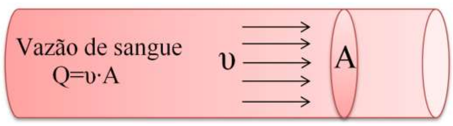
ou (2.18)

$$\boxed{Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (m^3/s)} \quad \boxed{Q = \frac{\text{Variação de Volume}}{\text{Variação de tempo}}} = \text{Vazão}.$$

Observação sobre o perfil de velocidade do escoamento: O perfil de velocidade da Figura 62.(a) representa um caso ideal, no qual não consideramos a viscosidade. Em uma situação real, no qual levamos em conta a viscosidade, o perfil de velocidade é parabólico, onde a velocidade é máxima no centro da tubulação, (**fig.(b)** ao lado direito), e vale zero na interface da tubulação. Podemos imaginar o caso ideal como sendo a velocidade média do caso real.




**E.1)** A vazão de sangue Q bombeado pelo coração para o resto do corpo humano é em torno de 5L/min. Dado: 1000L=1m3.
a) Calcule a velocidade com que o sangue passa pela artéria aorta de área 4.5cm2 (ver figura ao lado para a artéria).
b) Calcular o volume de sangue que passa por essa aorta em uma hora.




*Solução:*

a) Transformar essa vazão em m$^3$/s: $Q = 5\frac{\cancel{L}}{\cancel{min}}\left(\frac{1m^3}{1000\cancel{L}}\right)\cdot\left(\frac{1\cancel{min}}{60s}\right) = 8,33\cdot 10^{-5} m^3/s$. Para o cálculo da velocidade, vamos usar a relação $Q = \upsilon \cdot A$. Isolar υ: $\upsilon = \frac{Q}{A} = \frac{8,33\cdot 10^{-5} m^3/s}{4,5\cdot \underbrace{10^{-4} m^2}_{1cm^2}} = \boxed{0,19 m/s}$.

b) Para o volume, vamos usar a relação $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ e isolar $\Delta V$: $\Delta V = Q \cdot \Delta t = 8,33\cdot 10^{-5} m^3/s \cdot \underbrace{3600s}_{1h} = \boxed{0,3m^3 = 300L}$.

## Uma forma experimental de medir a vazão de água que sai da torneira da pia da cozinha

Vamos pegar um volume que a gente conheça, digamos 1L, e medir o tempo que a torneira aberta leva para encher completamente esse $1L(=10^{-3}m^3)$ com água.

a) Supor que essa torneira levou $10s$ para encher completamente um recipiente de 1L ($=10^{-3}m^3$), calcule a vazão de água da torneira.

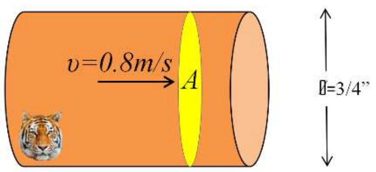
$$Q=\frac{\Delta V}{\Delta t}\Rightarrow Q=\frac{1\cdot 10^{-3}m^3}{10s}=\boxed{10^{-4}m^3/s}.$$

b) calcular com que velocidade a água sai da torneira, dado que essa torneira possui um seção circular de raio $1cm$.

Podemos usar a relação $Q=\upsilon\cdot A \quad (m^3/s)$, onde $Q$ foi calculado no item (a) e $A=\pi\cdot R^2$, com $R=1cm=10^{-2}m$. Como $Q=\upsilon\cdot A$, isolar $\upsilon$ e substituir os valores:

$\upsilon=\frac{Q}{A}=\frac{10^{-4}m^3/s}{\pi(10^{-2}m)^2}=\boxed{0,32m/s}$. Note que essa é a velocidade de água que sai da torneira, não é a velocidade com que a água chega no vaso de um 1L, pois esta velocidade é maior devido a força gravitacional realizar trabalho positivo. A medida que a água cai, a velocidade $\upsilon$ aumenta e a área da seção transversal $A$ diminui, pois a vazão é sempre constante ($Q=\upsilon\cdot A$). Observe esse fenômeno quando estiver usando a torneira da pia da sua cozinha.

**E.2)** A velocidade da água que atravessa uma tubulação de diâmetro *3/4”* é *0.8m/s* (dado que *1pol=1”=2,54cm, π=3,14 e 1h=3600s*).




a) Calcule a vazão de água na tubulação.

b) Quantos litros de água passam pela tubulação em 1h.

Solução: a) A vazão é calculada pela equação $Q=\upsilon\cdot A$, onde $\upsilon=0,8m/s$ e a área $A$ da seção circular é $A=\pi R^2$, onde $R=D/2=(3/4\cdot\underline{2,54cm})/2=0,95cm=0,0095m$. Portanto $Q=0,8m/s\cdot 3,14\cdot(0,0095m)^2=\boxed{2,27\cdot 10^{-4}m^3/s}$.

b) O volume de água pode ser calculado por:

$$Q=\frac{\Delta V}{\Delta t}\Rightarrow \Delta V=Q\cdot\Delta t=\left(\underbrace{2,27\cdot 10^{-4}m^3/\cancel{s}}_{Q}\right)\cdot\left(\underbrace{3600\cancel{s}}_{\Delta t=1h}\right)=\boxed{0,82m^3=820L}.$$

## Equação de Bernoulli

Agora vamos relacionar altura *y*, velocidade $\upsilon$ e pressão *P* em um ponto para um fluido escoando. Vamos aplicar o teorema do trabalho e energia cinética entre o estado inicial e o estado final (ver Figura 64.(a) e (b)), sobre um elemento de fluido *Δm*. Primeiramente, vamos identificar as forças externas que atuam sobre o elemento de fluido *Δm*. As forças externas são: $F_{\perp}$, $F_1$, $F_2$ e a força Peso.

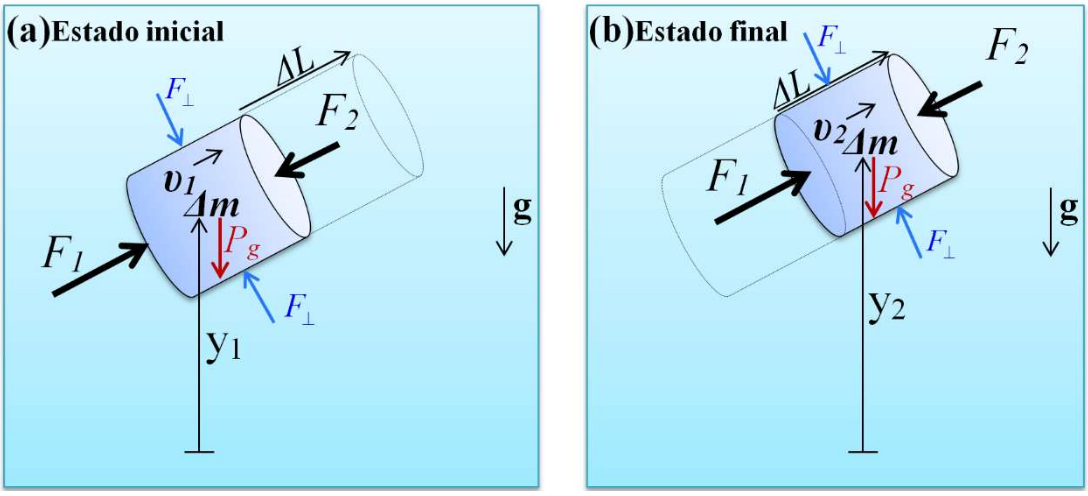



Figura 64 – Forças externas que atuam no elemento de fluido (cilindro) de massa *Δm*.

Agora vamos identificar quais forças externas realizam entre o *estado inicial* (Figura **64**.a) e o *estado final* (Figura **64**.b). As forças $F_{\perp}$ não realizam trabalho, pois estas são perpendiculares ao deslocamento *ΔL*. O trabalho realizado pela força $F_1$ é positivo, pois a força possui o mesmo sentido do deslocamento *ΔL*. O trabalho realizado pela força $F_2$ é negativo, pois a força possui sentido oposto ao deslocamento *ΔL*. O trabalho realizado pela força peso pode ser escrito como sendo o negativo da variação da energia potencial gravitacional. Aplicando o teorema do trabalho e energia cinética (1.33), temos que $\underbrace{W_{F_1}}_{P_1\cdot\Delta V}+\underbrace{W_{F_2}}_{-P_2\cdot\Delta V}+\underbrace{W_g}_{-\Delta U_g}=\underbrace{\Delta K}_{\frac{1}{2}\Delta m\cdot(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2)}$ .Veja que podemos escrever o trabalho realizado por uma força como $W=P\cdot\Delta V$, equação (2.15), então: $P_1\cdot\Delta V-P_2\cdot\Delta V-\Delta m\cdot g\cdot(y_2-y_1)=\frac{1}{2}\Delta m\cdot(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2)$. Como $\rho=\frac{\Delta m}{\Delta V}$ e $\Delta m=\rho\cdot\Delta V$, vamos substituir *Δm* por $\rho\cdot\Delta V$ e eliminar o $\Delta V$ em cada lado da igualdade da equação:

$P_1\cdot\cancel{\Delta V}-P_2\cdot\cancel{\Delta V}-\underbrace{\rho\cdot\cancel{\Delta V}}_{\Delta m}\cdot g\cdot(y_2-y_1)=\frac{1}{2}\underbrace{\rho\cdot\cancel{\Delta V}}_{\Delta m}\cdot(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2)$. Agora separando os termos *inicial* e *final*;

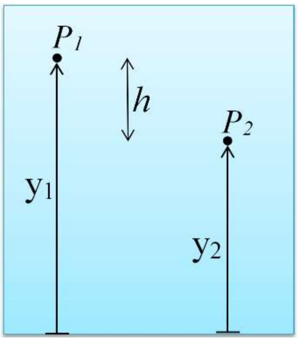
$\underbrace{P_1+\rho\cdot g\cdot y_1+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2}_{\text{estado inicial (1)}}=\underbrace{P_2+\rho\cdot g\cdot y_2+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_2^2}_{\text{estado final (2)}}$. Esse resultado implica que a soma desses três termos em cada lado da igualdade é sempre constante em qualquer ponto do líquido que você escolher. Chamamos a soma desses três termos de *equação de Bernoulli*, ou seja

$$\boxed{P+\rho\cdot g\cdot y+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2=\text{constante}}, \tag{2.19}$$

onde P=pressão em ($N/m^2$), $\rho$=densidade do fluido em ($kg/m^3$), *y*=altura *(m) vertical* em relação a um nível de referência e $\upsilon$=velocidade do escoamento em (*m/s*). A equação de Bernoulli é sempre aplicada entre dois pontos.

## Casos especiais da equação de Bernoulli

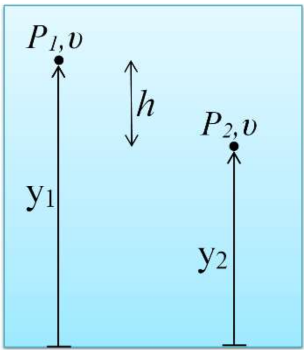
***1º Caso*** – <u>Fluido em Repouso</u>: $\upsilon_1=\upsilon_2=0$. Usando Bernoulli entre o ponto 1 e 2, temos:




$$\underbrace{P_1+\rho\cdot g\cdot y_1+0}_{\text{Ponto 1}}=\underbrace{P_2+\rho\cdot g\cdot y_2+0}_{\text{Ponto 2}} \quad\Rightarrow\quad P_2=P_1+\rho\cdot g\cdot\underbrace{(y_1-y_2)}_{h}$$

$P_2=P_1+\rho\cdot g\cdot h$ (equação da hidrostática). Observe que a equação de Bernoulli é mais geral, que recobre o caso de fluido em repouso.

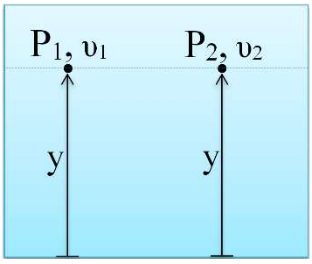
***2º Caso*** – Fluido se movendo com <u>velocidade constante</u>: $\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon$. Usando Bernoulli entre o ponto 1 e 2, temos:




$$\underbrace{P_1+\rho\cdot g\cdot y_1+\cancel{\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2}}_{\text{Ponto 1}}=\underbrace{P_2+\rho\cdot g\cdot y_2+\cancel{\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2}}_{\text{Ponto 2}} \quad\Rightarrow\quad P_2=P_1+\rho\cdot g\cdot\underbrace{(y_1-y_2)}_{h}$$

$P_2=P_1+\rho\cdot g\cdot h$ (mesma equação anterior. De acordo com as leis de Newton, corpo em repouso ou com velocidade constante, as equações são as mesmas.
A análise para este caso já foi feita na seção de hidrostática.

***3º Caso*** - <u>Mesmo Nível</u>: $y_1=y_2=y$.




$$\underbrace{P_1+\cancel{\rho\cdot g\cdot y}+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2}_{\text{Ponto 1}}=\underbrace{P_2+\cancel{\rho\cdot g\cdot y}+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_2^2}_{\text{Ponto 2}} \quad\Rightarrow\quad P_1+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2=P_2+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_2^2.$$

$$P_2=P_1+\frac{1}{2}\rho\cdot\left(\upsilon_1^2-\upsilon_2^2\right).$$

Se $\upsilon_1>\upsilon_2\Rightarrow\upsilon_1^2-\upsilon_2^2>0\quad\Rightarrow\boxed{P_2>P_1}$. *Quanto <u>maior</u> for a velocidade em um ponto, <u>menor</u> será a pressão nesse ponto (para o mesmo nível)*. Este é o resultado mais interessante da equação de Bernoulli, que o observamos em nosso dia-a-dia e em muitas aplicações tecnológicas.
A força devido à diferença de pressão é dada por:

$$\Delta P=P_2-P_1=\frac{1}{2}\rho\cdot\left(\upsilon_1^2-\upsilon_2^2\right) \qquad \text{(diferença de pressão)}$$

$$\Delta F=\Delta P\cdot A=\left(P_2-P_1\right)\cdot A \qquad \text{(força devido a diferença de pressão)}$$

$$\boxed{\Delta F=\frac{1}{2}\rho\cdot A\cdot\left(\upsilon_1^2-\upsilon_2^2\right)}, \quad \text{onde } A \text{ é a área da seção transversal de atuação da pressão.} \qquad (2.20)$$

**Exemplos deste último caso (mesmo nível)**

♦ Em dias chuvosos onde há incidência de fortes ventos, quando estamos andando com o nosso guarda-chuva armado, Figura 65.(a), de vez em quando este vira para cima, fig.(b). Isso acontece devido à diferença de pressão entre a parte interna do guarda chuva, ponto (2) e a parte externa, ponto (1), que faz com que exista uma força resultante, atuando de baixo para cima, cujo módulo é $\Delta F=\frac{1}{2}\rho\cdot\left(\upsilon_1^2-\upsilon_2^2\right)\cdot A$, onde $\rho$ é a densidade do ar ($\rho_{ar}=1.2kg/m^3$), $A$ é a área da seção transversal do guarda-chuva (área vista de cima), $\upsilon_1$ e $\upsilon_2$ são as velocidades na parte externa e interna do guarda-chuva, respectivamente, ver Figura 65.(a) e (b).

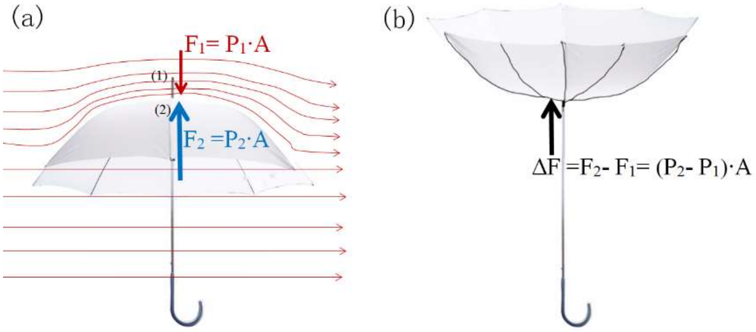



**Figura 65** - Devido à diferença de pressão entre a parte inferior e superior do guarda-chuva fig.(a), a força resultante faz com que guarda-chuva vire do avesso, fig.(b).

♠ Destelhamento de casas em dias de ventania. Devido a alta velocidade do vento na parte externa do telhado, isso faz com que exista uma força atuando de baixo para cima sobre o telhado, cujo módulo é dado por $\Delta F = \frac{1}{2}\rho \cdot \left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right) \cdot A$, onde $\rho$ é a densidade do ar ($\rho_{ar}=1.2kg/m^3$), $A$ é a área da seção transversal do telhado (área vista de cima), $\upsilon_1$ e $\upsilon_2$ são as velocidades na parte externa e interna da casa, respectivamente, ver figura abaixo. Portanto, em dias de ventos fortes, se a casa ficar completamente fechada, a pressão no interior da casa é bem maior que a pressão na parte externa, isso faz com que os vidros das janelas ou portas sejam forçados a quebrarem de dentro para fora. E também o telhado é forcado a ser arrancado de dentro para fora. Uma forma de amenizar essa força é abrir todas as janelas da casa para que a velocidade do ar no interior da casa seja bem próxima à velocidade na parte externa da casa. Cuidado quando for dimensionar a estrutura do telhado de um galpão.

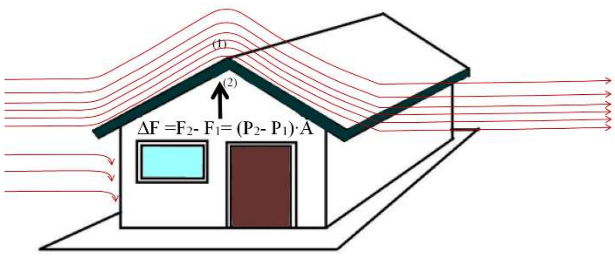



Figura 66 – Na parte externa do telhado, região (1), a velocidade é alta e a pressão é baixa. Já na parte interna da casa, região (2), a velocidade é baixa e a pressão é alta. A diferença de pressão entre a parte interna da casa e a externa faz com que exista uma força resultante, atuando de baixo para cima, que tende a arrancar o telhado da casa.

♥ Princípio da sustentação do avião. A força que contrabalanceia o peso de um avião é chamada força de sustentação, que surge devido a diferença de pressão entre a parte inferior (região 2) e superior (região 1) da asa do avião que possui uma certa inclinação θ (ângulo de ataque) em relação a horizontal a promover essa diferença de velocidade. A força de sustentação do avião é dada por $\Delta F = \frac{1}{2}\rho \cdot \left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right) \cdot A$, onde ρ é a densidade do ar ($\rho_{ar}=1.2kg/m^3$, próximo a superfície da terra), $A$ é a área efetiva da asa do avião, $\upsilon_1$ e $\upsilon_2$ são as velocidades na parte superior e inferior das asas, respectivamente, ver Figura 67.(b).

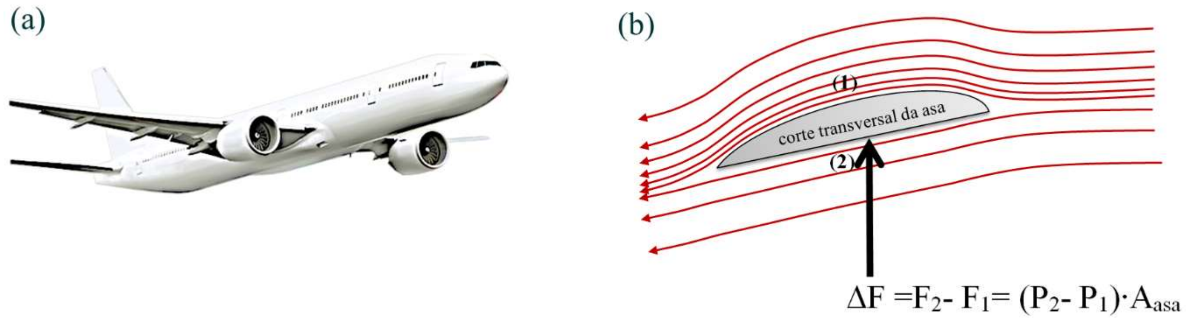
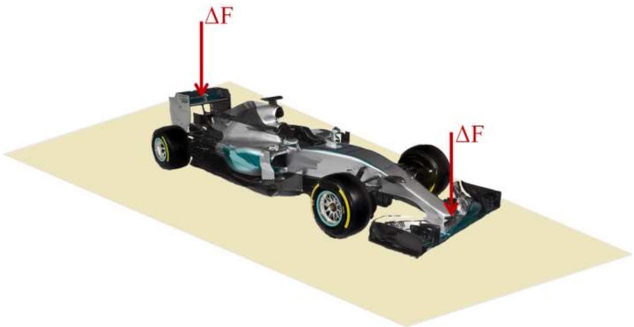
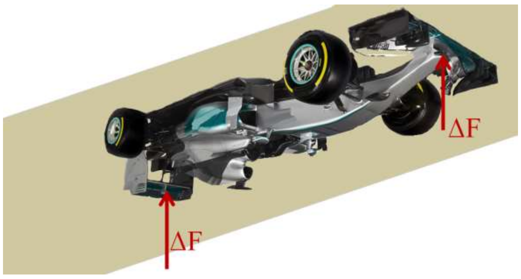


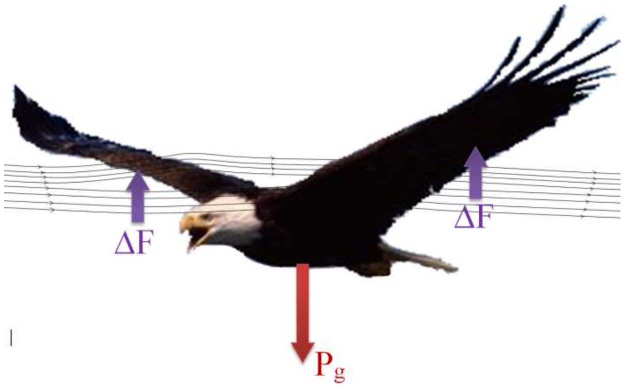

Figura 67- Princípio da sustentação do avião. Na figura (b) temos um corte da seção transversal da asa do avião. No ponto (1) superior, as linhas de fluxos são menos espaçadas que na parte inferior (2), isso porque a velocidade em (1) é maior que a velocidade em (2). Como a velocidade do ponto (2) é menor que no ponto (1), a pressão no ponto (2) é maior que a pressão no ponto (1).

♣ Carros de Fórmula 1. Nos carros de fórmula 1, a força de sustentação sempre aponta para o piso do carro e atua nos aerofólios dianteiro e traseiro. Esta força para baixo é a responsável por manter o carro no chão, impedindo-o de decolar (é o caso oposto a sustentação do avião). Outro benefício dessa força é aumentar a reação Normal e, como consequência, a força de atrito entre o pneu e o asfalto ($f_{at}=\mu \cdot N$), aumentado a aderência do carro. É possível até o carro se mover sob um teto sem cair, pois a força sempre aponta para o piso do carro. Neste último caso, a força de sustentação (que agora aponta para cima) deve ser maior que a força peso do carro (que aponta para baixo). Essa diferença de forças é a reação normal $\boldsymbol{N}$ (que deve apontar para baixo), que é sempre perpendicular à superfície de contato e aponta da superfície para o corpo.

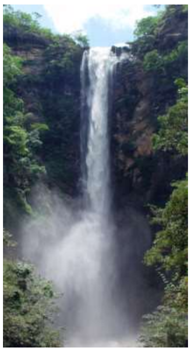



♣ Planação dos pássaros. Durante a planação dos pássaros, que é o movimento sem bater as asas, é o mesmo princípio da sustentação do avião. Na parte superior da asa do pássaro, a velocidade ‘do vento’ é maior e a pressão menor. Já na parte inferior, a velocidade é menor e a pressão maior (veja figura ao lado direito). Essa diferença de pressão multiplicada pela área efetiva da asa fornece uma força que aponta para cima. Essa força para cima, em cada asa, é que irá equilibrar com o peso do pássaro, que aponta para baixo. Quando o pássaro bate as suas asas, é a 3ª lei de Newton em ação. A ave empurra o ar para baixo, através das suas asas, e o ar empurra a ave para cima.




♣ Em cachoeiras. Quando as partículas de água ganham velocidade ao longo da queda, a sua pressão interna diminui (devido ao aumento da velocidade), atingindo a pressão de vapor e a água começa a vaporizar, bem antes mesmo de atingir a parte inferior. É muito comum observar esse efeito em cachoeiras que são bem altas (veja na figura ao lado).



## Força de Arrasto e velocidade terminal (*opcional)

Aqui vamos comentar a força de arrasto para um caso particular, em que um corpo se move com velocidade υ imerso em um fluido em repouso. Nesse caso, a força de arrasto é análoga à força de atrito, como sendo uma força dissipativa e atua sempre no sentido oposto ao movimento. A diferença entre elas é que a força de arrasto aumenta com o aumento da velocidade e diminui com a diminuição da velocidade, e também depende da área de contato, só que agora o contanto é com o fluido. Seu módulo é dado por

$$F_a = \frac{1}{2}\rho \cdot \kappa \cdot A \cdot \upsilon^2 \tag{2.21}$$

onde:

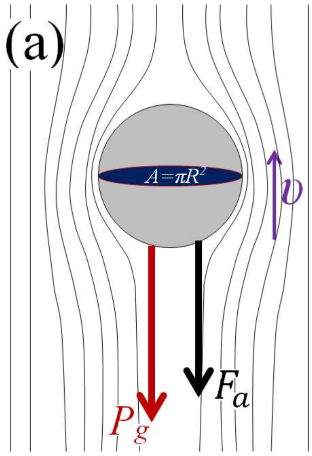
ρ = é a densidade do meio fluido, para o ar $\rho=1,2kg/m^3$ e para a água $\rho=1000kg/m^3$,

κ = é um número adimensional ($0<\kappa<1,0$) chamado de *coeficiente aerodinâmico*. Este depende da forma geométrica do corpo, o seu valor é medido através de experimentos em túnel de vento. Corpo com boa aerodinâmica possue um pequeno valor de $\kappa$. Quanto menor for este valor, menor será a força de arrasto, menor será o atrito. Quando se projeta um carro, por exemplo, o *designer frontal e as formas arredondadas* desse carro tem a finalidade de minimizar a força de arrasto. Os carros populares possuem um coeficiente aerodinâmico em torno de $\kappa=0,35$,

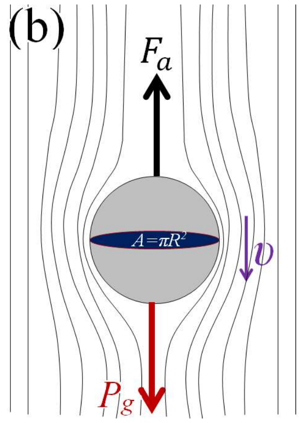
$A$= área da seção transversal com que o objeto '*ataca'* o fluido ($m^2$),

$\upsilon$= velocidade do corpo em relação à terra ($m/s$). Lembre-se que estamos considerando o fluido em repouso.

Na figura(a), ao lado, temos uma esfera subindo. A força de arrasto atua a se opor ao movimento, ou seja, para baixo. Já na figura(b), tem-se uma esfera caindo. À medida que esta cai, sua velocidade aumenta até o ponto em que a força de arrasto se iguala ao peso da esfera e esta passa a cair com velocidade constante (força resultante nula), chamada de velocidade terminal $\upsilon_T$. *Em ambos os casos*, a área da seção transversal de uma esfera de raio $R$ é $A=\pi R^2$*(que é diferente da área da superfície da esfera, que vale* $4\pi R^2$*).*




Durante a subida da esfera, tanto a força peso $\boldsymbol{P_g}$ como a força de arrasto $\boldsymbol{F_a}$ realizam trabalho negativo sobre a esfera e esta diminui de velocidade.




Durante a queda da esfera (ou de um corpo qualquer), a força de arrasto $\boldsymbol{F_a}$ aumenta até o ponto em que esta passa a ser igual a força peso $\boldsymbol{P_g}$. A partir deste ponto, a esfera cai com velocidade constante, chamada de velocidade terminal $\upsilon_T = \sqrt{\frac{2\cdot m\cdot g}{\rho\cdot\kappa\cdot A}}$.

Para fluido em movimento, υ deve ser a velocidade relativa entre o corpo e o fluido. Neste caso, a força de arrasto irá se opor ao sentido dessa velocidade relativa. Agora, a força de arrasto pode até atuar no mesmo sentido do movimento, que é ocaso do navio a vela. É a força de arrasto que empurra o navio. Também é possível velejar contra o vento. Neste caso, é o principio de Bernoulli (força devido à diferença de pressão) que empurra o navio. É a força de arrasto que te empurra a favor do vento, durante uma ventania; é difícil caminhar contra o vento e fácil a favor do vento. A força devido a diferença de pressão (principo de Bernoulli) e a força de arrasto normalmente atuam juntas, mas não necessariamente na mesma direção. Observe a similaridade da equação (2.20) com a equação (2.21).

## Aplicação da Equação da Continuidade (Vazão) e de Bernoulli

Tubo de Venturi é um dispositivo muito utilizado para medir velocidade pontual de um escoamento. Necessitamos efetuar medidas de velocidade para calcularmos a vazão de um rio, por exemplo. Na Figura 68 (à esquerda) temos o tubo de Venturi vazio. Na figura à direita, o tubo de Venturi é colocado imerso em um líquido. O dispositivo é colocado na posição horizontal, a uma profundidade que se deseja medir a velocidade do escoamento, e basta efetuar a leitura do desnível *h* para se obter a velocidade de entrada no tubo $\upsilon = \upsilon_1$.

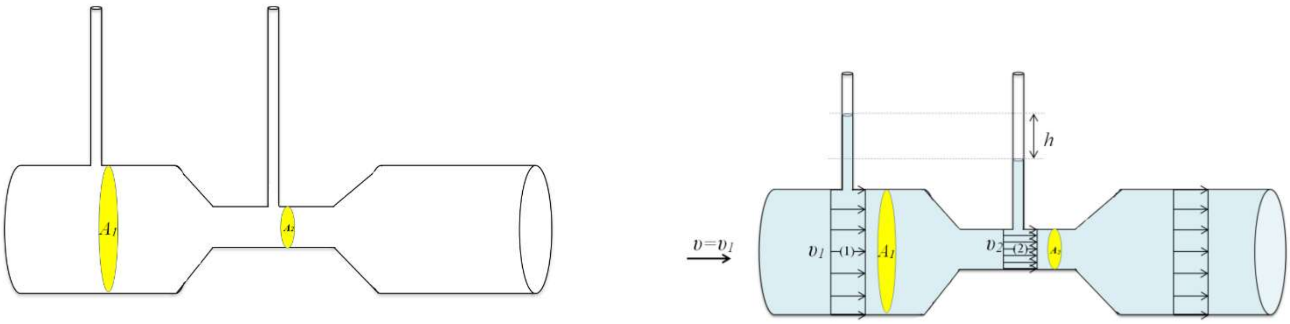



**Figura 68** - Tubo de Venturi é muito utilizado para medir velocidade υ com apenas leitura do desnível *h*.

Nosso objetivo é encontrar uma expressão para a velocidade no ponto (1) $\upsilon_1$, que é a velocidade do escoamento. Vamos aplicar Bernoulli entre os pontos (1) e (2) e também a equação da continuidade ($Q=\upsilon\cdot A$) nesses pontos.

$$\underbrace{P_1+\cancel{\rho\cdot g\cdot y}+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2}_{\text{Ponto 1}}=\underbrace{P_2+\cancel{\rho\cdot g\cdot y}+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_2^2}_{\text{Ponto 2}}\Rightarrow\quad P_1+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2=P_2+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_2^2.$$

$$P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho\cdot(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2)\Rightarrow\underbrace{\upsilon_2\cdot A_2}_{Q}=\underbrace{\upsilon_1\cdot A_1}_{Q}\Rightarrow\upsilon_2=\upsilon_1\cdot\left(\frac{A_1}{A_2}\right),\text{ substituindo: } P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1\right).$$

Você pode mostrar que: $P_1-P_2=\rho\cdot g\cdot h\Rightarrow$ igualando as equações $\Rightarrow\quad \rho\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1\right)$. Isolar $\upsilon_1^2$ :

$$\upsilon_1^2=\frac{2\cdot g\cdot h}{\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1\right)}\Rightarrow\quad\boxed{\upsilon_1=\sqrt{\frac{2\cdot g\cdot h}{\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1\right)}}}.$$

Você só precisa medir o valor de *h*, pois $A_1$ e $A_2$ são áreas conhecidas do tubo. Você mesmo pode medir o diâmetro (maior e menor) do tubo com uma régua.

Observações: No ponto (1) do tubo, a velocidade é menor e a pressão é maior. Já no ponto (2), a velocidade é maior e a pressão é menor que a do ponto (1) (Figura 68 à direita). Portanto $P_1-P_2>0$, mostre que $P_1-P_2=\rho\cdot g\cdot h$.

## Irrigação por aspersores

**1)** Uma grande caixa d'água *(ver* Figura 69*)* é usada como reservatório para abastecer um pequeno sistema de irrigação formado por 18 aspersores. Cada aspersor (veja figuras ao lado direito) deve fornecer uma vazão de $Q=1,0L/s$.

a) Calcule a altura *h*, entre o nível da tubulação principal que abastece os aspersores e a superfície livre de água armazenada na caixa. O diâmetro da tubulação principal é $\varnothing=5cm$ e a pressão nesse ponto é $95\%$ *de* $P_{atm}$.

b) Quanto tempo (*em minuto*) o sistema de irrigação deve ficar ligado por dia, sabendo que a área total a ser irrigada pelos aspersores necessita de *10000L* de água por dia.

Solução:

a) A vazão total de água que terá que passar na tubulação principal para abastecer os 18 aspersores é: $Q = 18L/s = 18\cdot 10^{-3}m^3/s$. A área da seção transversal da tubulação principal é $A=\pi\cdot R^2$ ou $A=3{,}14\cdot(2{,}5\cdot 10^{-2}\ m)^2 = 1{,}96\cdot 10^{-3}m^2$. Com essa área, podemos calcular a velocidade do fluxo de água na tubulação principal, usando: $Q = \upsilon \cdot A$, portanto $\upsilon = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{18\cdot 10^{-3}m^3/s}{1{,}96\cdot 10^{-3}m^2} = \boxed{9{,}18m/s}$. Vamos agora calcular a altura *h* que irá produzir essa velocidade. Para tal, vamos usar a equação de Bernoulli entre superfície livre de água, região (1), na caixa d'água e a tubulação principal, região (2), que fica no chão, adotando o chão como nível de referência.,

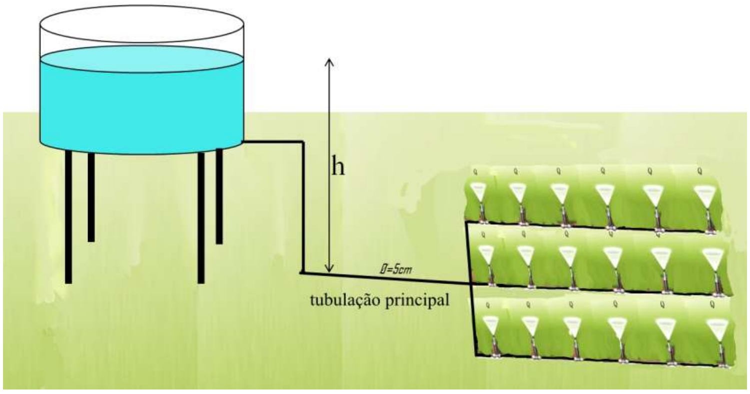



**Figura 69** – Sistema de irrigação por aspersores. A água desce por gravidade.

$$\underbrace{P_1 + \rho\cdot g\cdot y_1 + \frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2}_{\text{superfície livre de água (na caixa d'água)}} = \underbrace{P_2 + \rho\cdot g\cdot y_2 + \frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_2^2}_{\text{chão (na tubulação principal)}} \Rightarrow$$

$$\underbrace{P_{atm} + \rho\cdot g\cdot h + \frac{1}{2}\rho\cdot(0m/s)^2}_{\text{superfície livre de água (na caixa d'água)}} = \underbrace{0{,}95\cdot P_{atm} + \rho\cdot g\cdot(0m) + \frac{1}{2}\rho\cdot(9{,}18m/s)^2}_{\text{chão (na tubulação principal)}} \Rightarrow \quad \text{Isolar } h:$$

$$h = \frac{0{,}95\cdot P_{atm} - P_{atm} + \frac{1}{2}\rho\cdot(9{,}18m/s)^2}{\rho\cdot g} = \frac{-0{,}05\cdot 10^5 N/m^2 + \frac{1}{2}1000kg/m^3\cdot(9{,}18m/s)^2}{1000kg/m^3\cdot 10m/s^2} = \boxed{3{,}71m}.$$

Observações: Aqui estamos desprezando as *perdas de carga devido ao atrito*. Assumimos como sendo zero a velocidade com que o nível de água na caixa d'água diminui. Essa hipótese é válida se a área da seção transversal da caixa d'água for muito grande, se comparada com a área da tubulação principal.

Mesmo que você tampe a caixa d'água, a pressão na superfície livre de água ainda continua sendo igual à pressão atmosférica. A pressão só é diferente se a caixa for *vedada*, que impeça a entrada de ar.

b) Tempo de uso do sistema de irrigação por dia para um volume de 10000L ou $10m^3$:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta V}{Q} = \frac{10m^3}{18\cdot 10^{-3}m^3/s} = \boxed{555{,}6s = 9{,}3\min}.$$

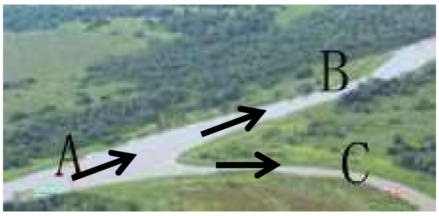
## Exercícios

**1)** A vazão de sangue bombeado pelo coração humano é da ordem de 5 litros/min($=8,33\cdot 10^{-5}m^3/s$).

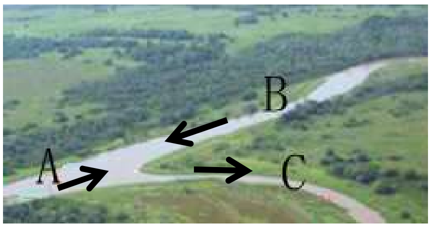
a) Com que velocidade média o sangue passa pela artéria aorta, cuja seção transversal é de 4cm$^2$? ($1cm^2=10^{-4}m^2$).

b) Quantos litros de sangue passam por essa aorta em um dia?

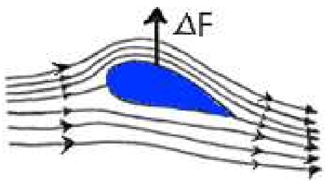
**2)** A vazão de agua que passa no trecho **A** de um rio é *$12m^3/s$ (*ver figura ao lado). Efetuou-se uma medição da vazão no trecho do **B** e o valor medido foi de *$5m^3/s$*. Quanto vale a vazão no trecho **C**? (as setas indicam o sentido do escoamento). *Dica: use a conservação da massa: o que entra em um ponto deve ser igual ao que sai desse ponto.*




**3)** A vazão de agua que passa no trecho **A** de um rio é *$12m^3/s$ (*ver figura ao lado). Efetuou-se uma medição da vazão no trecho **B** e o valor medido foi de 5m$^3$/s. Quanto vale a vazão no trecho **C**? (as setas indicam o sentido do escoamento). *Dica: use a conservação da massa: o que entra em um ponto deve ser igual ao que sai desse ponto.*




**4)** As linhas de fluxo em torno da asa de um pequeno avião são tais que a velocidade sobre a parte superior é de *83m/s* e sob a superfície inferior e de *70m/s*.



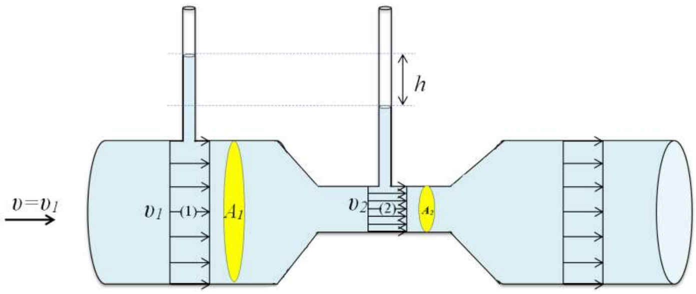

a) Se a área efetiva das asas do avião é em torno de 100m$^2$, qual é a força vertical que atua sobre o avião devido exclusivamente a diferença de pressão entre a parte inferior e superior das asas? A densidade do ar é de *$1,2kg/m^3$*.

b) Dado que a massa do avião é de *15* toneladas, nas condições do item **a**, o avião está decolando ou aterrissando?

**5)** Um fluxo de água está passando por um tubo horizontal mostrado na figura abaixo. A área do tubo na parte mais larga vale $A_1$ e na parte mais estreita $A_2$.

a) Mostre que a velocidade de entrada da água $\upsilon_1$ é dada por: $\upsilon_1=\sqrt{\dfrac{2gh}{\left[\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^2-1\right]}}$,

onde *h* é a diferença de altura entre cada coluna de água (ver figura acima).



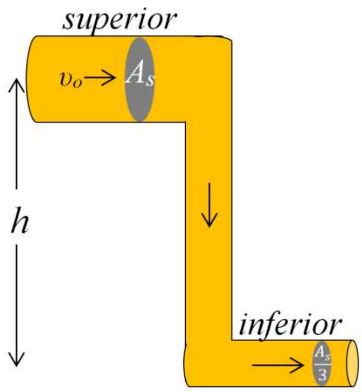

b) Dado que $A_1$=30cm$^2$, $A_2$=5cm$^2$ e a altura medida foi de *h=0,4m*, qual é o valor da velocidade $\upsilon_1$?

c) Com os dados das áreas do item (b), esboce o gráfico de $\upsilon_1$ versus *h*.

**6)** A água em uma tubulação se desloca uma velocidade inicial $\upsilon_0$ quando atravessa um trecho do tubo com área da seção transversal de $5 \cdot 10^{-4} m^2$ (parte superior). A água gradualmente desce uma altura de *h=12,0m*, sendo que neste ponto (inferior) a área da seção transversal da tubulação é *1/3* do valor inicial. Calcule:

a) O valor da velocidade $\upsilon_0$, dado que a diferença de pressão entre a parte inferior e a superior da tubulação é de $10^5 N/m^2$.

b) A vazão de água na parte superior e inferior.

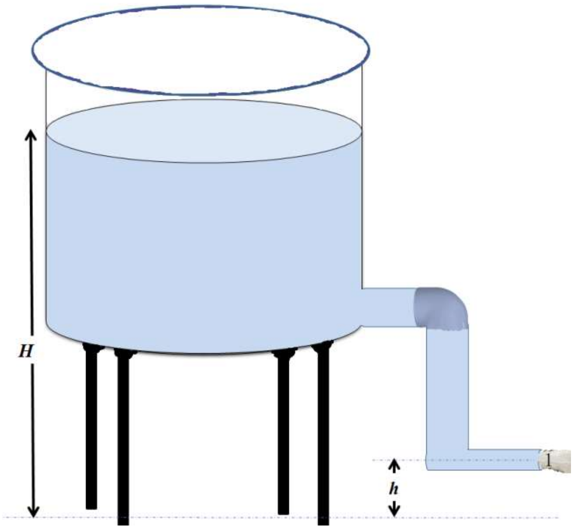



**7)** A água flui continuamente de um tanque aberto através de um tubo circular. A altura H vale 1*0m* e a altura do ponto **1** é *h=1m*. A área da seção transversal do ponto **1** é *0,015m²*. Considere a área do tanque muito maior que a área do ponto **1**.Calcule:

a) A vazão de água em $m^3/s$ que sai do ponto **1**.

b) Calcule o volume de água que sai do tanque em *1h*.

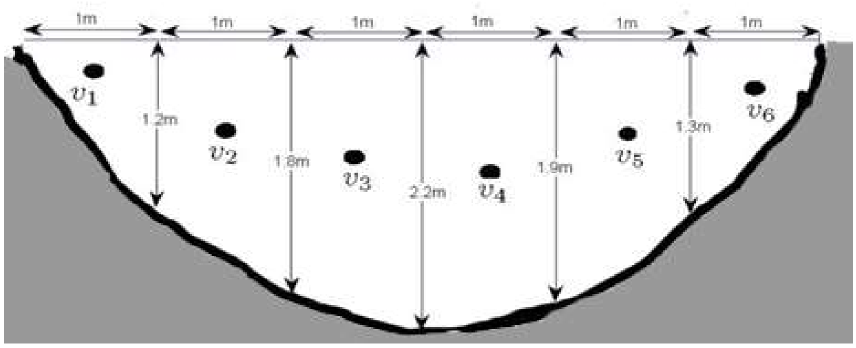
c) Que altura *H* seria necessária para dobrar a vazão de água que sai do ponto 1? (*h e a área do cano em **1** continuam com o mesmo valor*).




**8)** Medindo a vazão de um rio. Você deseja medir, com boa precisão, a vazão de um rio com largura de 6,0m. Para tal objetivo, você resolveu medir a cada *1m* da largura do rio, a velocidade da água a meia altura em cada largura (bolas pretas na figura abaixo). Os valores medidos para as velocidades foram: $\upsilon_1$=0,350m/s, $\upsilon_2$=1,1m/s, $\upsilon_3$=1,3m/*s*, $\upsilon_4$=1,4m/s, $\upsilon_5$=1,2m/s e $\upsilon_6$=0,4m/s. A área da seção transversal do rio, no trecho que você está efetuando a medida, é mostrada na figura abaixo (à direita), juntamente com suas respectivas profundidades (1,2m, 1,8m, 2,2m, 1,9m, 1,3m). Calcule:

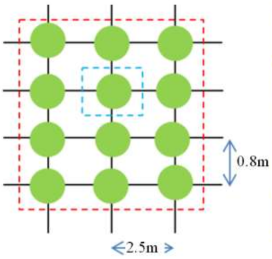
a) A vazão desse rio (Dica: $Q = \sum_{i=1}^{6} \upsilon_i \cdot A_i$ , para o cálculo da área, use triângulos e trapézios).

b) O volume de água (*m³*) que passa pela seção **AB** por <u>segundo</u> e por <u>hora</u>.

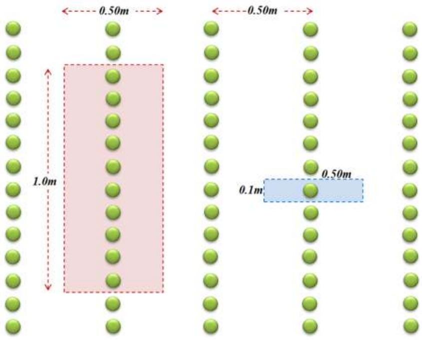




Seção transversal **AB** do rio.

**9)** A planta do café necessita de cerca de cinco litros de água por dia para ter pleno desenvolvimento. Considerando o plantio de café, onde cada planta de café (ver figura ao lado) se encontra espaçada de 2,5m e a distância entre cada fileira for de 0,8m, calcule a volume de água gasto por mês para irrigar um hectare de café ($1ha=10^4m^2$). Considere *1mês=30dia*.



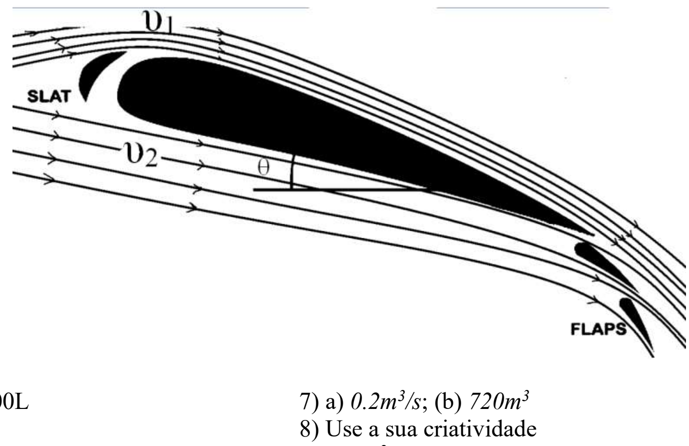

**10)** No cultivo da soja, a planta necessita, em média, de *8mm* de água por dia (em toda área). Considere o espaçamento entre linhas de *50cm* e a densidade da planta de soja por linha de *10 planta/m* (ver figura abaixo).




**a)** Calcule o volume de água necessário (em $m^3$ e *L*), por mês, para o cultivo de <u>um hectare</u> de soja ($1ha=10^4m^2$, $1m^3=1000L$, $1mm=10^{-3}m$). Considere *1mês=30dia*.
**b)** Em média, cada planta de soja necessita de quantos litros de água por dia?

**11)** A água em uma tubulação se desloca uma velocidade inicial $\upsilon_0$ quando atravessa um trecho do tubo com área da seção transversal de $5\cdot10^{-4}m^2$. A água gradualmente desce uma altura de *12,0m*, sendo que neste ponto a área da seção transversal da tubulação é *1/3* do valor inicial. Calcule:
**a)** - O valor da velocidade $\upsilon_0$, dado que a diferença de pressão entre a parte inferior e a superior da tubulação é de $10^5 N/m^2$.
**b)** - A vazão de água na parte superior e inferior da tubulação.

**12)** Um avião com uma massa total de 40000kg, possui área efetiva das suas asas de $195m^2$. O desenho das asas é tal que a velocidade na parte de cima é 1,25 vezes maior que na parte de baixo (veja figura ao lado), quando o avião está decolando. Calcule a velocidade mínima na parte de cima das asas ($\upsilon_1$) para que o avião decole. Considere $\rho_{ar}=1,3kg/m^3$.




**Respostas:**
1) a) 0,2m/s; b) 7200L
2) *7 $m^3/s$*
3) *17 $m^3/s$*
4) a) $\Delta F_s$=119340 N; b) $P > \Delta F_s$*(aterrissando)*
5)
6) a*) 2,24m/s;* b) $1{,}12\cdot10^{-3}m^3/s$
7) a) *$0.2m^3/s$*; (b) *$720m^3$*
8) Use a sua criatividade
9) $750m^3$ ou 750000L por mês
10) a) $2400m^3$=2400000L b) 0.4L/dia
11)
12) 93,63m/s=337km/h

# Termodinâmica

Termodinâmica é a ciência que estuda as leis que regem a relação entre Calor, Trabalho, ou seja, como a energia se transforma.

## Temperatura

Toda matéria possui uma temperatura associada a ela. Essa temperatura é devido ao grau de agitação molecular. Quanto maior for a agitação, maior será a temperatura. Portanto, podemos dizer que um corpo possui temperatura. A temperatura média do nosso corpo, por exemplo, é em torno de 37ºC.

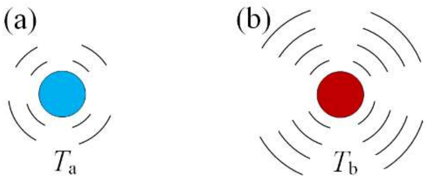



Figura 70 – A molécula na fig.(a) (bola azul) se encontra menos agitada que a molécula na fig.(b) (bola vermelha). Portanto, a temperatura $T_b$ é maior que a temperatura $T_a$.

Quando a temperatura é muito alta, a agitação molecular passa a ser tão intensa que as ligações químicas entre as moléculas começam a ser desfazer e dar-se o surgimento a novos estados da matéria, sendo os principais definidos a seguir.

## Principais estados da matéria

Os principais estados da matéria são: sólido, líquido e gasoso. A diferença de um estado para outro está intimamente relacionada com a estrutura atômica da matéria (ver Figura 71). No estado sólido, por exemplo, as moléculas estão ligadas de modo que estas formam uma estrutura altamente organizada, tendo uma forma e volume bem definido. Já o estado líquido, as moléculas estão mais desorganizadas, mas ainda assim estão fortemente ligadas de modo que o volume é bem definido, mas assume a forma do recipiente que o contém. No estado gasoso, não existe mais organização entre as moléculas, e a substância assume a forma e o volume do recipiente.

ATENÇÃO: As equações dentro de uma ‘*caixa*’ $\boxed{f(x)}$ são as equações principais, que serão usadas para resoluções de problemas. Já as equações sem ‘caixa’, são utilizadas para se chegar nas equações principais.

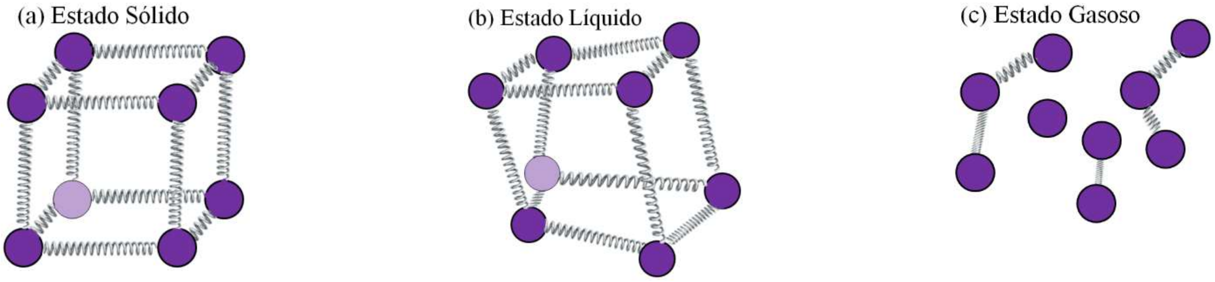



Figura 71 – Representação pictórica do estado da matéria formado por moléculas (bolas roxas) ligadas eletricamente por 'molas'.

## Temperatura Absoluta (Lei de Charles e a escala Kelvin)

A unidade que estamos mais acostumados a usar de temperatura é o grau Celsius (ºC). Talvez a temperatura ambiente agora seja em torno de 25ºC, ou talvez 15ºC, quem sabe até mesmo -1ºC. A escala Celsius permite valores negativos de temperatura. Portanto, vamos definir uma escala absoluta de temperatura em relação a algum valor de referência. O referencial adotado é o ponto triplo da água. O especial desse ponto, corresponde à temperatura de 0ºC, é que a água coexiste em equilíbrio nas três fases: sólida, líquida e gasosa. Se um gás é aquecido a volume constante, a sua pressão aumenta linearmente proporcional ao aumento de temperatura, esta é a lei de Charles (ver Figura 72). Se for usado um novo tipo de gás, o mesmo comportamento é obtido. Quando é feita uma extrapolação (linhas tracejadas), corresponde à pressão zero (vácuo), a temperatura obtida, para qualquer tipo de gás, é em torno de -273,16ºC. Isso indica que esta temperatura é o limite inferior, pois nunca se conseguiu uma temperatura menor que esse valor. Portanto, a escala de temperatura Kelvin define esse ponto como sendo o zero Kelvin e o ponto triplo da água (T=0ºC) com sendo o 273K. Na verdade, a escala Kelvin é um translado de 273 da escala Celsius, ou seja,

$$\boxed{T_K = T_C + 273 \ \ (K).} \tag{3.1}$$

Para converter a temperatura na escala Celsius para a Kelvin, basta apenas somar com 273. A unidade de temperatura definida pelo S.I.U. é o *Kelvin* (K). Aplicando uma variação (*final menos inicial*) na equação (3.1), temos que,

$$\boxed{\Delta T_K = \Delta T_C} \tag{3.2}$$

ou seja, uma variação de temperatura na escala Kelvin corresponde à mesma variação de temperatura na escala Celsius. Este resultado será de grande utilidade, pois todos os problemas que envolverem variação de temperatura, não será necessário converter de uma escala de temperatura para a outra.

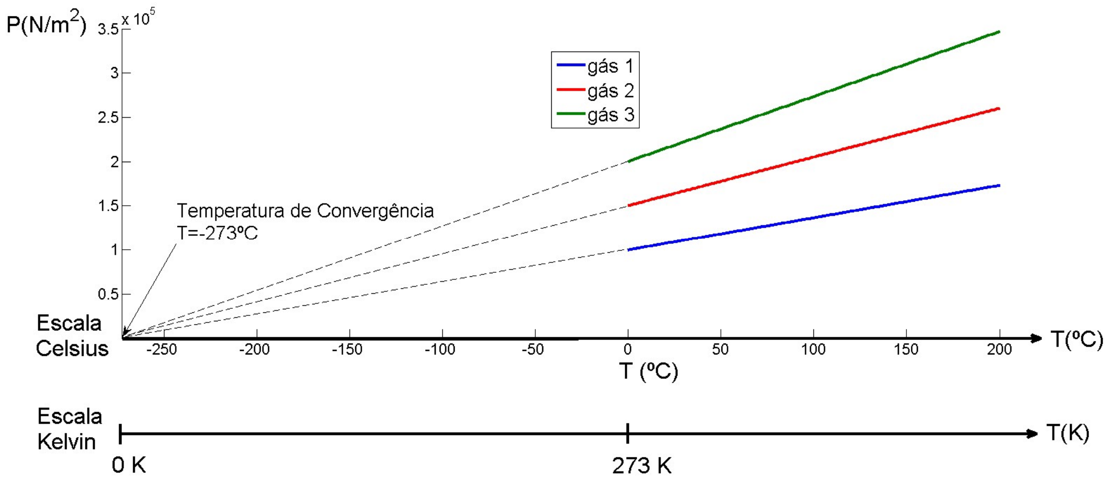



**Figura 72** - Escala Kelvin de temperatura absoluta.

*Exemplo*

**E.1)** Converter a temperatura de 25ºC para a escala Kelvin.

Solução: $T_K = T_C + 273\,K \Rightarrow T_K = 25 + 273\,K \Rightarrow \quad T_K = 298K$ .

**E.2)** Calcule a variação de temperatura na escala Celsius e na escala Kelvin entre $T_i$=58ºC e $T_f$=72ºC.

Solução: Variação na escala Celsius: $\Delta T_C$= $T_f$ - $T_i$=72ºC-58ºC=***14ºC***.

Variação na escala Kelvin: $T_f$=72+273 *K*=345*K* e $T_i$=58+273 *K*=331*K*. $\Delta T_K$= $T_f$ - $T_i$=345*K*-331*K*=**14*K***. Que é a mesma variação de temperatura na escala Celsius.

## Lei zero da Termodinâmica

Vamos imaginar três copos **A**, **B** e **C**. O corpo **A** está em contato térmico com o corpo **C**, mas isolado termicamente do corpo **B**. O corpo **B** está em contato térmico com o corpo **C**, mas isolado do corpo **A**. Portanto, o corpo **A** está em equilíbrio térmico com o corpo **C**, assim como o corpo **B** também está em equilíbrio térmico com o corpo **C** (ver Figura 73). Más, o corpo **A** também está em equilíbrio térmico com o corpo **B**? Para responder essa pergunta, vamos definir, a seguir, a lei zero da termodinâmica. "Dois corpos estão em equilíbrio térmico somente se eles possuem a mesma temperatura". Agora vamos responder à pergunta anterior. O corpo **A** possui a mesma temperatura que o corpo **C**, assim como o corpo **B** possui a mesma temperatura que o corpo **C**, portanto o corpo **A** e **B** também estão na mesma temperatura ou em equilíbrio térmico.

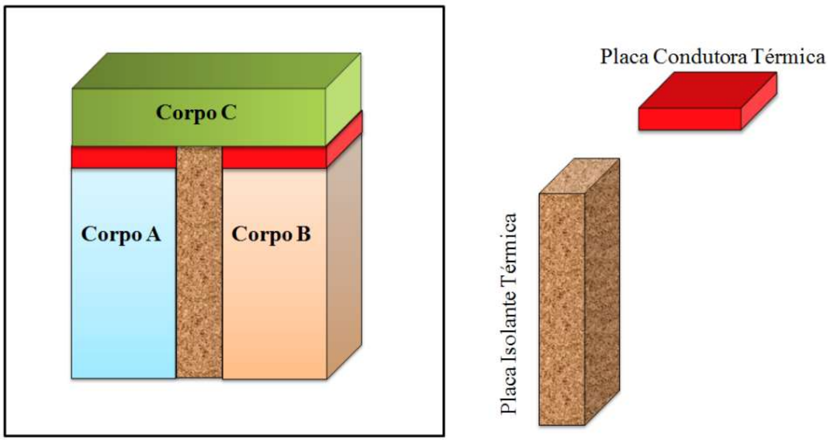



Figura 73 – Lei zero da termodinâmica. Dois corpos estão em equilíbrio térmico somente se eles estão na mesma temperatura.

# Troca de Calor mediante variação de temperatura

Nesta seção, vamos estudar a troca de calor devido a uma diferença de temperatura. Isso que dizer que o calor trocado é utilizado pelo corpo para aumentar ou diminuir a sua temperatura. Podemos dizer que um corpo possui temperatura, mas nunca podemos dizer que um corpo possui Calor. Definimos Calor como sendo uma espécie de energia em movimento devido a uma variação de temperatura. Portanto, Calor (*ou Energia Térmica*) é relacionado à variação de temperatura. O calor irá fluir de forma espontânea, da região de maior temperatura para a região de menor temperatura. Portanto, um corpo (o nosso sistema) irá trocar Calor (ganhar ou perder) se este estiver em uma temperatura diferente da sua vizinhança ou colocado em contato térmico com outro corpo a temperatura diferente.

## Troca de Calor por Sólidos e Líquidos

Sempre haverá uma troca de calor entre o sistema e vizinhança se houver uma diferença de temperatura entre eles. Esse calor trocado será grande se a diferença de temperatura for grande, e será pequeno se a diferença de temperatura for pequena. Portanto, o calor trocado Q deve ser proporcional à diferença de temperatura ΔT, ou seja;

$$\boxed{Q = C \cdot \Delta T \quad (cal \text{ ou } J)} \qquad \text{Calor Trocado} \tag{3.3}$$

onde C é a capacidade térmica do corpo (sistema) que varia de material a material (ouro, prata, cobre, madeira, etc) e ΔT é a variação de temperatura. Será muito comum de agora em diante, se usar a unidade caloria (*cal*) como unidade de energia. A relação entre caloria e joules é: $\boxed{1cal = 4.19J}$. Assim como massa ***m*** é a propriedade que um corpo possui de resistir a uma variação na sua velocidade, podemos interpretar *C* como sendo a propriedade que o corpo possui de resistir a uma variação na sua temperatura (espécie de inércia térmica; $\Delta T = \frac{Q}{C}$, se $C \to \infty$, então $\Delta T = 0$, o sistema não muda de temperatura).

**Calor específico c** - A capacidade térmica C apresenta o inconveniente de depender da massa do corpo. Para eliminar essa dependência com a massa, dividimos a capacidade térmica pela massa e chamamos essa razão de calor especifico $c = \frac{C}{m}$, portanto $C = c \cdot m$, substituindo em (3.3),

$$\boxed{Q = m \cdot c \cdot \Delta T, \quad (cal \text{ ou } J)} \qquad \text{Calor Trocado} \tag{3.4}$$

onde *m* é a massa do corpo *[m]=g* , *c* é o calor especifico*[c]=cal/(gºC)* (que depende de cada material, ver Tabela 6) e *ΔT* é a variação de temperatura [*ΔT*]=*ºC=K* (ver equação (3.2)). O calor *Q* será positivo (calor absorvido) se *ΔT* for positivo (o corpo esquenta, pois $T_f > T_i$) e *Q* será negativo (calor rejeitado) se *ΔT* for negativo (o corpo esfria, pois $T_f < T_i$)). A unidade de *Q* pode ser o *cal* (caloria) ou o *J* (Joule) vai depender da unidade de *c*. Novamente, *1cal=4.19J*. Para sólidos ou líquidos, podemos escrever a massa como sendo $m = \rho \cdot V$, onde *ρ* é a densidade do corpo ($kg/m^3$), *V* é o volume em $m^3$ e *m* é a massa em *Kg*. Fique atento para não misturar as unidades. A equação (3.4) é válida quando não existe variação de volume do corpo m. Neste caso, estamos desprezando a retração ou dilatação térmica que o corpo sofre devido à variação da sua termperatura.

| **Substância** | **Calor Específico [c]=cal/(g·ºC)** | **Estado** |
|---|---|---|
| Água doce | 1,0 | Líquido |
| Água do mar | 0,93 | Líquido |
| Etanol | 0,58 | Líquido |
| Gelo (-10ºC) | 0,55 | Sólido |
| Madeira | 0,42 | Sólido |
| Alumínio | 0,215 | Sólido |
| Vidro | 0,2 | Sólido |
| Granito | 0,19 | Sólido |
| Cobre | 0,0923 | Sólido |
| Latão | 0,092 | Sólido |
| Prata | 0,0564 | Sólido |
| Mercúrio | 0,033 | Líquido |
| Tungstênio | 0,0321 | Sólido |
| Chumbo | 0,0305 | Sólido |

**Tabela 6 -** Calores específicos de algumas substâncias. A água é um composto que possui um grande calor especifico, portanto, oferece grande resistência a variar a sua temperatura. Fonte:https://pt.wikipedia.org/wiki/Capacidade_térmica.

Vamos imaginar dois corpos **A** e **B** separado um do outro. O corpo **A** se encontra na temperatura $T_A$, possui calor especifico $c_A$ e massa $m_A$. Já o corpo **B** está a uma temperatura $T_B$, o seu calor especifico vale $c_B$ e massa $m_B$. Quando esses blocos são colocados em contato térmico, o calor ira fluir do corpo de maior temperatura para o corpo de menor temperatura até o equilibro térmico ser atingido, ou seja, até os corpos possuírem a mesma temperatura, conforme ilustrado na Figura 74.

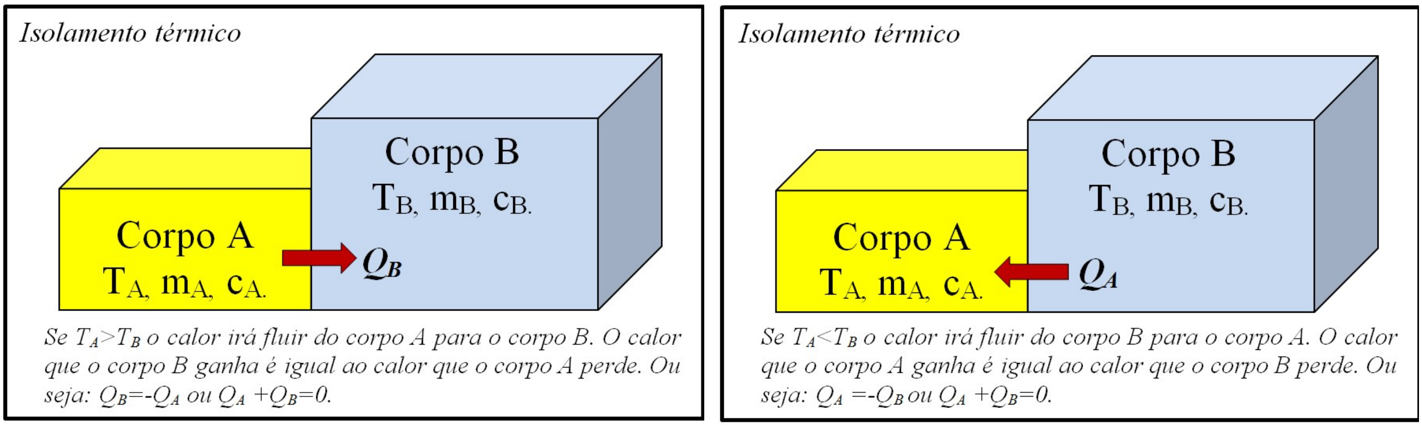



Figura 74 – O corpo A troca calor com o corpo B se eles forem colocados em contato térmico e se houver uma diferença de temperatura entre eles. A transferência de calor cessa quando os blocos atingem a mesma temperatura (entram em equilíbrio térmico).

Quando os blocos da Figura 74 são colocados em contato térmico, eles irão trocar calor até atingir a temperatura de equilíbrio. Se um corpo ganha calor, o outro corpo perde calor. Em módulo, o calor ganho por um corpo é igual ao calor perdido pelo outro corpo (pela conservação da energia). Em ambos os casos, a temperatura final de equilíbrio é obtida impondo que $Q_A + Q_B = 0$, ou seja, $m_A \cdot c_A \cdot (\underbrace{T_{eq}}_{final} - \underbrace{T_A}_{inicial}) + m_B \cdot c_B \cdot (\underbrace{T_{eq}}_{final} - \underbrace{T_B}_{inicial}) = 0$.

Isolando a temperatura de equilíbrio $T_{eq}$, temos

$$\boxed{T_{eq} = \frac{m_A \cdot c_A \cdot T_A + m_B \cdot c_B \cdot T_B}{m_A \cdot c_A + m_B \cdot c_B},} \tag{3.5}$$

onde $T_{eq}$ é a temperatura de equilíbrio térmico entre os dois blocos. Essa temperatura de equilíbrio deve estar compreendida no intervalo $T_{menor} < T_{eq} < T_{maior}$. A temperatura de equilíbrio representa uma <u>média ponderada</u>, onde os '*pesos estatísticos*' que pondera a temperatura é o produto $m \cdot c$. A equação (3.5) é valida apenas para processos que envolvem apenas variação de temperatura e não ocorre mudança de estado da matéria (transição de fase). Vamos analisar um caso particular da equação (3.5) fazendo $m_A = m_B = m$ e $c_A = c_B = c$ (mesma massa e mesmo calor especifico),

$$T_{eq} = \frac{m \cdot c \cdot T_A + m \cdot c \cdot T_B}{m \cdot c + m \cdot c} = \frac{\cancel{m \cdot c} \cdot (T_A + T_B)}{2 \cdot \cancel{m \cdot c}} = \frac{(T_A + T_B)}{2} \text{ (média aritmética).}$$

Exemplo

**E.1)** Considere dois blocos A e B. O bloco A é feito de alumínio, possui massa $m_A$=400g e está a uma temperatura inicial $T_A$=20ºC. O bloco B é feito de cobre, sua massa é $m_B$=600g e encontra-se a uma temperatura inicial de $T_B$=50º. Calcule a temperatura de equilibro quando estes blocos são colocados em contato térmico. Consulte a Tabela 6 para obter os calores específicos. *Solução:*

$$T_{eq} = \frac{m_{\text{aluminio}} \cdot c_{\text{aluminio}} \cdot T_{\text{aluminio}} + m_{\text{cobre}} \cdot c_{\text{cobre}} \cdot T_{\text{cobre}}}{m_{\text{aluminio}} \cdot c_{\text{aluminio}} + m_{\text{cobre}} \cdot c_{\text{cobre}}} = \frac{400\cancel{g} \cdot 0,215 \frac{\cancel{cal}}{\cancel{g} \cdot \cancel{{}^{o}C}} \cdot 20\cancel{{}^{o}C} + 600\cancel{g} \cdot 0,0923 \frac{\cancel{cal}}{\cancel{g} \cdot \cancel{{}^{o}C}} \cdot 50\cancel{{}^{o}C}}{400\cancel{g} \cdot 0,215 \frac{\cancel{cal}}{\cancel{g} \cdot {}^{o}C} + 600\cancel{g} \cdot 0,0923 \frac{\cancel{cal}}{\cancel{g} \cdot {}^{o}C}} = \underline{31,7^{o}\,C}$$

Análise do resultado: O valor encontrado para a temperatura de equilíbrio se encontra dentro do intervalo de temperatura *20ºC < ($T_{eq}$ = 31,7ºC)< 50ºC.*

Caso geral da temperatura de equilíbrio para *n* corpos colocados em contato térmico e isolados do meio externo

$$T_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot c_i \cdot T_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot c_i}. \tag{3.6}$$

Caso particular da equação (3.6) para *n=3* corpos:

$$T_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \cdot c_i \cdot T_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i \cdot c_i} = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_2 + m_3 \cdot c_3 \cdot T_3}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2 + m_3 \cdot c_3}.$$

Em dias frios, quando tocamos em um objeto de metal e em um objeto de madeira, temos a sensação que o metal está mais frio que a madeira. Mas, na verdade, os dois estão na mesma temperatura (em equilíbrio térmico com o ambiente). A sensação de mais frio no metal ocorre porque este possui menor calor especifico se comparado com o da madeira, portanto quando você toca no metal, este esquenta rapidamente pelo calor absorvido da sua mão. O metal ganha calor e esquenta, a sua mão perde calor e esfria, dai a sensação do metal estar mais frio que a madeira. A madeira resiste mais a absorver calor da sua mão por possuir maior calor especifico que o metal.

**Calor específico molar cv (a volume constante)** – Também podemos dividir a capacidade térmica C pelo número de mol $n$ (será visto mais adiante) de uma substância qualquer. Essa razão é $c_V = \frac{C}{n}$, portanto $C = n \cdot c_V$ e substituindo em (3.3) temos a expressão para a troca de calor $Q = n \cdot c_V \cdot \Delta T$.

## Troca de Calor sem variação de temperatura

Anteriormente, o calor trocado era utilizado pelo sistema para aumentar ou diminuir a sua temperatura. Agora, o calor trocado será utilizado pelo sistema para executar uma transição de fase (mudança de estado). Os principais estados da matéria são: estado sólido, líquido e gasoso. Transição de fase ocorre à temperatura constante (sem variação de temperatura). A expressão para a troca de calor durante a transição de fase é:

$$Q = \pm m \cdot L \tag{3.7}$$

onde $m$ é a massa do corpo e $L$ é o chamado calor latente de transformação. Essa transformação pode ser de sólido para líquido, de líquido para vapor, e assim por diante. Usa-se o sinal positivo (+) quando o calor for absorvido pelo corpo e o sinal negativo (-) deve ser usado quando o calor for rejeitado (liberado) pelo corpo, conforme esquematizado na Figura 75.

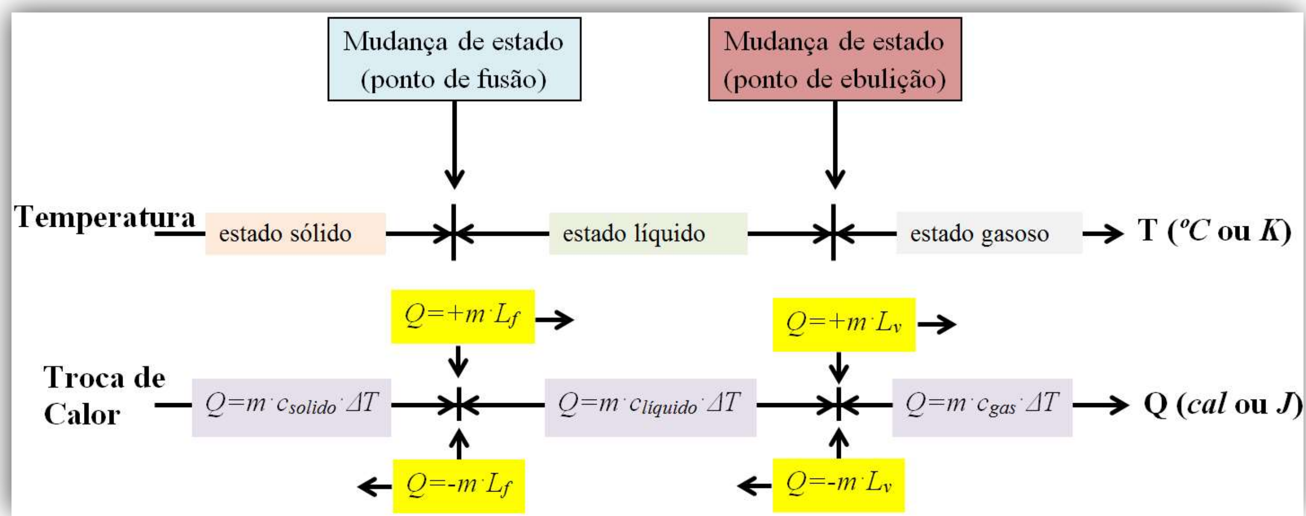



Figura 75 – Fluxograma esquemático para os principais estados da matéria definidos pela temperatura ***T*** e para a troca de calor **Q** quando este é usado para variar a temperatura do corpo ***ΔT*** ou para este executar uma transição de fase envolvendo o calor de transformação ***L***.

Na Tabela 7, mostramos alguns elementos com seus calores de tranformaçoes e suas respectivas temperaturas críticas (ponto de fusão e ebulição). No capítulo de fluidos, temos usado muito o mercúrio para calcular, por exemplo, pressão. O especial do mercúrio é que ele é líqudo para temperaturas entre -39ºC e 357ºC. O mercúrio é sólido para temperaturas abaixo de -39ºC e vapor (gás) para temperaturas superiores a 357ºC. Agora veja que o chumbo é líquido para temperaturas entre 328ºC e 1744ºC; sólido para temperaturas abaixo de 328ºC e vapor para temperaturas acima de 1744ºC. Tudo isso, para pressão de uma atmosfera $P_{atm}$.

| Substância | Ponto de fusão (ºC) | Calor Latente de Fusão $L_f$ (cal/g) | Ponto de ebulição (ºC) | Calor Latente de vaporização $L_v$ (cal/g) |
|---|---|---|---|---|
| Água $H_2O$ | 0 | 79,50 | 100 | 538,42 |
| Mercúrio $Hg$ | -39 | 2,72 | 357 | 70,64 |
| Oxigênio $O_2$ | -218 | 3,32 | -182 | 50,84 |
| Nitrogênio $N_2$ | -210 | 6,1 | -196 | 48,0 |
| Hidrogênio $H_2$ | -259 | 13,84 | -252.7 | 108,59 |
| Chumbo $Pb$ | 328 | 5,54 | 1744 | 204,77 |
| Cobre $Cu$ | 108 | 49,4 | 2595 | 1128,87 |

**Tabela 7** – Ponto de fusão, ebulição e calores de transformações de alguns elementos, para pressão de uma atmosfera $P_{atm}$.

## Caso particular para a água

A pressão de uma atmosfera ($1P_{atm}=10^5 N/m^2$), a água congela a temperatura de *0ºC(273K)* e entra em ebulição para temperatura de *100ºC(373K)*. Quando a água passa do estado sólido para o estado líquido, chamamos esse processo de fusão e o calor latente de transformação *L* passa a ser chamado calor latente de fusão $L_f$. Quando a água passa do estado líquido para o estado gasoso, chamamos esse processo de vaporização e, novamente, o calor latente de transformação passa a ser chamado calor latente de vaporização $L_v$. A pressão de uma atmosfera ($1P_{atm}=10^5 N/m^2$) e a temperatura de 0ºC, o calor latente de fusão é $L_f \approx 80cal/g$. Este valor significa que é necessário adicionar ou remover *80cal* por grama de gelo para ser derretido ou água que é congelada, respectivamente. Para temperatura de ebulição de *100ºC* o calor latente de vaporização é $L_v \approx 540cal/g$. Esse número que dizer que é necessário adicionar ou remover *540cal* por grama de água que é vaporizada ou condensada, respectivamente.

$$
\begin{aligned}
Q &= \pm m \cdot L_f, \quad L_f = 80\text{cal/g. Usa-se (+) sólido} \rightarrow \text{líquido. E (-) líquido} \rightarrow \text{sólido.} \\
Q &= \pm m \cdot L_v, \quad L_v = 540\text{cal/g.Usa-se (+) líquido} \rightarrow \text{vapor. E (-) vapor} \rightarrow \text{líquido.}
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Exemplos

**E.1)** Calcule a quantidade de calor que se deve adicionar a 100g de gelo, estando incialmente a temperatura de 0ºC, para derretê-lo completamente.

Solução: Q=+m·$L_f$=+100g·80cal/g=+8000cal

**E.2)** Da questão anterior, são necessárias 8000cal para derreter completamente 100g de gelo. Caso a energia adicionada seja apenas 5400cal, calcule a massa que gelo que derrete e a massa de gelo que fica sólida.

Solução: a massa de gelo que ira derreter será: 5400cal=m·80cal/g, m=67,5g de gelo será derretido e o restante 100g-67,5g=<u>32,5g</u> permanecerá gelo. São necessárias 8000cal para derreter os 100g de gelo (estando incialmente a temperatura de 0ºC).

**E.3)** Calcule a quantidade de calor que se deve adicionar a 100g de água, estando incialmente a temperatura de 100ºC, para vaporizá-la completamente.

*Solução: Q=+m·$L_v$+100g·540cal/g=+54000cal (são necessárias 54000 cal para vaporizar completamente 100g de água estando na temperatura de 100ºC). Caso apenas 30000cal fossem adicionadas, a quantidade de água vaporizada seria 30000cal=m·540cal/g, <u>m=55,56g</u> e o restante (100g-55,56g)=<u>44,44g</u> permaneceriam no estado líquido na temperatura de 100ºC.*

**E.4)** Um copo contém 100ml de água na temperatura de 27ºC.

a) Calcular a quantidade de calor (em *cal* e *J*) que deve ser adicionada a essa água, para aquecê-la até a temperatura final de 90ºC. Dado *1cal=4,19J.*

Solução: Neste caso, o calor adicionado será utilizado apenas para variar a temperatura da água, pois no intervalo de temperatura [27ºC a 90ºC] não envolve transição de fase (ver Tabela **7**). Logo, a expressão para o calor adicionado é: $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ e *100ml* de água é equivalente a 100g (*m=ρ·V*). O calor específico *c* da água você pode encontrar Tabela 6 (*c=1cal/(g·ºC)* ).

$$Q = 100\cancel{g} \cdot \frac{1cal}{\cancel{g}\,\cancel{^{o}C}} \cdot (90\cancel{^{o}C} - 27\cancel{^{o}C}) = \boxed{6300cal}\left(\frac{4.19J}{1cal}\right) = \boxed{26397J}.$$

b) Se você utilizar um aquecedor elétrico de *800W(=800J/s)* '*rabo quente'*, calcule o tempo que irá levar para aquecer a água até a temperatura final do item a.

Solução: Como $Potência = \dfrac{Energia \quad ou \quad Calor}{tempo}$

$P_{otencia} = \dfrac{W}{\Delta t}$. Isolando Δt: $\Delta t = \dfrac{W}{P_{otencia}} = \dfrac{26397J}{800J/s} = \boxed{33s}$.

W= é o trabalho em forma de calor (ou energia), que já foi calculado no item a.

**E.5)** Calcular o calor necessário para vaporizar completamente 1g de gelo, estando inicialmente a temperatura de -30ºC.

*Solução:* No intervalo de temperatura do problema [-30ºC a 100ºC], envolve duas transições de fase: na temperatura de 0ºC e em 100ºC.

*Primeiro passo*: aquecer o gelo de -30ºC até a temperatura final de 0ºC para então, derretê-lo.

$$Q_1 = m_{gelo}\cdot c_{gelo}\cdot \Delta T \Rightarrow Q_1 = 1\cancel{g}\cdot 0,55\frac{cal}{\cancel{g}\cdot{}^{o}\cancel{C}}\cdot(0^{o}\cancel{C}-(-30^{o}\cancel{C})) = \underline{16,5cal}|$$

*Segundo passo*: derreter completamente o gelo:

$$Q_2 = +m_{gelo}\cdot L_f \Rightarrow Q_2 = 1\cancel{g}\cdot 80\frac{cal}{\cancel{g}} = \underline{80cal}|$$

*Terceiro passo*: com o gelo derretido, agora vamos aquecer a água de 0ºC até a temperatura final de 100ºC.

$$Q_3 = m_{agua}\cdot c_{agua}\cdot \Delta T \Rightarrow Q_3 = 1\cancel{g}\cdot 1.0\frac{cal}{\cancel{g}\cdot\cancel{{}^{o}C}}\cdot(100\cancel{{}^{o}C}-0\cancel{{}^{o}C}) = \underline{100,0cal}|$$

*Quarto passo*: com a água na temperatura de 100ºC, agora vamos vaporizá-la completamente.

$$Q_4 = +m_{agua}\cdot L_v \Rightarrow Q_4 = 1\cancel{g}\cdot 540\frac{cal}{\cancel{g}} = \underline{540cal}|$$

A energia total é a soma do calor usado em cada passo:
$Q_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 16,5cal + 80cal + 100cal + 540cal = \underline{736,5cal}|$. Este é o calor necessário para vaporizar *1g* de gelo, inicialmente na temperatura de *-30ºC*.

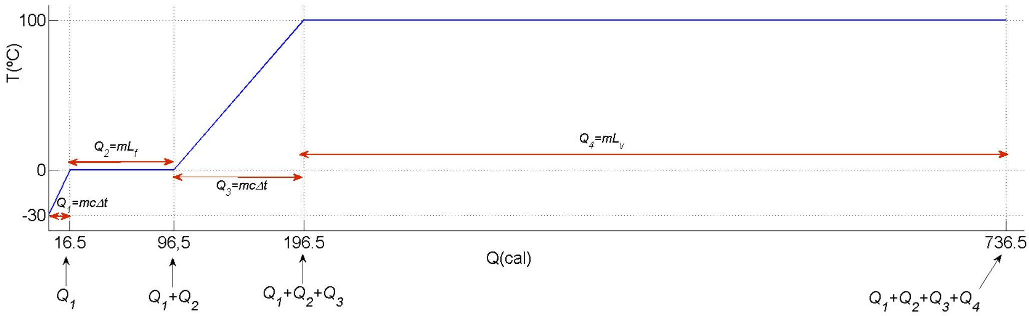



Figura 76 – Calor acumulado em cada passo necessário para vaporizar completamente 1g de gelo inicialmente na temperatura de -30ºC.

b) Calcule novamente o calor necessário para vaporizar *1kg* do mesmo gelo do item a.

*Solução*: Como 1kg=1000g, então o calor necessário é $1000\cdot(736,5cal) = 736500cal$.

**E.6)** Calcule a quantidade de energia (em cal) necessária para vaporizar completamente 5g de mercúrio, estando na temperatura de -10ºC. Consulte a Tabela 6 e a Tabela 7. *Resposta: 413,8cal.*

Sobre a evaporação: quando uma massa *m* de água passa do estado líquido para o estado gasoso, a energia necessária para essa água evaporar é $+m\cdot L_V$. Esta energia é cedida pela superfície, que perde calor e consequentemente esfria. Portanto, a evaporação é um processo de resfriamento, que é o principal mecanismo usado por alguns animais e vegetais, em forma de 'suor' ou transpiração (ver figura ao lado). A evaporação também ocorre à temperatura ambiente, para *37ºC* o calor latente de vaporização é *577cal/g*. É necessária uma energia maior, pois a água se encontra a uma menor temperatura, se comparado com o valor para o ponto de ebulição da água (*100ºC*). É por isso que temos a sensação de frio ao sair de um banho quente, pois a água aquecida sobre o nosso corpo tem maior facilidade de evaporar, carregando calor da nossa pele.

Para você se convencer que a evaporação é realmente um processo de resfriamento, ao sair de um banho, com o corpo parcialmente molhado, fique bem em frente a um ventilador ligado. Se você sentir uma brisa agradável, saiba que é por causa da água evaporado e carregando calor da sua pele que ligeiramente esfria. O ar em alta velocidade do ventilador faz com que $L_V$ da água no seu corpo seja menor, devido à transferência de parte da energia cinética do ar expelido pelo ventilador.

Sobre a Condensação: A condensação ocorre quando a água passa do estado gasoso para o estado líquido. Neste caso, a massa *m* de vapor d'água precisa perder $Q=m \cdot L_v$ de energia. Essa energia perdida pelo vapor d'água é ganha pela superfície na qual o vapor condensou. Como consequência, a superfície ligeiramente esquenta. Portanto, a Condensação é um processo de aquecimento. Por isso em dias muito húmido, temos a sensação de maior calor, pois o vapor d'água está constantemente condensando na nossa pele. Quando a umidade do ar é muito elevada, o vapor d'água começa a condensar nas paredes do interior da casa, criando o indesejado efeito de *mofo*, como ilustrado na figura ao lado.

## Ponto de Orvalho

Ponto de Orvalho é a temperatura abaixo da qual a água no estado gasoso começa a condensar, dando surgimento a neblina ou cerração. Nestas condições, a umidade relativa do ar atinge o patamar de 100% o que significa dizer que o ar se encontra completamente saturado de vapor d'água.

Quando você coloca um líquido gelado dentro de um copo, na temperatura ambiente, observe que a superfície externa do copo fica com 'gotículas' de água. Isso ocorre porque a temperatura do ar em torno do copo cai abaixo do ponto de orvalho fazendo com que o vapor d'água do ar condense na superfície desse copo. Se o líquido 'gelado' estiver a uma temperatura acima do ponto de orvalho, nada disso acontece.

## Exercícios

**1)** Uma pessoa consome diariamente, em média, 2500kcal em alimentos. Calcule essa energia em Joules (J).

**2)** Dois corpos (A e B), com massas iguais, estão à mesma temperatura. O corpo **A** tem capacidade térmica $C_A$=10J/K e o corpo **B,** $C_B$=15J/K. Qual corpo aquece mais rápido, sabendo que em ambos são adicionados à mesma quantidade de calor, e qual corpo oferece maior resistência a uma variação de temperatura?

**3)** Dois blocos isolados (**A** e **B**), de massas $m_A=1.2kg$ ($c_A = 1200J/(kg \cdot {}^o c)$ e $m_B=0,8kg$ ($c_B = 720J/(kg \cdot {}^o c)$), estão inicialmente a temperatura de $T_A=50^oC$ (bloco **A**) e $T_B=70^oC$ (bloco **B**). Os blocos são, então, colocados em contato térmico um com o outro. Calcule a temperatura de equilíbrio dos blocos.

**4)** Calcule a quantidade de calor (energia em *J*) necessária para aquecer *3L* de água de 20ºC até 100ºC. Dados: $c_{agua} = 4190J/(kg\cdot^{o}C), \quad 1L_{agua} \Rightarrow 1kg_{agua}$.

**5)** Calcule a quantidade de calor necessária para vaporizar completamente 200g de gelo, estando inicialmente a uma temperatura de *-40 ºC* ($c_{gelo}=0.45cal/(g^oC)$).

**6)** Uma amostra de *500g*, de certa substância desconhecida, quando se removeu *50000J* de calor, sua temperatura variou *-10ºC*. Qual é a variação de temperatura dessa amostra quando se adiciona *100000J* em forma de calor?

**7)** Para se manter aquecido em seus estudos durante uma noite fria, um estudante de Agronomia decide prepara um chimarrão colocando inicialmente um aquecedor elétrico de 500W(‘*rabo quente*’) em 0,5L de água. Calcule:

a) O calor transferido para a água para elevar sua temperatura de 12ºC até 90ºC.

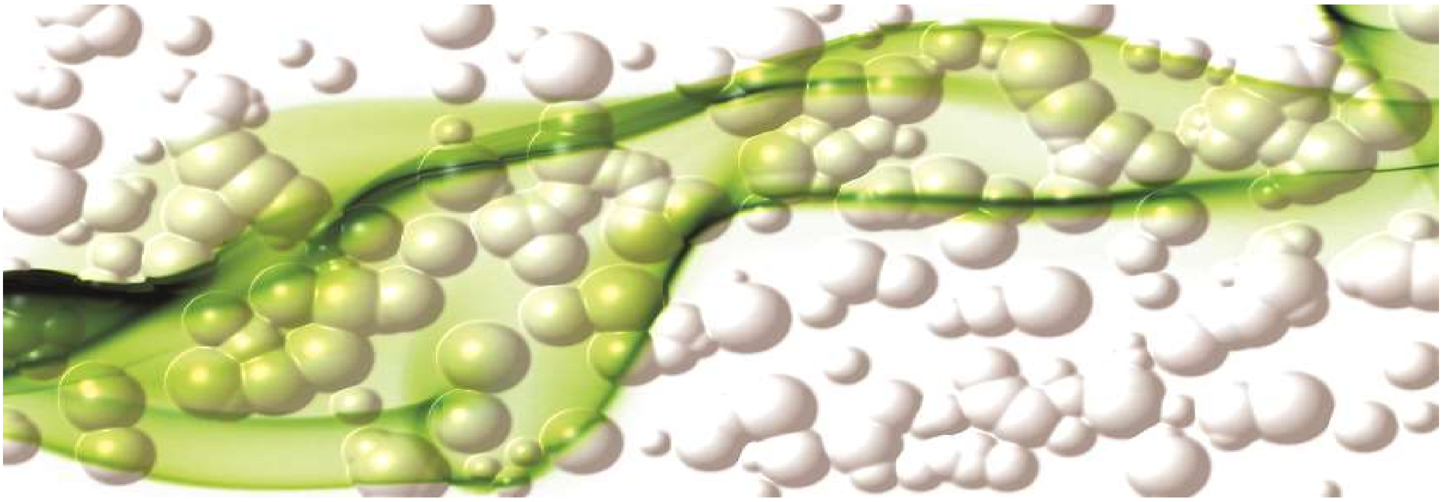
b) O tempo é necessário para aquecer a água do item (a). Considere que toda potência do aquecedor seja transformada em calor para aquecer a água.

**8)** Em dias muito frios, um mecanismo importante na perda de calor pelo corpo humano é a energia gasta para aquecer o ar nos pulmões a cada respiração.
a) Em um dia de inverno muito frio, quando a temperatura é -10ºC calcule é a quantidade de calor necessária para aquecer *0,5L* de ar trocado a cada respiração até atingir a temperatura do corpo humano de 37ºC. Considere o calor especifico do ar igual a *1020J/(kg.K)* e a densidade *1,2kg/m³*.
b) Calcule o calor perdido por hora considerando 20 respirações por minuto.

**9)** Um cubo de 30g de gelo na temperatura de -10ºC é colocado em uma garrafa térmica já contendo 300g de água na temperatura de 30ºC. Calcule a temperatura de equilíbrio térmico do sistema.

| ***Respostas*** | |
|---|---|
| **1)** $1,05\cdot10^7 J$ | **6)** 20 ºC |
| **2)** | **7)** (a) *163410J; (b) 326,8s* |
| **3)** 55,7ºC | **8)** (a*) 28,76 J* (b) *34512J* |
| **4)** *1005600J* | |
| **5)** *147600cal* | |

## Gases Ideais



Gás ideal é um gás não interagente, em que as moléculas que compõem o gás não interagem entre si, não há interação de origem elétrica, conforme ilustração na Figura 77. Isso implica que a energia total do gás (das *N* moléculas) é atribuída somente a energia cinética das moléculas. Todo esse capítulo é baseado em gases ideais. No mundo real, as moléculas que compõem o gás interagem entre si, portanto o gás ideal é apenas uma idealização que fornece bons resultados para gases com baixa densidade, onde as moléculas estão a grandes distâncias umas das outras.


Figura 77 – Na figura (a) tem-se um gás real, onde as moléculas (*bolas*) interagem entre si (a interação está representada por '*mola*' ligando uma molécula a outra). Na figura (b), para um gás ideal, não existe interação molecular.

## Elementos Químicos e Tabela Periódica

- Número de Avogadro $N_A$ – é a quantidade de átomos de carbono-12 contido em uma amostra de 12g. O seu valor numérico é

$$\mathrm{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \, partícula \,/\, mol.$$

- Número de mol ***n*** - é definido como sendo a razão entre o número de partículas *N* e o número de Avogadro $N_A$. Um *mol* é a quantidade de átomos em 12g de Carbono (C-12). Usa-se o *cabono-12* para diferenciar do isótopo *carbono-14*, que é radioativo. Esse é o referencial usado para quantificar o mol. A unidade *mol* é umas das sete grandezas elementares, [*n*]=*mol*.

$$n = \frac{N}{N_A} \quad \Rightarrow \quad N = n \cdot N_A .$$

Com a relação $N = n \cdot N_A$, para **um** mol de uma substância ***X***, tem-se $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ *partícula* X.

- Massa do gás ***m*** – a massa do gás pode ser calculada pela relação

$$m = n \cdot M \quad (g)$$

onde $\boldsymbol{M}$ é a massa molar do gás (Massa Atômica), $[M]=g/mol$ e $[m]=g$. Para calcular essa massa molar, é necessário usar a tabela periódica dos elementos (ver Figura 78). $\boldsymbol{M}$ é igual a *Massa Atômico* do elemento químico ou da composição entre eles. A massa molar $\boldsymbol{M}$ do elemento oxigênio $\boldsymbol{O}$ é 16g/mol, já do gás oxigênio $\mathbf{O_2}$ é: $2\cdot\underbrace{(16\text{g/mol})}_{O}=32\text{g/mol}$ e do gás ozônio $\mathbf{O_3}$ é $3\cdot\underbrace{(16\text{g/mol})}_{O}=48\text{g/mol}$. A massa molar $\boldsymbol{M}$ do gás metano $CH_4$ é:

$$\underbrace{(12\text{g/mol})}_{C}+4\cdot\underbrace{(1\text{g/mol})}_{H}=16\text{g/mol}.$$

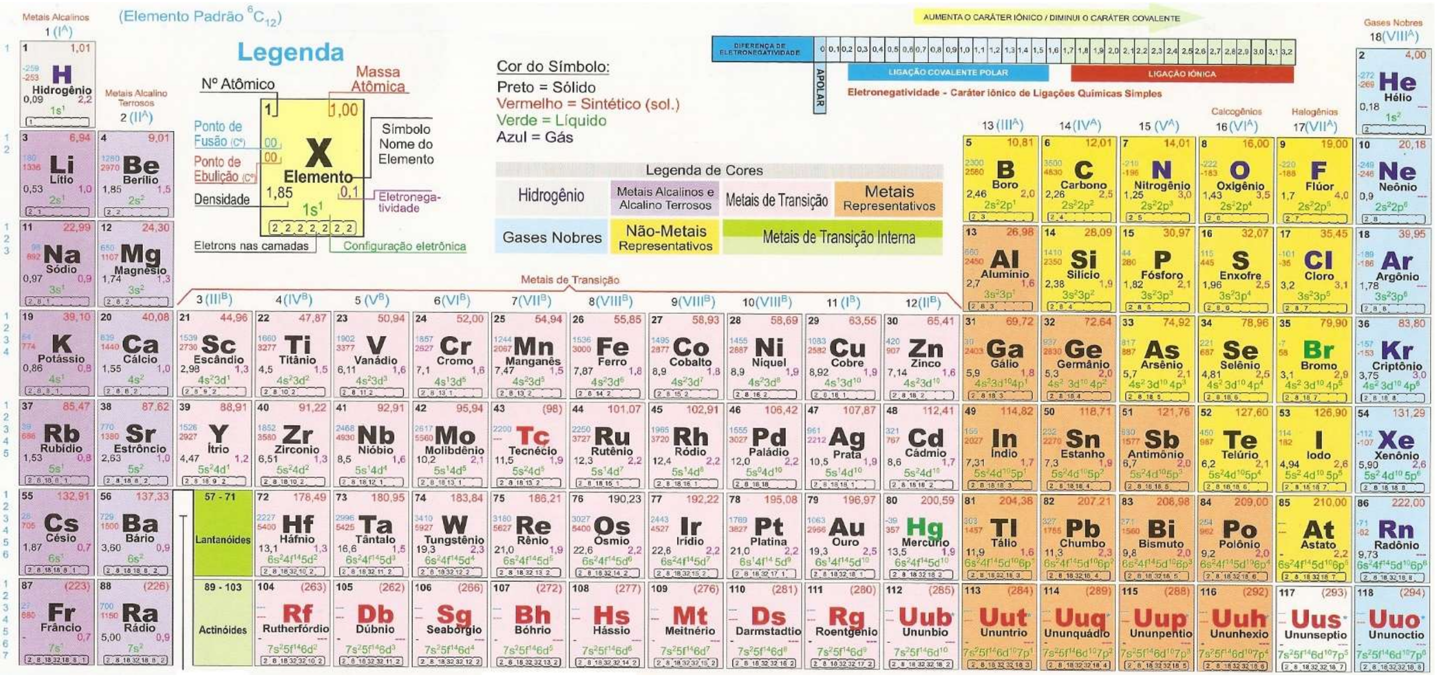



**Figura 78** – Tabela Periódica dos elementos.

Exemplos

**E.1)** Calcular o número de mol $n$ e o número de moléculas $N$ de água $H_2O$ contida em 1L .
Solução: Um litro de água corresponde a massa de: $m=\rho\cdot V=1000kg/m^3\cdot 10^{-3}m^3=\underline{1kg}=\underline{1000g}$ ).

$$M=\text{Massa Molar Água } H_2O = 2\cdot\underbrace{(1\text{g/mol})}_{H}+\underbrace{16\text{g/mol}}_{O}=\underline{18\text{g/mol}}|$$

$$\text{n=número de mol}\Rightarrow[\text{n}]=\text{mol} \quad \text{n=}\frac{m}{M}=\frac{1000\cancel{g}}{18\cancel{g}/mol}=\underline{55,56mol}|$$

$$\text{número de móleculas } N \text{ de } H_2O\text{: } N=n\cdot N_A \quad\Rightarrow\quad N=55,56\cancel{mol}\cdot 6,02\cdot 10^{23}molécula/\cancel{mol}=\underline{3,34\cdot 10^{25}molécula}|.$$

**E.2)** Calcule a quantidade de mol $n$ e o número de moléculas $N$ em 500g de gás oxigênio ($O_2$).

$$M=\text{Massa Molar } O_2 = 2\cdot\underbrace{(16\text{g/mol})}_{O}=\underline{32\text{g/mol}}|$$

$$\text{n=número de mol}\Rightarrow[\text{n}]=\text{mol} \quad \text{n=}\frac{m}{M}=\frac{500g}{32g/mol}=\underline{15,6mol}|$$

$$\text{Número de móleculas de } O_2\text{: } N=n\cdot N_A\Rightarrow N=15,6\cancel{mol}\cdot 6,02\cdot 10^{23}molécula\ O_2/\cancel{mol}=\underline{9,39\cdot 10^{24}molécula\ O_2}|$$

**E.3)** Calcule a massa $m$ (em gramas) de *10mol* de gás dióxido de carbônico ($CO_2$)

$$M = \text{Massa Molar } CO_2 = \underbrace{12\text{g/mol}}_{C} + 2 \cdot \underbrace{(16\text{g/mol})}_{O} = \underline{44\text{g/mol}}|$$

massa em gramas: $m = M \cdot n = 44\text{g}/\cancel{\text{mol}} \cdot 10\,\cancel{\text{mol}} = \underline{440g}|$

Não importa o volume, a pressão ou a temperatura do gás, a massa é a mesma, é invariante. A massa $m$ é sempre proporcional a $n$, pois $m=n \cdot M$.

## Equação de Estado dos Gases Ideais (Equação de Clapeyron)

A relação entre Pressão $P$, Volume $V$, Temperatura $T$ e quantidade de substância $n$ é dada pela equação de estado dos gases ideais

$$\boxed{P \cdot V = n \cdot R \cdot T}, \tag{3.9}$$

onde $P$ é a pressão do gás ($N/m^2$), $V$ é volume do recipiente no qual o gás esta contido ($m^3$), $n$ é o número de mol (quantifica a massa do gás), $T$ é a temperatura absoluta em Kelvin ($K$) e $R=8{,}31\ J/(mol \cdot K)$ é a constante universal dos gases. Gases ideais são idealizados de não possuírem interações entre as suas moléculas. Se não há interação de atração, por exemplo, o gás nunca irá condensar em um líquido ou em um sólido. Portanto, a equação de estado dos gases ideais não exibe transição de fase. Van der Waals adaptou a equação de Clayperon introduzindo um termo atrativo e outro termo respulsivo. Agora, o gás já pode condensar para um líquido quando a sua temperatura é reduzida.

## Diagrama PV (Pressão versus Volume)

Iremos representar um estado termodinâmico e um processo termodinâmico no diagrama PV (pressão *versus* volume, Figura 79 ), onde o *eixo-y* é representado pela pressão $\boldsymbol{P(N/m^2)}$ do gás e o *eixo-x* é o volume $\boldsymbol{V(m^3)}$ do recipiente no qual o gás está contido, ver Figura 80 e Figura 81.

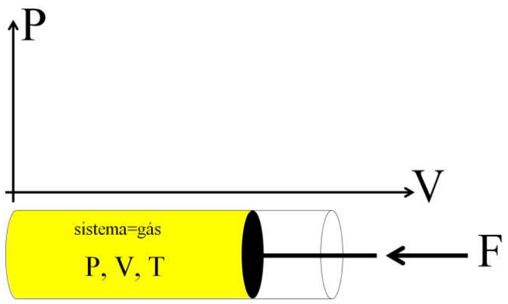



Figura 79 – Diagrama PV (Pressão versus Volume). O estado termodinâmico de um gás é completamente especificado pela pressão **P**, volume **V**, temperatura **T** e a quantidade de substância $\boldsymbol{n}$. Todas essas grandezas estão relacionadas pela equação de estado dos gases ideais $P \cdot V=n \cdot R \cdot T$.

Um Estado Termodinâmico é um estado de equilíbrio e é representado por um ponto ▪ (caracterizado por três variáveis de estado: P, V e T) no diagrama $PV$. Na Figura 80, temos um estado termodinâmico $E_1$. Este estado termodinâmico deve satisfazer a equação de estado dos gases ideais $P \cdot V=n \cdot R \cdot T$, ou seja, $P_1 \cdot V_1=n \cdot R \cdot T_1$, onde $P_1$ é a pressão, $V_1$ é o volume e $T_1$ é a temperatura no *estado termodinâmico 1*, chamado de $E_1$.

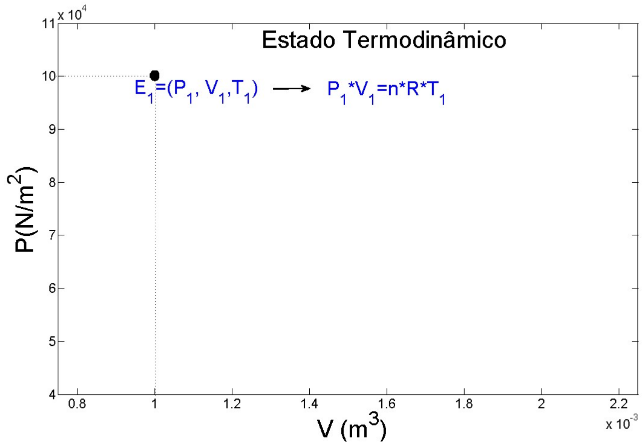



**Figura 80** – Estado termodinâmico é um ponto ▪ no diagrama PV. Esse ponto é representado por uma pressão P, volume V e temperatura T, satisfazendo a equação dos gases ideais P·V=n·R·T.

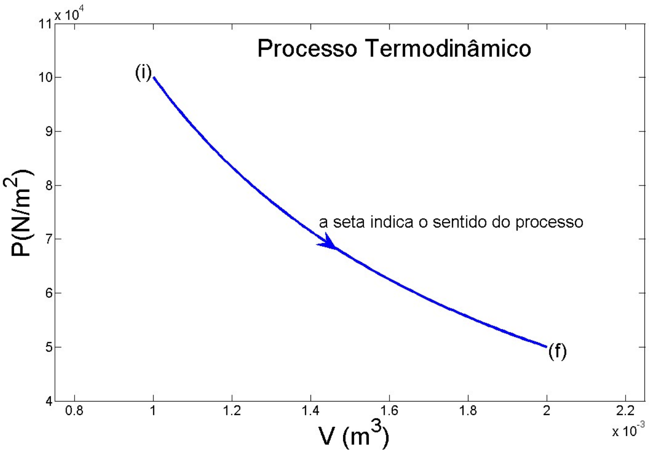
**E.1)** Calcular a pressão $P_1$, o volume $V_1$ e a temperatura $T_1$ do estado termodinâmico $E_1$, dado na Figura 80, sabendo que $n=0.03mol$.

*Solução: A pressão $P_1$ e o volume $V_1$ são obtidos a partir da leitura do gráfico: $P_1=10\cdot10^4 N/m^2$ (eixo-y), $V_1=1\cdot10^{-3}m^3$ (eixo-x) e a temperatura $T_1$ é obtida pela equação de estado dos gases ideais $P\cdot V=n\cdot R\cdot T$. Isolando T:*

$$T_1=\frac{P_1\cdot V_1}{n\cdot R}=\frac{10\cdot10^4 N/m^2\cdot1\cdot10^{-3}m^3}{0,03mol\cdot8,31J/(mol\cdot K)}=401,1K.$$

Processo Termodinâmico é o caminho percorrido pelo sistema (gás) para passar de um estado termodinâmico inicial (*i*) até outro estado termodinâmico final (*f*). O sentido do processo é representado por uma seta. No exemplo na Figura 81 (à esquerda), houve uma expansão (o gás aumentou de volume, pois o volume final, $2,0\cdot10^{-3}m^3$, é maior que o volume inicial $1,0\cdot10^{-3}m^3$). E a pressão diminuiu, pois a pressão final, $5,0\cdot10^4N/m^2$, é menor que a pressão inicial, $10,0\cdot10^4N/m^2$. Ao longo do processo termodinâmico, se não houver vazamento, sempre podemos usar a equação auxiliar

$$\boxed{\frac{P_i\cdot V_i}{T_i}=\frac{P_f\cdot V_f}{T_f}}\,. \tag{3.10}$$



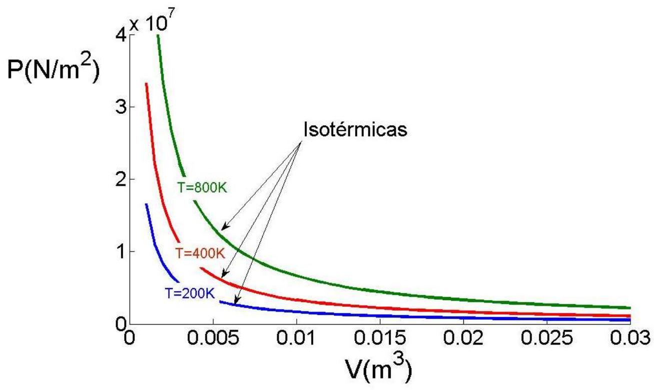




**Figura 81** – Na figura à esquerda, temos um exemplo de Processo termodinâmico, que é o caminho percorrido pelo sistema para passar de um estado termodinâmico inicial (***i***) para outro estado termodinâmico final (***f***). Na figura à direita, temos três processos termodinâmicos (isotérmicos) que ocorrem à temperatura constante, 200K, 400K, 800K, respectivamente.

**E.2)** Calcular as variáveis P,V,T do estado termodinâmico inicial (i) e do estado final (f), da Figura 81 (à esquerda), dado que $n=0,03mol$.

*Solução:*

*Estado inicial* ***(i)****: A pressão* $P_i$ *e o volume* $V_i$ *são obtidos a partir da leitura do gráfico:* $P_i=10\cdot10^4N/m^2$ *(eixo-y),* $V_i=1\cdot10^{-3}m^3$ *(eixo-x) e a temperatura é obtida pela equação de estado dos gases ideais* $P\cdot V=n\cdot R\cdot T$*. Isolando T:* $T_i=\dfrac{P_i\cdot V_i}{n\cdot R}=\dfrac{10\cdot10^4N/m^2\cdot1\cdot10^{-3}m^3}{0,03mol\cdot8,31J/(mol\cdot K)}=401,1K$.

*Estado final* ***(f)****: A pressão* $P_f$ *e o volume* $V_f$ *são obtidos a partir da leitura do gráfico:* $P_f=5\cdot10^4N/m^2$ *(eixo-y),* $V_f=2\cdot10^{-3}m^3$ *(eixo-x) e a temperatura é obtida pela equação de estado dos gases ideais* $P\cdot V=n\cdot R\cdot T$*. Isolando T:* $T_f=\dfrac{P_f\cdot V_f}{n\cdot R}=\dfrac{5\cdot10^4N/m^2\cdot2\cdot10^{-3}m^3}{0,03mol\cdot8,31J/(mol\cdot K)}=401,1K$.

No exemplo E.2, a temperatura inicial $T_i$ é igual a temperatura final $T_f$, isso implica que o processo ocorreu a temperatura constante. Chamamos esse processo de *isotérmico* (ver Figura 81 à direita). O gás pode passar de um estado termodinâmico inicial (***i***) para outro estado final (***f***), passando por <u>vários</u> processos termodinâmicos. A partir da definição de trabalho ***W*** e da primeira lei da termodinâmica, iremos descrever os principais processos, embora exista uma infinidade, que recebem um nome específico quando alguma quantidade permanece constante ao longo do caminho.

**E.3)** Um extintor de incêndio de volume *12L* contém 8kg de $CO_2$ e está na temperatura de 20ºC. Calcule a pressão no interior do extintor.
Dados: $m=n\cdot M$, $M_O=16g/mol$, $M_C=12g/mol$ e L=$10^{-3}$m$^3$.
Não esqueça de converter a temperatura para a kelvin e usar o volume em m$^3$.
Este é para você fazer.


## Teorema da Equipartição da Energia (T.E.E)

O teorema da equipartição da energia (T.E.E) declara que <u>cada termo quadrático (x$^2$, υ$^2$, □$^2$, etc) na energia total do sistema</u> irá contribuir com $\frac{1}{2}k_B\cdot T$, onde $k_B=1,38\cdot10^{-23}J/K$ (constante de Boltzmann) e $T$ é a temperatura absoluta em Kelvin (*K*). Como $N=n\cdot N_A$, $k_B=1,38\cdot10^{-23}J/K$ e $N_A=6,02\cdot10^{23}/mol$, o produto $N\cdot k_B$ pode ser escrito como $n\cdot N_A\cdot k_B= n\cdot R$, onde $\boldsymbol{R=8,31J/(mol\cdot K)}$ é a chamada constante universal dos gases ($R=N_A\cdot k_B$).

## Moléculas Monoatômicas, Diatômicas e Poliatômicas

As moléculas que compõem o gás podem ser formadas por um ou mais átomos. Isso traz grandes implicações quanto à energia total do sistema, pois agora passa também a existir o movimento de rotação.

- **Moléculas monoatômicas** - As moléculas monoatômicas são compostas por apenas <u>um átomo</u>. Exemplo são os gases nobres: Hélio **He**, Argônio **Ar**, Neônio **Ne**, etc). Exemplo: considere o gás hélio ***He***, confinado em um recipiente. A energia cinética, para $N$ moléculas do gás Hélio, é dada por

$$K_{translação} = N \cdot \left( \frac{1}{2} m_{He} \cdot \upsilon^2 \right) = N \left[ \frac{1}{2} m_{He} \left( \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2 \right) \right].$$

Usando O teorema da equipartição da energia, podemos escrever essa energia como:

$$K_{translação} = N \cdot | \underbrace{\frac{1}{2} k_B \cdot T}_{\frac{1}{2} m \cdot \upsilon_x^2} + \underbrace{\frac{1}{2} k_B \cdot T}_{\frac{1}{2} m \cdot \upsilon_y^2} + \underbrace{\frac{1}{2} k_B \cdot T}_{\frac{1}{2} m \cdot \upsilon_z^2} | = \frac{3}{2} N \cdot k_B \cdot T$$

$$K_{translação} = n \cdot \frac{3}{2} \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \text{pois} \quad N \cdot k_B = n \cdot \underbrace{N_A \cdot k_B}_{R} = n \cdot R.$$

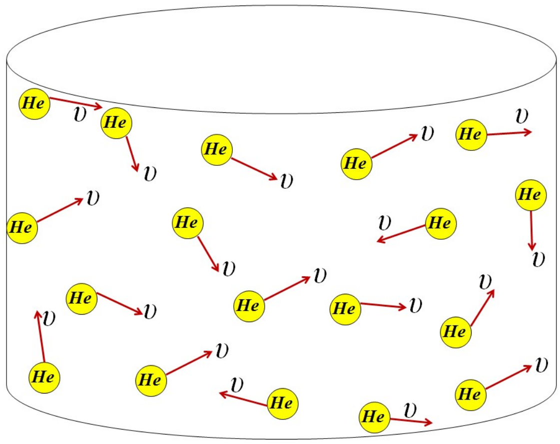
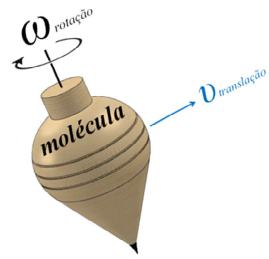



**Figura 82** - Representação de um gás formado por moléculas monoatômicas.

Para moléculas formadas por mais de um átomo, podemos imaginá-las como um *pião* (ver figura ao lado), onde esse pião pode também rotacionar em relação aos eixos $x$, $y$ e $z$.




υ=velocidade de translação.

ω=velocidade de rotação.

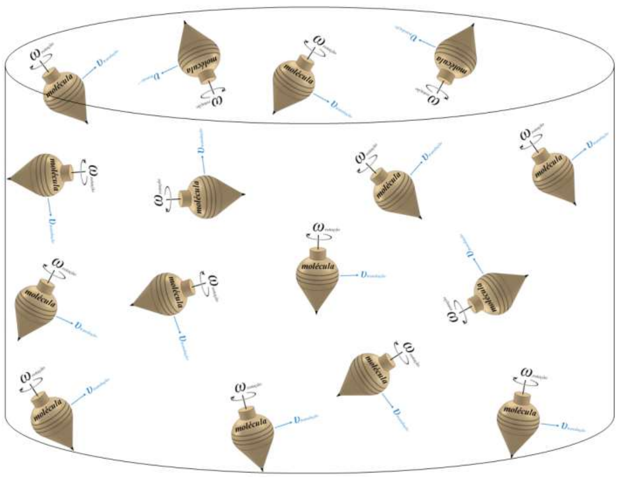
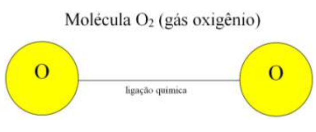


**Figura 83** - Representação pictórica de um gás composto por "piões", moléculas formadas por mais de um átomo. Além do movimento de translação, também existe o movimento de rotação que irá contribuir para a energia total do gás.

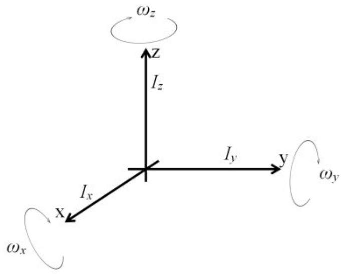
- **Moléculas Diatômicas** – São moléculas formadas por <u>dois átomos</u> (ex: CO, $H_2$, $O_2$, etc). Neste caso, devemos adicionar mais <u>dois</u> termos quadráticos na energia total do sistema (energia cinética das $N$ moléculas), devido ao movimento de rotação. O termo adicional é




$$K_{rotação} = N \left( \frac{1}{2} I_x \cdot \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \cdot \omega_y^2 \right) = N \cdot | \underbrace{\frac{1}{2} k_B \cdot T}_{\frac{1}{2} I_x \cdot \omega_x^2} + \underbrace{\frac{1}{2} k_B \cdot T}_{\frac{1}{2} I_y \cdot \omega_y^2} | = \frac{2}{2} N \cdot k_B \cdot T = n \cdot R \cdot T$$

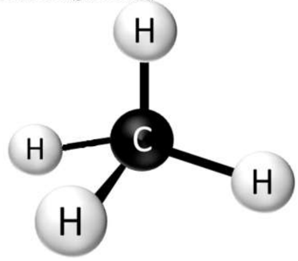
Obs: para moléculas diatômicas, o terceiro $I$ é desprezível, ou $I \approx 0$.

$I$ é chamado "Momento de Inercia" em relação ao eixo de giro, que é a resistência que o corpo oferece a variar o seu movimento de rotação (análogo a massa $m$, que é resistir ao movimento de translação), $[I]=kg\cdot m^2$. E $\omega$ é a velocidade angular de rotação, $[\omega]=rad/s$. Observe que a energia cinética para o movimento de rotação é análoga ao movimento de translação ( $K_{rotação} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \Leftrightarrow K_{translação} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$ ).




- Moléculas Poliatômicas - São moléculas formadas por <u>três ou mais</u> átomos (ex: $CO_2$, $H_2O$, $O_3$, $CH_4$, etc). Neste caso, devemos adicionar mais <u>três</u> termos na energia total ($N$ moléculas), devido ao movimento de rotação em relação aos eixos $x$, $y$ e $z$.

Molécula $CH_4$ (gás metano)




$$K_{rotação} = N \cdot \left( \frac{1}{2} I_x \cdot \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \cdot \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \cdot \omega_z^2 \right) = N \cdot 3 \cdot \frac{k_B \cdot T}{2} = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T.$$

## Energia Interna ($E_{int}$) e Variação da Energia Interna ($\Delta E_{int}$)

A energia total do sistema (chamada de Energia Interna $E_{int}$) será a soma da energia cinética de <u>translação</u> com a energia cinética de <u>rotação</u>, ou seja;

$$E_{int} = K_{translação} + K_{rotação} \tag{3.11}$$

Usando o teorema da equipartição da energia, vamos encontrar as seguintes equações:

$$\begin{aligned} E_{int} &= n \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot R \right) \cdot T + 0 = n \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot R \right) \cdot T \quad \text{(gás monoatômico. Ex: He, Ar, Ne),} \\ E_{int} &= n \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot R \right) \cdot T + n \cdot \left( \frac{2}{2} \cdot R \right) \cdot T = n \cdot \left( \frac{5}{2} \cdot R \right) \cdot T \quad \text{(gás diatômico. Ex: CO, } H_2, O_2 \text{),} \\ E_{int} &= \underbrace{n \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot R \right) \cdot T}_{translação} + \underbrace{n \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot R \right) \cdot T}_{rotação} = n \cdot (3 \cdot R) \cdot T \quad \text{(gás poliatômico. Ex: } CO_2, H_2O, O_3, CH_4 \text{).} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Aplicando uma variação nas equações (3.12), temos:

$$\begin{aligned} \Delta E_{int} &= n \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot R \right) \cdot \Delta T \quad \text{(gás monoatômico. Ex: He, Ar, Ne),} \\ \Delta E_{int} &= n \cdot \left( \frac{5}{2} \cdot R \right) \cdot \Delta T \quad \text{(gás diatômico. Ex: CO, } H_2, O_2 \text{),} \\ \Delta E_{int} &= n \cdot (3 \cdot R) \cdot \Delta T \quad \text{(gás poliatômico. Ex: } CO_2, H_2O, O_3, CH_4 \text{).} \end{aligned} \tag{3.13}$$

O termo entre parênteses nas equações (3.13) é chamado *calor especifico molar a volume constante* $c_V$. Mais adiante vamos justificar o porquê do nome de $c_V$. Resumindo, temos a equação mais enxuta para $\Delta E_{int}$

$$\boxed{\Delta E_{int} = n \cdot c_V \cdot \Delta T,} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c_V = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot R & \text{(gás monoatômico. Ex: He, Ar, Ne),} \\ \frac{5}{2} \cdot R & \text{(gás diatômico. Ex: CO, } H_2, O_2\text{),} \\ 3 \cdot R & \text{(gás poliatômico. Ex: } CO_2, H_2O, O_3, CH_4\text{),} \\ & R = 8.31\, J/(mol \cdot K). \end{cases}} \tag{3.14}$$

$\Delta E_{int}$ é chamada variação da energia interna, $n$ é o número de mol (mol), $c_V$ é o calor especifico molar a volume constante (*J/(mol·K)*) e $\Delta T$ é a variação de temperatura na escala Kelvin (*K*). A equação (3.14) é geral, válida para qualquer tipo de gás, basta apenas corrigir o valor de $c_V$.

## Trabalho realizado por um gás ideal

Definição geral de trabalho: $dW = F \cdot dl = P \cdot \underbrace{A \cdot dl}_{dV} = P \cdot dV \xrightarrow{\text{integrando}} W = \int_i^f P \cdot dV$. Observação: Assim como o símbolo $\sum$ representa um somatório, o símbolo $\int$ também representa um somatório, só que de quantidades infinitesimais (que tendem a zero). Portanto, o trabalho $W$ realizado pelo gás ao longo de um processo termodinâmico é numericamente igual à área sob a curva no diagrama *PV*. Da equação de estado dos gases ideais: $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$, isolando *P*: $P = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$ e substituindo em W, temos: $W = \int P \cdot dV \overset{ou}{\Leftrightarrow} W = \int \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV$.

Como o trabalho realizado é numericamente igual à área sob a curva (no diagrama PV), o trabalho realizado $W$ usando o caminho mostrado na Figura 84.(a) é diferente do trabalho realizado ao longo do caminho usado na Figura 84(b).

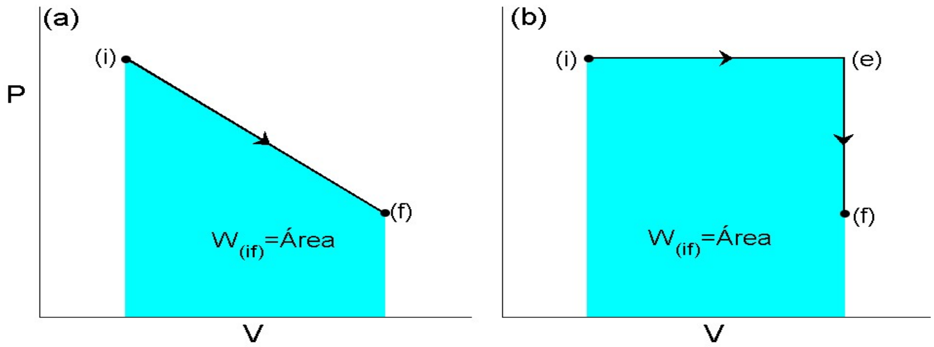



**Figura 84** - O trabalho realizado **W** e o calor trocado **Q** dependem do caminho (processo termodinâmico) utilizado pelo gás para sair do estado termodinâmico inicial ***(i)*** até o estado final ***(f)***. Veja na figura (a), que a área (numericamente igual ao trabalho **W** realizado pelo gás) é menor que a área da figura (b), portanto $W_{fig.(a)} < W_{fig.(b)}$ assim como o calor trocado ***Q***, $Q_{fig.(a)} < Q_{fig.(b)}$. Mas, a variação da energia interna são iguais $\Delta E_{int,fig.(a)} = \Delta E_{int,fig.(b)}$, pois esta só depende da diferença de temperatura $\Delta T = T_f - T_i$.

### Primeira Lei da Termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica nada mais é do que o teorema do trabalho e energia cinética (é uma lei de conservação da energia). A primeira lei declara que o calor trocado menos o trabalho realizado é igual a variação da energia interna, equação (3.14). Sua definição é

$$\boxed{\Delta E_{int} = Q - W} \quad 1^a \text{ Lei da Termodinâmica} \tag{3.15}$$

onde $\Delta E_{int}$ é a variação da energia interna, $\boldsymbol{Q}$ é o calor trocado ($\boldsymbol{Q>0}$ se o calor é **abs**orvido e $\boldsymbol{Q<0}$ se calor é **rej**eitado) e $\boldsymbol{W}$ é o trabalho realizado pelo sistema ($\boldsymbol{W>0}$, quando há uma expansão) ou sobre o sistema ($\boldsymbol{W<0}$, quando há uma compressão), conforme ilustrado na Figura 85. A equação (3.15) é geral, válida para qualquer processo e será de grande utilidade para calcular o calor trocado $\boldsymbol{Q}$ ou o trabalho $\boldsymbol{W}$ realizado em um processo desconhecido.

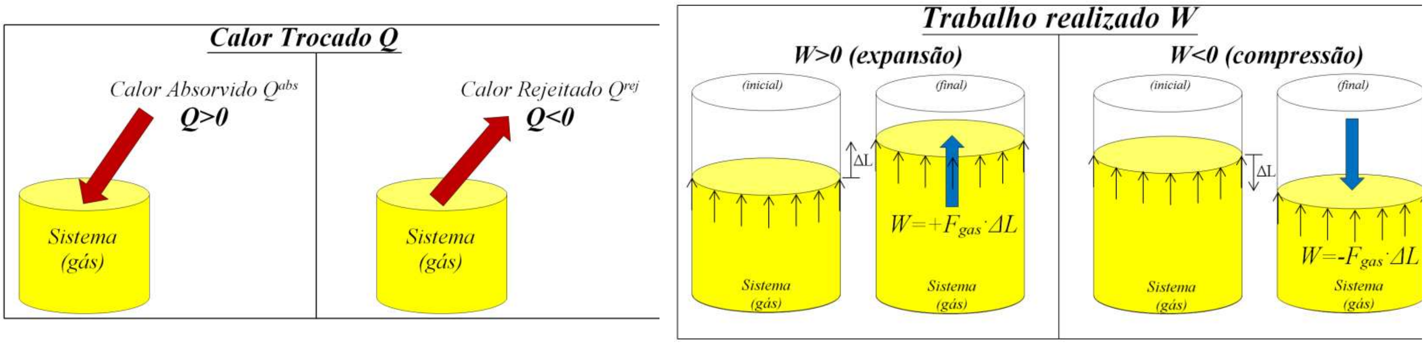


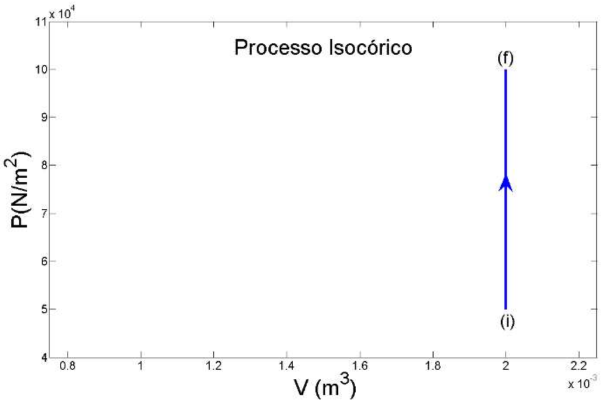

Figura 85 – Convenção de sinais para o calor trocado $Q$ e o trabalho realizado $W$.

A variação da energia interna $\Delta E_{int}$ é uma grandeza que não depende do(s) processo(s) termodinâmico(s) utilizado(s) para sair do estado termodinâmico inicial ($i$) até o estado final ($f$), pois $\Delta E_{int}$ depende apenas da temperatura inicial $T_i$ e da temperatura final $T_f$, conforme equação (3.14) $\Delta E_{\text{int}} = n \cdot c_V \cdot \Delta T = n \cdot c_V \cdot (T_f - T_i)$. No entanto, tanto o calor trocado $Q$ assim como o trabalho realizado $W$, dependem da trajetória utilizada para sair do estado termodinâmico inicial ($\boldsymbol{i}$) até o estado final ($\boldsymbol{f}$). A partir da equação (3.15), isolando $Q$, temos $Q = \Delta E_{\text{int}} + W \overset{ou}{\Rightarrow} Q = (\text{constante}) + W$. Portanto, se $W$ aumenta, $Q$ também aumenta. Se $W$ diminui, $Q$ também diminui. Isso implica que o calor trocado em cada caminho também é diferente. Entretanto, a variação da energia interna é a mesma para qualquer caminho ($\Delta E_{\text{int,fig.(a)}} = \Delta E_{\text{int,fig.(b)}}$), a diferença $Q$-$W$ é sempre constante, não depende do caminho ou do processo termodinâmico utilizado, conforme ilustrado na Figura 84. Nesta figura, mostra-se duas trajetórias, figura (a) e figura (b), para sair do estado termodinâmico inicial ($\boldsymbol{i}$) até o estado final ($\boldsymbol{f}$). Na figura (a), a trajetória (ou processo termodinâmico) é uma reta que liga diretemente os estados (**i**) até o estado (**f**). Na figura (b), têm-se dois processos; um processo isobárico (**ie**) e um processo isocórico (**ef**) ou $W_{\text{if}} = W_{\text{ie}} + \underbrace{W_{\text{ef}}}_{=0}$.

## Principais processos termodinâmicos

A seguir, iremos discutir os principais processos termodinâmicos em que alguma grandeza permanece constante ao longo do processo. Ao longo da discussão, iremos calcular o trabalho realizado $W$ e o calor trocado $Q$, usando a equação de estado dos gases ideais (3.9) e a primeira lei da termodinâmica (3.15).

♦**Processo Isocórico** (ocorre a volume **V** constante). Este tipo de processo é possível identificar visualmente pelo gráfico a partir da reta vertical no diagrama PV, veja a ilustração na figura ao lado.




►**Equação auxiliar ao longo do processo Isocórico**

$$V_i = V_f = \frac{n \cdot R \cdot T_i}{P_i} = \frac{n \cdot R \cdot T_f}{P_f} \Rightarrow \boxed{\frac{T_i}{P_i} = \frac{T_f}{P_f}}, \text{ ou } \boxed{T_f = T_i \cdot \frac{P_f}{P_i}}.$$

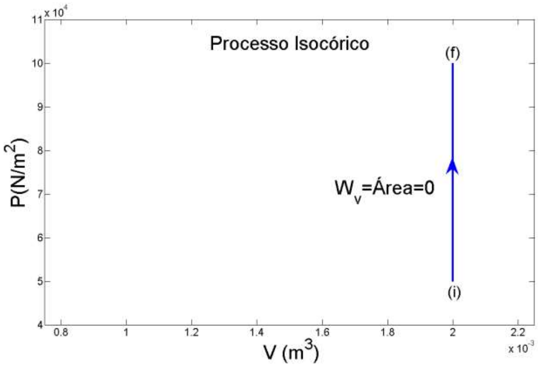
Se a pressão $P_f$ aumenta, a temperatura $T_f$ também aumenta.

►**Trabalho $W_V$ realizado pelo gás ao longo do processo Isocórico**
Se o volume for mantido constante, não há realização de trabalho.

$$W_V = \int P \cdot dV$$

$$\boxed{W_V = 0J}$$

*O trabalho W é numericamente igual a área sob a curva no diagrama P·V (ver figura ao lado).*




►**Calor Trocado pelo gás Qv ao longo do processo Isocórico**

Como $W_V$=0 implica que $\Delta E_{int} = Q_V - \underbrace{W_V}_{=0}$ e o calor trocado coincide com a variação da energia interna $Q_V = \Delta E_{int}$.

$$\boxed{Q_V = n \cdot c_V \cdot \Delta T}. \tag{3.16}$$

Neste caso, todo o calor trocado é utilizado para variar a temperatura do gás. Se calor é adicionado ( $Q_V^{abs} > 0$ ) o gás esquenta ($T_f > T_i$) e a pressão aumenta ($P_f > P_i$). Se calor é rejeitado ( $Q_V^{rej} < 0$ ) o gás esfria ($T_f < T_i$) e a pressão diminui ($P_f < P_i$), reveja a equação auxiliar para o processo isocórico.

►**Variação da Energia Interna ao longo do processo Isocórico**

$$\boxed{\Delta E_{\text{int}} = Q_V - W_V}$$

$$\boxed{\Delta E_{\text{int}} = n \cdot c_V \cdot \Delta T}$$

1ª Lei da Termodinâmica,

$$c_V = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot R & \text{(gás monoatômico. Ex: He, Ar, Ne),} \\ \frac{5}{2} \cdot R & \text{(gás diatômico. Ex: CO, H}_2\text{, O}_2\text{),} \\ 3 \cdot R & \text{(gás poliatômico. Ex: CO}_2\text{, H}_2\text{O, O}_3\text{, CH}_4\text{),} \\ \quad R = 8.31\, J/(mol \cdot K). \end{cases}$$

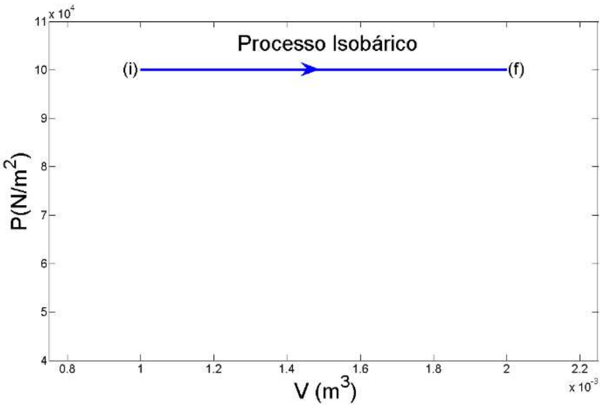
Aqui vamos usar a panela de pressão como exemplo de um processo isocórico. Quando você coloca água dentro de uma panela de pressão e leva esta ao fogo, calor que esta sendo adicionado $Q_V^{abs}$ ao sistema pelas *chamas* do fogão irá aumentar a pressão no interior da panela (água que vaporizou). A válvula de peso da panela de pressão tem a função de liberar vapor d'água (diminuir o número de mol $n$) para que a pressão não aumente tanto e exploda a panela (nesta etapa final a pressão passa a ficar constante e o gás não aumenta mais de temperatura, veja na equação auxilar abaixo).


Atenção: *Neste exemplo o número de mol n não é consante, mas podemos assumir que o número de mol que sai pela válvula é igual ao número de mol que passa de liquido para gás, ai podemos assumir que o número de mol n no interior da panela (vapor d´água) permanece aproximadamente constante.*

Usando a equação auxiliar para um processo isocórico:

$\boxed{\frac{T_i}{P_i} = \frac{T_f}{P_f}} \overset{\text{isolar } P_f}{\Rightarrow} P_f = P_i \cdot \frac{T_f}{T_i}$, se $T_f > T_i \overset{\text{implica}}{\Rightarrow} P_f > P_i$. Se a temperatura aumenta (quando calor é absorvido), a pressão também aumenta. A temperatura diminui juntamente com a pressão, quando calor é rejeitado (se você colocar a panela dentro da geladeira). Se a pressão for mantida constante, a temperatura não varia.

♦**Processo Isobárico** (ocorre a pressão ***P*** constante). Este tipo de processo é possível identificar visualmente pelo gráfico a partir da reta horizontal no diagrama PV, como ilustrado na figura ao lado.




**►Equação auxiliar ao longo do processo Isobárico**

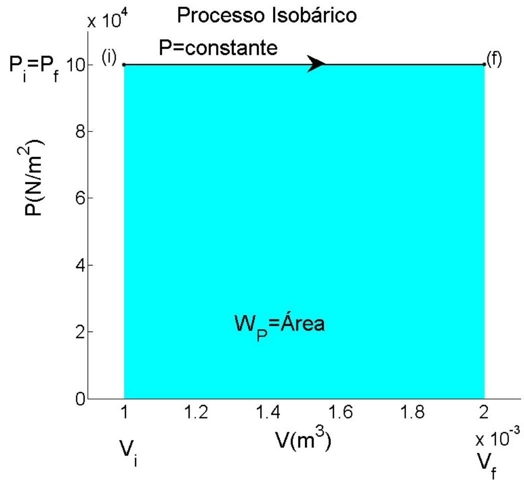
$$P_i = P_f = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \Rightarrow \boxed{\frac{T_i}{V_i} = \frac{T_f}{V_f}}.$$ Veja que $T_f = T_i\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$ e

Para $T_f > T_i$ então $V_f > V_i$. Se a temperatura aumenta, o volume também, para manter a pressão constante.

**►Trabalho realizado $W_P$ pelo gás ao longo do processo Isobárico**

$$W_P = \int P \cdot dV$$

$$\boxed{W_P = P_i \cdot \Delta V = \underbrace{P_i}_{altura} \cdot \underbrace{(V_f - V_i)}_{base}}$$ (válida apenas para P constante)




A partir da equação dos gases ideais $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$, aplicando uma variação, mantendo *P* constante, temos que $P \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T$, que é igual ao trabalho realizado $W_P$, ou

$$\boxed{W_P = n \cdot R \cdot \Delta T = n \cdot R \cdot (T_f - T_i)}$$ (válida para **P** constante)

Neste caso, é possível calcular o Trabalho $W_P$ pela a área sob a curva no diagrama PV, pois a área é um '*retângulo*'.

*O trabalho W é numericamente igual a área sob a curva no diagrama P·V.*

O trabalho é positivo ($W_P>0$) sempre que há uma expansão ($\Delta V>0$).

O trabalho é negativo ($W_P<0$) quando há uma compressão ($\Delta V<0$).

O trabalho é zero ($W_P=0$) se o volume é mantido constante ($V_f=V_i$).

**►Calor Trocado $Q_P$ pelo gás ao longo do processo Isobárico**

Para um processo que ocorre a pressão constante (isobárico), podemos encontrar uma expressão para a troca de calor $Q_P$. Para isso, vamos usar a primeira lei da termodinâmica, equação (3.14), e a equação (3.15) e, por último, a equação para o trabalho realizado em um processo isobárico $W_P = n \cdot R \cdot \Delta T$,

$$\Delta E_{int} = Q_P - W_P \overset{isolar\ Q_P}{\Rightarrow} Q_P = \Delta E_{int} + W_P \Rightarrow Q_P = n \cdot c_V \cdot \Delta T + n \cdot R \cdot \Delta T = n \cdot \underbrace{(c_V + R)}_{c_P} \cdot \Delta T.$$ Portanto, temos a expressão para o calor trocado $Q_P$, escrita como;

$$\boxed{Q_P = n \cdot c_P \cdot \Delta T} \text{ válida apenas para processo Isobárico}, \qquad (3.17)$$

onde $c_P$ é chamado *calor específico molar a pressão constante* ($c_P = c_V + R$), *n* é o número de mol e $\Delta T$ é a variação de temperatura. O calor necessário na equação (3.17) para provocar $\Delta T$ é maior se comparado com a equação (3.16). Isso ocorre porque para o processo ocorrer à pressão constante, o gás precisa realizar trabalho $W_P$ para *empurrar* a vizinhança.

**►Variação da energia interna ao longo do processo Isobárico**

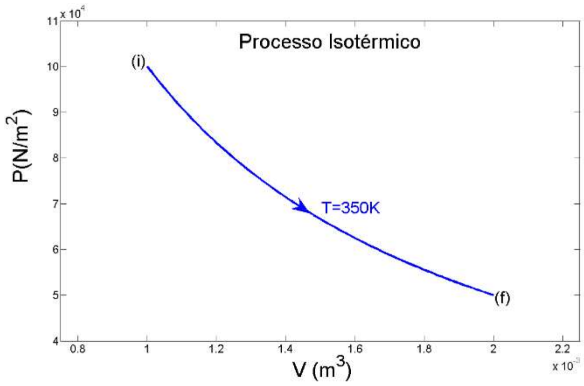
$\boxed{\Delta E_{\text{int}} = Q - W}$ 1ª Lei da Termodinâmica,

ou

$\boxed{\Delta E_{\text{int}} = n \cdot c_V \cdot \Delta T}$.

$$c_V = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \cdot R & \text{(gás monoatômico. Ex: He, Ar, Ne),} \\ \dfrac{5}{2} \cdot R & \text{(gás diatômico. Ex: CO, } H_2, O_2\text{),} \\ 3 \cdot R & \text{(gás poliatômico. Ex: } CO_2, H_2O, O_3, CH_4\text{),} \\ & R = 8.31\, J/(mol \cdot K). \end{cases}$$

**♦Processo Isotérmico** (*Lei de Boyle*), <u>ocorre a temperatura ***T*** constante</u>). Este tipo de processo já não é possível identificar visualmente pelo gráfico (ver figura ao lado). No texto deve ser informado o tipo de processo termodinâmico.




**►Equação auxiliar ao longo do processo isotérmico**

$$T_i = T_f = \frac{P_i \cdot V_i}{n \cdot R} = \frac{P_f \cdot V_f}{n \cdot R} \Rightarrow \boxed{P_i \cdot V_i = P_f \cdot V_f} \overset{ou}{\Rightarrow} \boxed{\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \left(\frac{P_i}{P_f}\right)}$$ que

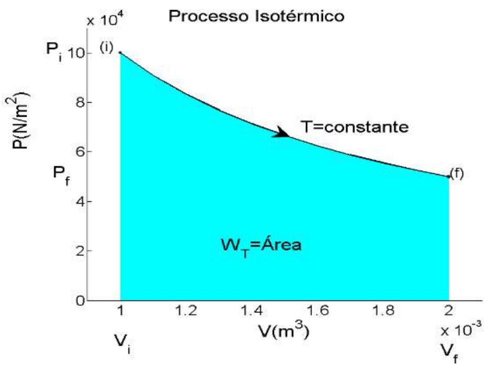
você pode usar em $W_T$.

**►Trabalho *$W_T$* realizado pelo gás ao longo do processo isotérmico**

$$W = \int_i^f \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV = n \cdot R \cdot T \int_i^f \frac{dV}{V},$$

$$\boxed{W_T = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)}. \tag{3.18}$$

*ln* é a função *logaritmo natural*, log na base *e=2.71828...*
*O trabalho W é numericamente igual a área sob a curva no diagrama P·V (ver figura ao lado).*
O <u>trabalho é positivo</u> ($W_T>0$) sempre que há uma <u>expansão</u> ($V_f/V_i>1$).
O <u>trabalho é negativo</u> ($W_T<0$) quando há uma <u>compressão</u> ($V_f/V_i<1$).
O trabalho é zero ($W_T=0$) se o volume é mantido constante ($V_f/V_i=1$).



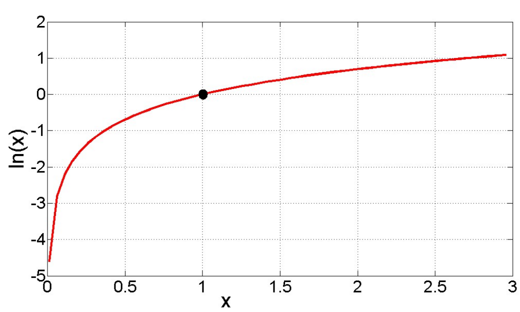

Neste caso, <u>não</u> é possível calcular o Trabalho ***$W_T$*** pela a área sob a curva no diagrama PV (usando retângulos e triângulos), pois a figura envolve curva.

Gráfico da função logaritmo natural $\ln(x), \quad x>0.$

Para: $x > 1 \Rightarrow \ln(x) > 0.$

Para: $x = 1 \Rightarrow \ln(x) = 0.$

Para: $0 < x < 1 \Rightarrow \ln(x) < 0.$




Sobre a função logaritmo natural

$$\log_e(x) = \ln(x), \quad \text{onde } e = 2.71828\ldots (\text{número neperiano}).$$

Gráfico da função logaritmo natural *ln(x)* versus *x*, para x> 0. O argumento da função ln deve ser um numero adimensional.

**►*Calor Trocado $Q_T$* pelo gás ao longo do processo isotérmico**

Para temperatura constante, temos que $\Delta T=0$ o que implica em $\Delta E_{int}=0$ e como consequência da primeira lei da termodinâmica $Q_T=W_T$.

$$\boxed{Q_T = W_T = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)} \tag{3.19}$$

Na Figura 86(a), o gás se expande, e ao longo do processo absorve a quantidade $Q_T^{abs}$ de calor. Este calor absorvido é o responsável por manter a temperatura constate, impedindo que o gás esfrie ao longo da expansão. Na figura (b), o gás é comprimido e ao longo do processo, $Q_T^{rej}$ de calor é rejeitado. Este calor rejeitado é o responsável por fazer com que o gás não esquente durante a compressão, mantendo a temperatura constate.

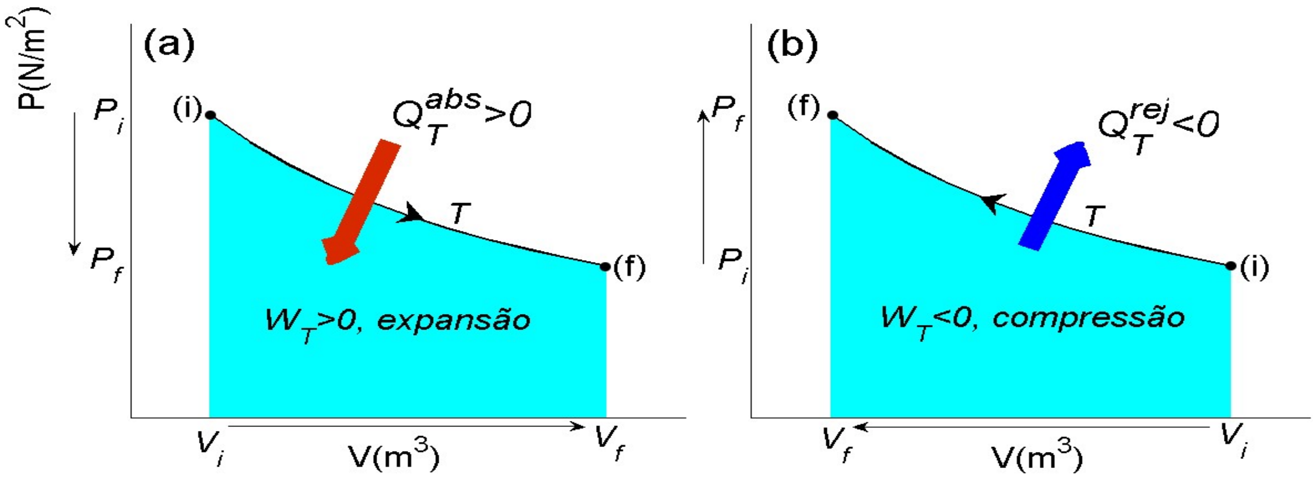


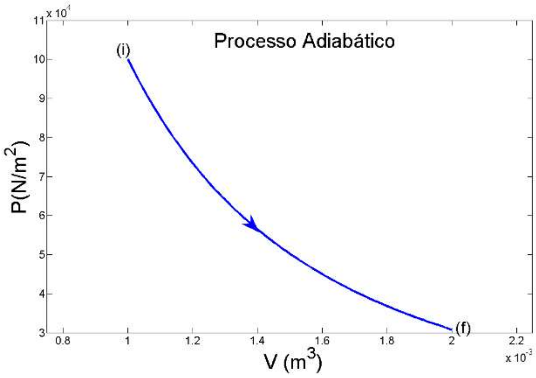

**Figura 86** – Na figura (a), durante a expansão, o gás precisa absorver a quantidade $\boldsymbol{Q_T^{abs}}$ de calor para não esfriar e manter sua temperatura constante. Na figura (b), o gás está sendo comprimido e para este não esquentar, a quantidade $\boldsymbol{Q_T^{rej}}$ de calor precisa ser rejeitada para que a temperatura permaneça constante.

**►Variação da energia interna ao longo do processo Isotérmico**

$$\boxed{\Delta E_{int} = 0}$$

**♦Processo Adiabático** (<u>ocorre sem troca de calor ***Q=0***</u>). Neste caso, nenhuma grandeza na equação de estado se mantém constante (apenas o número do mol *n*). Usando a primeira lei da termodinâmica na notação infinitesimal $dE_{int} = dQ - dW$e para o processo adiabático *dQ=0* a expressão fica $dE_{int} = -dW$ ou $n \cdot c_V dT = -p \cdot dV$. Usando a equação de estado dos gases ideais vamos isolar a pressão e substituir nesta última equação $n \cdot c_V \cdot dT = -\left(\frac{n \cdot R \cdot T}{V}\right) dV$. Dividindo esta equação por $n \cdot T$, ficamos com: $c_V \cdot \frac{dT}{T} = -\frac{R}{V} dV$. Temos que no lado esquerdo da igualdade depende apenas da temperatura e no lado direito apenas do volume. Agora vamos integrar esta equação entre um estado termodinâmico inicial e um estado termodinâmico final, $\int_{T_i}^{T_f} c_V \cdot \frac{dT}{T} = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{R}{V} dV$. Resolvendo as integrais e dividindo ambos o lado da igualdade por $c_V$, temos: $ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = -\frac{R}{c_V} \cdot ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$. Relembrando a regra do logaritmo $n \cdot logX = logX^n$ e de fração $\left(\frac{X}{Y}\right)^{-n} = \left(\frac{Y}{X}\right)^n$ vamos aplicar essas regras em $ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = -\frac{R}{c_V} \cdot ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$, para escrevê-la da forma $ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\frac{R}{c_V}}$. Finalmente, temos que $\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\frac{R}{c_V}}$ou $T_i \cdot V_i^{\frac{R}{c_V}} = T_f \cdot V_f^{\frac{R}{c_V}}$. Nesta equação, vemos que o produto $T \cdot V^{\frac{R}{c_V}}$ no estado termodinâmico inicial ($i$) é igual ao produto no estado termodinâmico final ($f$), isso implica que o produto é constante ao longo do processo adiabático. É definido a razão entre os calores específicos a pressão constante e a volume constante por uma constante chamada gamma $\boxed{\gamma = \frac{c_P}{c_V}} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V}$ e $\gamma - 1 = \frac{R}{c_V}$. A equação ao longo da linha adiabática fica $\boxed{T_i \cdot V_i^{\gamma-1} = T_f \cdot V_f^{\gamma-1}}$. Podemos eliminar a temperatura usando a equação de estado dos gases ideais, $T = \frac{P \cdot V}{n \cdot R}$ e substituir, $\frac{P_i \cdot V_i}{n \cdot R} \cdot V_i^{\gamma-1} = \frac{P_f \cdot V_f}{n \cdot R} \cdot V_f^{\gamma-1}$ ou $\boxed{P_i \cdot V_i^{\gamma} = P_f \cdot V_f^{\gamma}}$. Veja a seguir um resumo das principais equações ao longo do processo adiabático.

Este processo também não é possível identificar visualmente pelo gráfico (ver figura ao lado). No texto deve ser informado o tipo de processo termodinâmico.




**►Equações auxiliares ao longo do processo Adiabático**

$$\boxed{\begin{aligned} & P_i \cdot V_i^{\gamma} = P_f \cdot V_f^{\gamma} \quad \Rightarrow \gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1 + R / c_V, \\ & T_i \cdot V_i^{\gamma-1} = T_f \cdot V_f^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \gamma - 1 = R / c_V. \\ & \gamma = 5/3 = 1{,}67 \text{ (gás monoatômico). Ex: He, Ar, Ne} \\ & \gamma = 7/5 = 1{,}40 \text{ (gás diatômico). Ex: } N_2, O_2, CO \\ & \gamma = 4/3 = 1{,}33 \text{ (gás poliatômico). Ex: } CO_2, O_3, H_2O \end{aligned}}$$

Observações: Em uma expansão isotérmica, a pressão $P$ decresce com o volume $V$ elevado a um expoente 1 ($P \sim 1/V$). Já em uma expansão adiabática, a pressão $P$ decresce com o volume $V$ elevado ao expoente $\gamma > 1$ ($P \sim 1/V^{\gamma}$) Portanto, em uma expansão adiabática, a pressão $P$ decresce com o volume $V$ mais rapidamente que em uma expansão isotérmica. Durante uma compressão, a pressão $P$ aumenta com a diminuição do volume $V$. Esse aumento é mais ráido em uma compressão adiabática do que em uma istotérmica, como ilustrado na Figura 87, à esquerda e à direita.

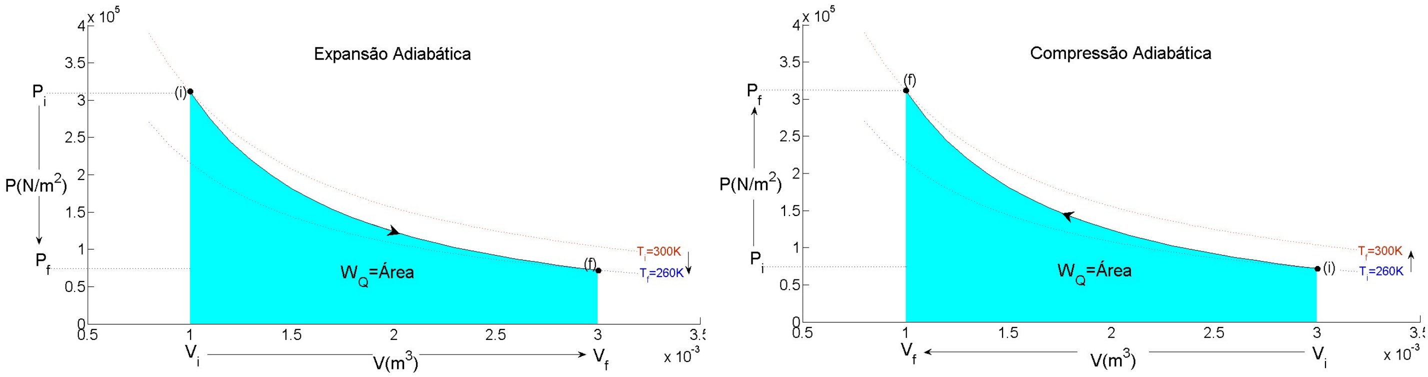
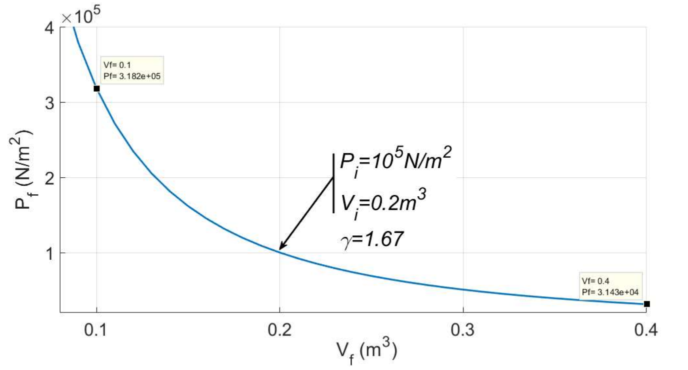



**Figura 87** – Expansão (curva ***if***) (figura à esquerda) e Compressão (curva ***if***) (figura à direita) adiabática, realizado por $n=0.1mol$ de um gás poliatômico. Na expansão adiabática, a pressão ***P*** decresce mais rapidamente que na expansão isotérmica (***T=300K***). Na compressão adiabática, a pressão ***P*** cresce mais rapidamente que na compressão isotérmica (***T=260K***). Em ambos os casos, a área sob a curva é numericamente igual ao trabalho realizado ao longo do processo. Lembrae-se que o trabalho é *positivo* em uma *expansão* e *negativo* em uma *compressão*, para qualquer processo.

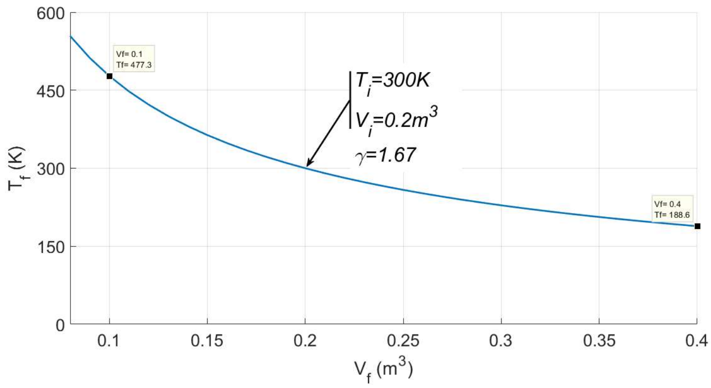
**►Trabalho *W* realizado pelo gás ao longo do processo Adiabático**

$\boxed{W = -n \cdot c_V \cdot \Delta T}$, (Usando a 1ª Lei da termodinâmica)

Veja que $P_f = P_i \cdot \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma}$. Para uma expansão, quando o volume $V_f$ aumenta, a pressão $P_f$ diminui. O mesmo ocorre para a temperatura final $T_f = T_i \cdot \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma - 1}$, ou seja, $\Delta T < 0$ (ver Figura 87 à esquerda). Já para uma compressão, a pressão aumenta e a temperatura também, $\Delta T > 0$ (ver Figura 87 à direita). Nas figuras a seguir, são exibidos mais dois exemplos numéricos para a variação da pressão e da temperatura, ambas em função da variação de volume.




Variação da Pressão final $P_f$ em função do volume final $V_f$ em um processo adiabático. Neste gráfico, foram usados: $P_i=10^5 N/m^2$, $V_i=0,2m^3$ e $\gamma=1,67$ (gás monoatômico). Quando o volume final é reduzido pela metade ($V_f=0,1m^3$), a pressão do gás salta de $1atm$ para $3,18atm$. Já quando o volume é dobrado ($V_f=0,4m^3$), a pressão cai de $1P_{atm}$ para $0,31P_{atm}$ ($1P_{atm}=10^5 N/m^2$).




Variação da temperatura final $T_f$ em função do volume final $V_f$ para um processo adiabático. Neste gráfico, foram usados: $T_i=300K(27°C)$, $V_i=0,2m^3$ e $\gamma=1,67$ (gás monoatômico). Quando o volume final é reduzido pela metade ($V_f=0,1m^3$), a temperatura do gás salta de $300K(27°C)$ para $477,3K(204.3°C)$. Já quando o volume é dobrado ($V_f=0,4m^3$), a temperatura cai de $300K(27°C)$ para $188,6\ K(-84.4°C)$. É dessa forma que funciona o refrigerador.

### ►Calor Trocado pelo gás Q ao longo do processo Adiabático

$\boxed{Q = 0}$ (**<u>não</u>** há troca de calor).

### ►Variação da Energia Interna ao longo do processo Adiabático

$\boxed{\Delta E_{\text{int}} = \underbrace{Q}_{=0} - W}$ 1ª Lei da Termodinâmica,

e

$\boxed{\Delta E_{\text{int}} = n \cdot c_V \cdot \Delta T}$.

$$c_V = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot R & \text{(gás monoatômico. Ex: He, Ar, Ne),} \\ \frac{5}{2} \cdot R & \text{(gás diatômico. Ex: CO, } H_2\text{, } O_2\text{),} \\ 3 \cdot R & \text{(gás poliatômico. Ex: } CO_2\text{, } H_2O\text{, } O_3\text{, } CH_4\text{),} \\ & R = 8{,}31\ J/(mol \cdot K). \end{cases}$$

Vamos analisar algumas situações para o sinal de $\Delta T$: $\Delta E_{int} = \underbrace{Q}_{=0} - W \Rightarrow n \cdot c_V \cdot \Delta T = -W \overset{\text{isolar } \Delta T}{\Rightarrow} \Delta T = \frac{-W}{n \cdot c_V}$:

$$\Delta T = \frac{-W}{n \cdot c_V} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } W > 0 \text{ (expansão)} \overset{\text{implica}}{\Rightarrow} \Delta T < 0 \text{ (o gás esfria, pois } T_f - T_i < 0 \Rightarrow T_f < T_i\text{),} \\ \text{se } W < 0 \text{ (compressão)} \overset{\text{implica}}{\Rightarrow} \Delta T > 0 \text{ (o gás esquenta, pois } T_f - T_i > 0 \Rightarrow T_f > T_i\text{).} \end{cases}$$

Vamos ver dois exemplos, um para cada caso.

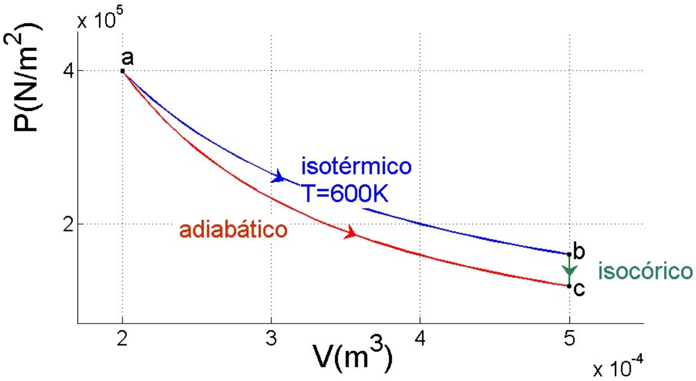
1º Caso: **W>0** (expansão). Quando o gás comprimido no interior de um frasco de aerossol é expelido para o ambiente externo, esse gás tem que realizar trabalho (***W>0)*** para se expandir. Por isso, o gás que sai do aerossol esfria. *É possível congelar uns 50ml de água com um frasco de aerossol.*


Como $\Delta T < 0$, o gás esfria, pois $T_f - T_i < 0 \Rightarrow T_f < T_i$. Preste atenção na temperatura do gás quando for usar aerossol nas axilas. *Estamos assumindo que a sua 'mão' não troca calor como o aerossol para que o processo possa ser considerado adiabático Q=0.*

2º Caso: **W<0** (compressão). Este caso ocorre quando você está enchendo um pneu ou uma bola. O gás no interior do pneu irá esquentar devido ao trabalho (**W<0)** realizado pela vizinhança (pela bomba) para comprimir o gás para o interior do pneu.
Como $\Delta T > 0$, o gás esquenta, pois $T_f - T_i > 0 \Rightarrow T_f > T_i$.


Devido ao pneu está aumentando de volume, você pode achar que o gás no interior está se expandindo. Esse aumento de volume é pela injeção de ar para o interior do pneu. Portanto, o volume V está aumentando porque *n* (número de mol) está aumentando. Mas, o gás está sendo comprimido, pois a pressão final $P_f = P_{pneu}$ no interior do pneu é maior que a pressão inicial $P_i = P_{atm}$ que é a pressão atmosférica.

**E.1)** Para os processos termodinâmicos, realizado por *0.1mol* de um gás poliatômico, mostrados na figura ao lado, calcule:




a) As variáveis de estado **P**, **V** e **T** nos estados termodinâmicos **a**, **b** e **c** (ver figura ao lado)

b) O trabalho realizado ***W*** e o calor trocado ***Q*** em cada um dos três processos (***ab***), (***bc***) e (***ac***).

*Solução do item (a):*

♣**Estado a**: Pela leitura do gráfico, temos: $P_a = 4\cdot 10^5 N/m^2$ *(eixo-y),* $V_a = 2\cdot 10^{-4} m^3$ *(eixo-x) e* $T_a = 600K$ ao longo do processo isotérmico **ab.**

♣**Estado b**: Pela leitura do gráfico, $V_b = 5\cdot 10^{-4} m^3$ *(eixo-x),*

$T_b = 600K$ (ao longo do processo isotérmico **ab**). E a pressão vamos calcular pela equação auxiliar para processo isotérmico $P_b \cdot V_b = P_a \cdot V_a$. Isolando $P_b$: $P_b = \dfrac{P_a \cdot V_a}{V_b} = \dfrac{4\cdot 10^5 N/m^2 \cdot 2\cdot 10^{-4} m^3}{5\cdot 10^{-4} m^3} = 1{,}6\cdot 10^5 N/m^2$.

♣**Estado c**: Pela leitura do gráfico, temos $V_c = 5\cdot 10^{-4} m^3$. Como o processo **ac** é adiabático, vamos calcular a pressão $P_c$ pela equação auxiliar $P_a \cdot V_a^\gamma = P_c \cdot V_c^\gamma \Rightarrow \gamma = 1 + R/c_V$ e $c_V = 3\cdot R$ (gás poliatômico). Portanto, valor do expoente gama *é:* $\gamma = 1 + \dfrac{\cancel{R}}{3\cdot \cancel{R}} = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$. *Isolando* $P_c$: $P_c = P_a \cdot \dfrac{V_a^\gamma}{V_c^\gamma} \Rightarrow P_c = P_a \cdot \left(\dfrac{V_a}{V_c}\right)^\gamma$, substituindo os valores numéricos: $P_c = 4\cdot 10^5 N/m^2 \cdot \left(\frac{2\cdot \cancel{10^{-4}} m^3}{5\cdot \cancel{10^{-4}} m^3}\right)^{\frac{4}{3}} = 1{,}18\cdot 10^5 N/m^2$. Com esta pressão, podemos calcular a temperatura $T_c$, usando a equação auxiliar do processo isocórico **bc**: $\frac{T_b}{P_b} = \frac{T_c}{P_c}$. Isolando $T_c$: $T_c = T_b \frac{P_c}{P_b}$, substituindo os valores numéricos: $T_c = 600K \cdot \left(\frac{1{,}18\cdot 10^5 N/m^2}{1{,}6\cdot 10^5 N/m^2}\right) = 442{,}5K$. Você também pode usar a equação auxiliar para o processo adiabático **ac**, $T_a \cdot V_a^{\gamma-1} = T_c \cdot V_c^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \gamma - 1 = R/c_V$ **,** para calcular a temperatura $T_c$.

*Solução do item (b):*

***Processo isotérmico (ab) (a temperatura constante)***
♠*Trabalho realizado no processo isotérmico (ab) $W_T$:*

$$W_T = n\cdot R\cdot T\cdot \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \Rightarrow W_T = 0{,}1 mol\cdot 8{,}31 J/(mol\cdot K)\cdot 600K\cdot \ln\left(\frac{5\cdot \cancel{10^{-4}} m^3}{2\cdot \cancel{10^{-4}} m^3}\right) = \boxed{+456{,}9J}.$$

♠Calor Trocado $Q_T$:
$Q_T = W_T = \boxed{+456{,}9J}$ Calor foi adicionado ao gás (absorvido).

***Processo isocórico (bc)(a volume constante)***
♠*Trabalho realizado no processo isocórico (bc) $W_V$:*
*$W_V$=0J (não existe realização de trabalho a volume constante).*
♠*Calor trocado* $Q_V = n\cdot c_V \cdot \Delta T$

$$Q_V = n\cdot c_V\cdot (T_c - T_b) = 0{,}1 mol\cdot \underbrace{3\cdot 8{,}31 J/(mol\cdot K)}_{c_V}\cdot (442{,}5K - 600K) = \boxed{-392{,}6J} \text{ Calor foi rejeitado.}$$

***Processo adiabático(ac)***
♠*Trabalho realizado no processo adiabático(ac) $W_{Q=0}$:*

$$W = -n\cdot c_V\cdot \Delta T \Rightarrow W = -n\cdot c_V\cdot (T_c - T_a) = -0{,}1 mol\cdot \underbrace{3\cdot 8{,}31 J/(mol\cdot K)}_{c_V}\cdot (442{,}5K - 600K) = \boxed{+392{,}6J}.$$

♠*Calor trocado*
*Q=0J para processo adiabático.*

## Processos Termodinâmicos Especiais

Agora vamos estudar alguns processos termodinâmicos especiais. Novamente, vamos usar a primeira lei da termodinâmica $\Delta E_{int}=Q-W$ e $\Delta E_{int}=n\cdot c_V\cdot\Delta T$. Também vamos fazer uma análise da variação de temperatura $\Delta T$, do calor trocado $Q$ e do trabalho realizado $W$, usando resultados já calculados anteriormente.

**Expansão livre -** Expansão livre é um processo hipotético, que deve ocorrer bem lentamente para que nenhum trabalho seja realizado (***W=0***) e nenhum calor seja trocado (***Q=0***). Como consequência da primeira lei da termodinâmica, $\Delta E_{int}=0$ ou que implica dizer que $\Delta$***T=0***. Expansão livre ocorre sem realização de trabalho, sem troca de calor e sem variação de temperatura. Não é possível representar este processo no diagrama PV, pois não existe expansão sem realização de trabalho. Este caso só pode acontecer se você liberar o gás no vácuo e de forma bem lenta, molécula a molécula, para que a molécula do gás que foi liberada possa se dissipar.

**Processo Cíclico** - Este é o processo mais importante e iremos aplicá-lo para ciclo termodinâmico de máquinas térmicas e para refrigeradores. Processo cíclico é um processo fechado, em que o estado termodinâmico de chegada (***f***) coincide com o estado de partida (***i***). Neste caso, $\Delta T=0$ e como consequência a variação da energia interna em um processo *cíclico* é zero $\Delta E_{int} = 0$ o que implica em $Q_{ciclo} = W_{ciclo}$. É bem simples identificar o sinal do trabalho realizado ao longo do ciclo (Figura 88), basta apenas verificar o sentido do ciclo representado pela seta em cada processo. Se o ciclo ocorre no sentido horário, o trabalho $W_{ciclo}$ é positivo e o ciclo pode ser de uma máquina térmica. Se o ciclo ocorre no sentido anti-horário, o trabalho $W_{ciclo}$ é negativo e o ciclo pode ser de um refrigerador. Máquinas térmicas e refrigeradores serão vistos na próxima seção.

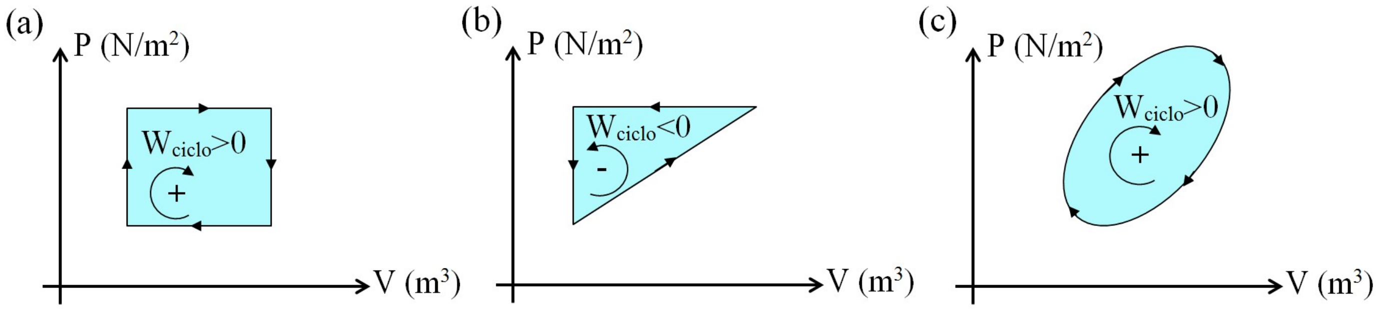



Figura 88 – Exemplos de ciclo termodinâmico. Na fig.(a), temos um ciclo retangular que ocorre no sentido horário e o trabalho realizado pelo ciclo é positivo $W_{ciclo} > 0$. Na fig.(b), tem-se um ciclo triangular, cujo sentido é o anti-horário, portanto o trabalho é negativo $W_{ciclo} < 0$. Na fig.(c) temos um ciclo termodinâmico oval. Em todos os casos, o trabalho realizado pelo ciclo é numericamente igual à área desse ciclo (região azul).

Como o trabalho **W** é numericamente igual a área sob a curva no diagrama PV, em módulo, quanto maior for a área, maior será o trabalho realizado. Na Figura 89, temos um exemplo para um ciclo triangular composto por três processos termodinâmicos, (**ab**), (**bc**) e (**ca**). O trabalho do ciclo é a soma dos trabalhos de cada processo: $W_{ciclo} = W_{ab} + W_{bc} + W_{ca}$. O trabalho $W_{ab}$ é positivo, pois está ocorrendo uma *expansão*; o trabalho $W_{bc}$ é zero, pois é um processo *isocórico (a volume constante)*. O trabalho $W_{ca}$ é negativo, porque está ocorrendo uma *compressão*.

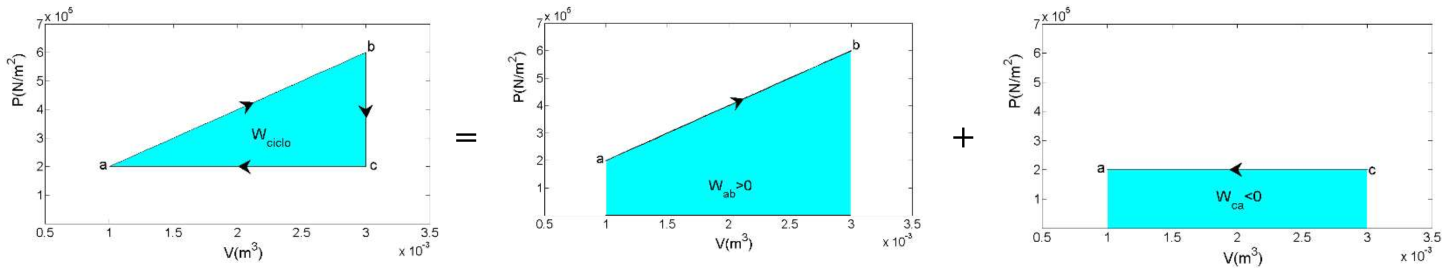



Figura 89 – trabalho realizado ao longo de um ciclo termodinâmico é a soma dos trabalhos realizados em cada processo termodinâmico. Neste exemplo, $W_{ciclo} = W_{ab} + W_{bc} + W_{ca}$. Veja que $W_{bc} = 0$, pois este ocorre a volume constante.

## Exercícios

**1)** Um gás diatômico passa por **dois** processos. No **primeiro**, o volume permanece constante a $0{,}02 m^3$ e a pressão cresce de $2{,}0 \cdot 10^5 Pa$ para $5{,}0 \cdot 10^5 Pa$. O **segundo** processo ocorre a pressão constante de $5{,}0 \cdot 10^5 Pa$ e o gás sofre uma compressão até o volume final atingir $0{,}015 m^3$. Sabe-se que a temperatura é 481,35 K para pressão de $2{,}0 \cdot 10^5 Pa$ e a volume $0{,}02 m^3$.

a) Desenhe o diagrama *PV* mostrado os dois processos.
b) Calcule o calor trocado **Q** e o trabalho realizado **W** em cada processo.

**2)** Dois moles de um gás ideal são comprimidos em um cilindro a uma temperatura constante de 90ºC até que a pressão inicial tenha dobrado.

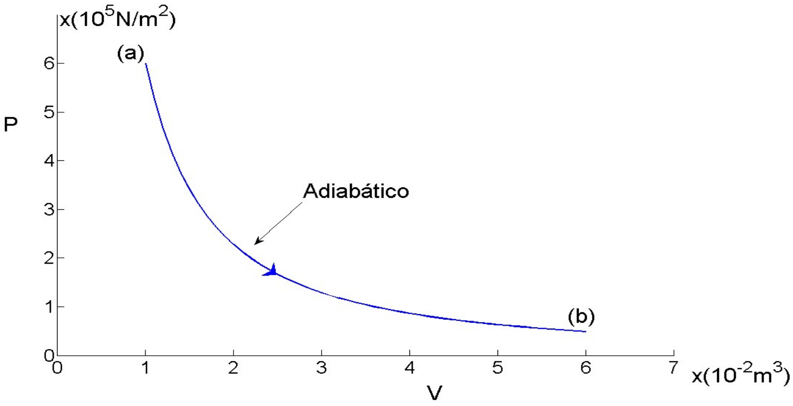
a) Desenhe o diagrama PV desse processo.
b) Calcule o trabalho realizado pelo gás, o calor trocado e a variação da energia interna do gás.

**3)** Cinco moles de um gás ideal monoatômico a uma temperatura inicial de 120ºC se expandem e, nesse processo, absorvem 1200J de calor e realizam 2200J de trabalho. Qual a temperatura final do gás?

**4)** Um cilindro com um pistão móvel contém 3 moles de gás $N_2$.

a) O gás é aquecido a volume constante até que 1600J de calor tenham sido fornecidos. Calcule a variação de temperatura ($\Delta T$) do gás e a variação da energia interna ($\Delta E_{int}$).
b) Considere a mesma quantidade de calor (do item a) fornecida ao gás, mas desta vez o gás é expandido à pressão constante. Calcule a variação de temperatura ($\Delta T$) do gás e a variação da energia interna ($\Delta E_{int}$) e o trabalho realizado.

**5)** Calcule a temperatura no ponto (**a**), no ponto (**b**), o calor trocado $\mathbf{Q_{ab}}$ e o trabalho realizado $\mathbf{W_{ab}}$, por 1 mol de gás monoatômico no processo <u>adiabático</u> (**ab**), mostrado na figura ao lado.

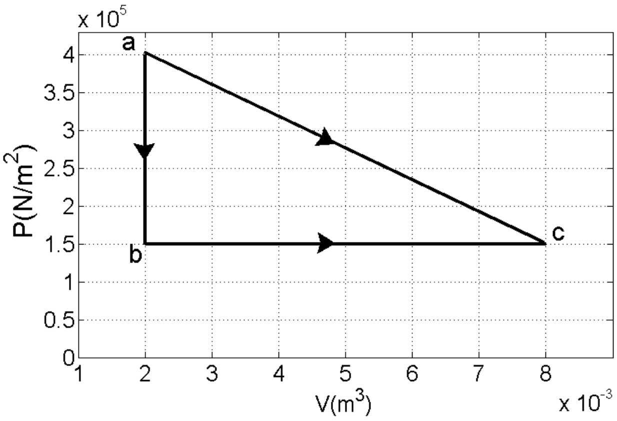



**6) U**m gás ideal monoatômico, *n=4mol*, se expande a pressão constante de $2{,}5 \cdot P_{atm}$. Durante a expansão o volume aumenta de $3{,}2 \cdot 10^{-2} m^3$ para $4{,}5 \cdot 10^{-2} m^3$. Calcule:

a) A temperatura inicial e final do gás.
b) O trabalho que o gás realiza para se expandir.
c) A quantidade de calor trocado pelo gás (adicionado ou removido) e a variação da energia interna do gás.
d) Desenhe o diagrama PV desse processo indicando em cada ponto a temperatura, pressão e volume. Também indique com uma seta a representação do calor trocado pelo gás (se o calor foi adicionado ou removido).

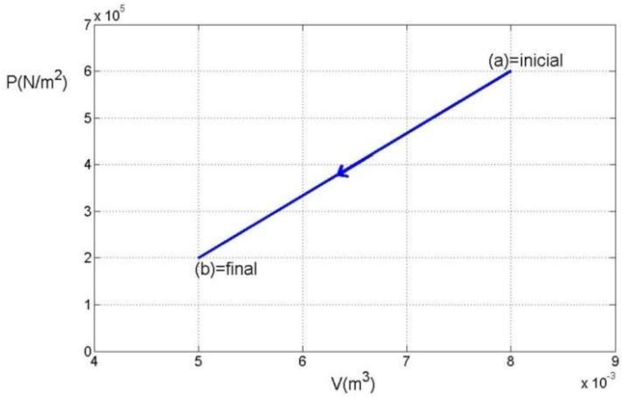
**7)** Um gás ideal $CH_4$(metano), contendo 0.1 mol, é primeiro resfriado sem variação de volume, e depois expandido sem variação de pressão (como mostrado na figura ao lado). Calcule:

a) A temperatura nos pontos **a**, **b** e **c** (extraia seus dados no gráfico).
b) O calor trocado $Q_{ab}$, $Q_{bc}$ e o trabalho realizado $W_{ab}$, $W_{bc}$ (indique se o calor foi <u>absorvido</u> ou <u>rejeitado</u> e se o trabalho foi realizado <u>pelo</u> sistema ou <u>sobre</u> o sistema).
c) Agora o gás se expande do estado **a** para o estado **c**. Qual é o trabalho realizado $W_{ac}$ e o calor trocado $Q_{ac}$?
d) Calcule o calor trocado e o trabalho realizado utilizando os processos **abc** e **ac**. Mostre que $\Delta E_{int(abc)} = \Delta E_{int(ac)}$.




*Dica: calcule o trabalho W pela área sob a curva no diagrama PV.*

**8)** A figura ao lado representa um processo termodinâmico executado por um mol de gás monoatômico. Calcule o trabalho realizado $W_{ab}$ e o calor trocado $Q_{ab}$ no processo ***ab*** (a seta indica o sentido do processo).




**9)** Um gás monoatômico se expande lentamente até ocupar o dobro do volume inicial, realizando um trabalho de *1000J*. Calcule o calor trocado **Q** e a variação da energia interna $\Delta E_{int}$ considerando o processo:
**a)** - Adiabático
**b)** - Isobárico.

**10)** Um gás monoatômico se expande lentamente até ocupar o dobro do volume inicial, realizando um trabalho de *1000J*. Calcule o calor trocado **Q** e a variação da energia interna $\Delta E_{int}$ considerando o processo:
**a)** Adiabático
**b)** Isobárico.

***Respostas***
**1)** (b) $Q_{12}$=15001J, $W_{12}$=0J, $Q_{23}$=-8750,9J, $W_{23}$=-2500J
**2)** (b) W=-4181,8J, Q=-4181,8J, $\Delta E_{int}$=0J;

**3)** 377K ou 104ºC

**4)** (a) $\Delta T$=25,7K; (b) $\Delta T$=18,3K, $\Delta E_{int}$=1143J, W=457J
**5)** *feita em sala*

**6)** (a) $T_i$=240,7K, $T_f$=338,4K; (b) W=3250J; (c) Q=8118,9J, $\Delta E_{int}$=4868,9J
**7)** (a) $T_a$=962.7K, $T_b$=361K, $T_c$=1444K; (b) $Q_{ab}$=-1500J $Q_{bc}$=3600J, $W_{ab}$=0J $W_{bc}$=900J; (c) $W_{ac}$=1650J, $Q_{ac}$=2850J; d) $Q_{abc}=Q_{ab}+Q_{bc}$ e $W_{abc}=W_{ab}+W_{bc}$; $Q_{ac}=Q_{ac}$ e $W_{ac}=W_{ac}$.

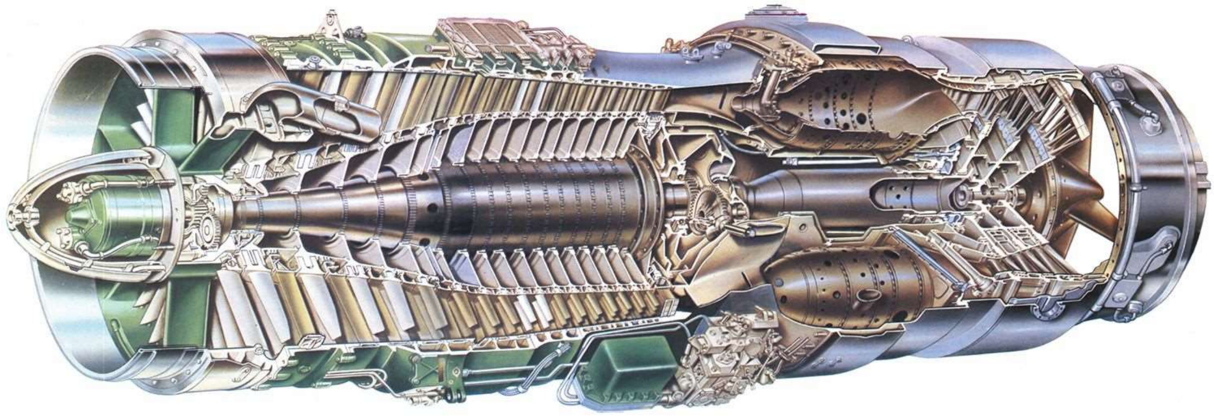
**8)** $W_{ab}$= -1200J, $Q_{ab}$= -6904J
**9) a)** 0 e -1000J **b)** 2500J e 1500J
**10)**

## Segunda lei da termodinâmica

A segunda lei da termodinâmica pode ser enunciada de várias maneiras, aqui vamos citar apenas duas: *"É impossível para qualquer sistema passar por um processo no qual absorva calor e o converta completamente em trabalho mecânico sem que haja perdas"*. Esta definição rege o funcionamento das máquinas térmicas.

*"O calor flui, de forma espontânea, de um reservatório térmico a uma temperatura elevada para outro reservatório térmico a uma temperatura mais baixa, até o equilíbrio térmico ser atingido".* Vamos aplicar esta definição para o funcionamento dos refrigeradores, que operam no sentido inverso para o fluxo de calor, mas não de forma espontânea, mas às custas de um trabalho externo, que irá aparecer na sua conta de energia elétrica.

## Motores e Refrigeradores



http://files.site-fusion.co.uk/webfusion94891/image/18_avon_1.png

### Máquinas Térmicas

Máquina térmica é um dispositivo que converte energia interna em trabalho mecânico. O trabalho ($W$) é obtido quando o calor flui $Q_q^{abs}$ (=calor absorvido da fonte quente) de um reservatório térmico a uma temperatura elevada ($T_q$) para outro reservatório térmico $Q_f^{rej}$ (=calor rejeitado na fonte fria) a uma temperatura mais baixa ($T_f$). É possível identificar uma máquina térmica sempre que o calor absorvido for na fonte de maior temperatura e o calor rejeitado for na fonte de menor temperatura.

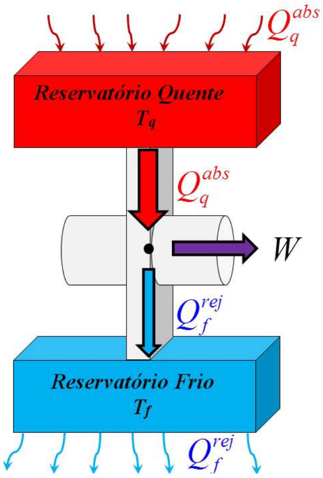



**Figura 90** – Desenho esquemático de uma Máquina Térmica. Neste exemplo, $Q_q^{abs}$ é o calor absorvido do reservatório térmico operando a temperatura 'quente' $T_q$ e $Q_f^{rej}$ é o calor rejeitado no reservatório frio operando na temperatura $T_f$. $\boldsymbol{W}$ é o trabalho realizado pela máquina.

### Trabalho realizado por uma Máquina Térmica e sua Potência

Usando o principio da conservação da energia, a energia que entra no ponto ▪ deve ser igual a energia que sai desse ponto: $\underbrace{Q_q^{abs}}_{entrando} = \underbrace{Q_f^{rej} + W}_{saindo}$. Isolado $W$, vamos obter o trabalho do ciclo da máquina térmica

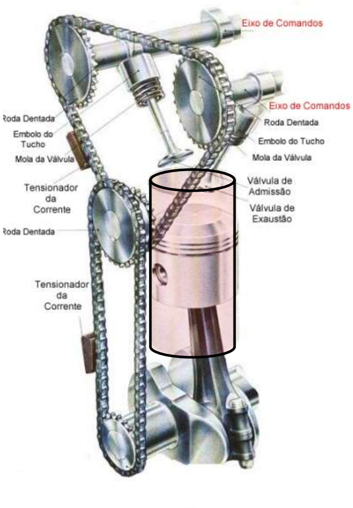
$$\boxed{W = Q_q^{abs} - \left|Q_f^{rej}\right|}, \tag{3.20}$$

o símbolo $|...|$ representa o módulo da variável, você deve usar apenas o valor absoluto (positivo). Para se calcular a potência da máquina térmica, vamos usar a definição geral de potência, equação (1.24)

$$\boxed{P_{otencia} = \frac{W}{\Delta t}} \tag{3.21}$$

onde $W$ é trabalho realizado ( em Joule $J$) em um ciclo termodinâmico e Δt é a duração, em *segundo*, de um ciclo.

Durante o funcionamento de uma máquina térmica, motor a combustão interna, por exemplo, o calor absorvido $Q_q^{abs}$ ocorre durante a explosão da mistura *ar+combustível* dentro do cilindro do motor ($Q_q^{abs} = +m_c \cdot L_e$, onde $m_c$ é a massa do combustível a ser queimado e $L_e$ é o calor latente de explosão). O trabalho é obtido quando o gás se expande e empurra o pistão (ver figura ao lado) que faz girar um sistema de engrenagens. O calor é rejeitado $Q_f^{rej}$ pelo sistema de exaustão e escapamento. Todo o ciclo termodinâmico ocorre dentro do cilindro do motor. Normalmente, os carros populares possuem quatro cilindros (ver figura abaixo à esquerda), que funcionam de forma alternada. Os carros mais modernos e econômicos possuem três cilindros (ver figura abaixo à direita). O bloco do motor dos carros populares é feito de ferro fundido ou alumínio, este último por ser mais leve. Já o cilindro é revestido de aço inoxidável por suportar altas temperaturas (ver **Tabela 9**).



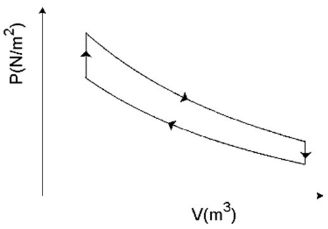

Bloco do motor de alumínio composto por quatro cilindros revestidos de aço inoxidável.

fonte da imagem: https://pt.wikipedia.org/wiki/Bloco_do_motor

Bloco do motor de ferro fundido composto por três cilindros revestidos de aço inoxidável.

fonte da imagem: http://carplace.uol.com.br

**Ciclo do motor a gasolina**




Quando se fala em cilindradas de um motor, significa que a soma dos volumes de todos os cilindros do motor é igual essa cilindrada. O volume do cilindro é medido em **c**entímetros **c**úbicos (**c.c.**) cm$^3$. A lembrar que 1000cm$^3$=1L. Portanto, os motores de 1000 cilindradas, que são os motores 1,0, e quatro cilindros, cada cilindro possui um volume de 250ml ou 0,25L=1L/4cilindros. Já para os motores 1,0 e três cilindros, cada um possui um volume de 333ml ou 0,333L=1L/3cilindros. Os motores 2,0 (2000cc =2L) e quatro cilindros, cada cilindro possui um volume de 500ml ou 0,5L=0,5·10$^{-3}$m$^3$.

## Eficiência de uma máquina térmica

A eficiência $\varepsilon$ do ciclo termodinâmico é definida como sendo a fração de calor absorvido $Q_q^{abs}$ ao longo do ciclo que é convertido em trabalho mecânico $W$,

$$\boxed{\varepsilon = \frac{W}{Q_q^{abs}}} = \frac{\text{Trabalho realizado ao longo do ciclo}}{\text{Calor absorvido ao longo do ciclo}}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{Q_q^{abs} - \left|Q_f^{rej}\right|}{Q_q^{abs}} = 1 - \frac{\left|Q_f^{rej}\right|}{Q_q^{abs}}}. \tag{3.22}$$

onde $0 < \varepsilon < 1$, $Q_q^{abs}$ é o calor absorvido e $Q_f^{rej}$ é o calor rejeitado ao longo do ciclo termodinâmico.

Exemplos

**E.1)** Uma máquina térmica absorve 3290 *cal* e rejeita 2632 *cal*. Calcule:

a) O trabalho realizado por essa máquina (em *cal* e *J*)

b) A potência (em *W* e *cv*) dessa máquina, dado que esta executa 20 ciclos por segundo.

*Solução:*

a) O trabalho realizado pode ser calculado usando a equação (3.20), $W = Q_q^{abs} - \left|Q_f^{rej}\right|$. Substituindo os valores numéricos: $W = 3290cal - 2632cal = \underline{658cal}\big| \cdot \left(\dfrac{4,19J}{1cal}\right) = \underline{2757J}\big|$.

b) A potência da máquina é obtida pela equação (3.21): $P_{otencia} = \dfrac{W}{\Delta t}$. Substituindo os valores numéricos, temos:

$$P_{otencia} = \frac{2757J}{(1/20)s} = \underline{55140W}\big| \cdot \left(\frac{1cv}{735.5W}\right) = \underline{75cv}\big|.$$

**E.2)** Na Figura 91, *1,5 mol* de um gás diatômico é usado em um ciclo termodinâmico retangular composto por quatro processos: dois isobáricos (**ab**) e (**cd**) e dois isocóricos (**bc**) e (**da**). Calcule:

a) As variáveis de estados *P, V* e *T* em cada estado termodinâmico **a**, **b**, **c**, **d**.

b) O calor trocado *Q* e o trabalho realizado *W* em cada processo termodinâmico (indique se o calor foi absorvido ou rejeitado e também se houve uma expansão ou compressão para o trabalho realizado).

c) calcule o trabalho realizado no ciclo, a potência dessa máquina e a eficiência do ciclo termodinâmico. Sabe-se que a máquina executa 10 ciclos por segundo.

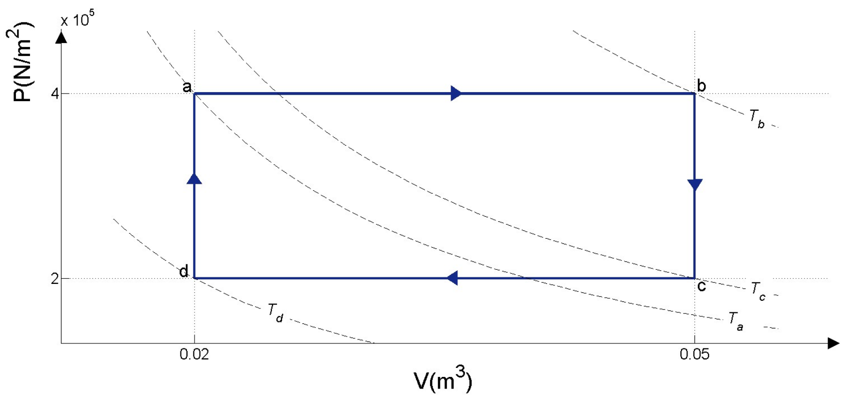



**Figura 91** – Ciclo termodinâmico retangular composto por quatro processos: dois a pressão constante e dois a volume constante.

*Solução:*

a) Para calcular as variáveis *P, V* e *T*, precisamos apenas calcular a temperatura, pois *P* e *V* podem ser obtidos pela leitura do gráfico:

**estado a**: $P_a=4\cdot10^5 N/m^2$, $V_a=0.02\ m^3$ e a temperatura é obtida pela equação de estado dos gases ideais $P\cdot V = n\cdot R\cdot T$; ou seja $T_a = \dfrac{P_a\cdot V_a}{n\cdot R} = \dfrac{4\cdot10^5 N/m^2\cdot 0,02m^3}{1,5mol\cdot 8,31J/(mol\cdot K)} = 641,8K$;

**estado b**: $P_b=4\cdot10^5 N/m^2$, $V_b=0,05m^3$ e $T_b = \dfrac{P_b\cdot V_b}{n\cdot R} = \dfrac{4\cdot10^5 N/m^2\cdot 0,05m^3}{1,5mol\cdot 8,31J/(mol\cdot K)} = 1604,5K$;

**estado c**: $P_c$=2·10$^5$N/m$^2$, $V_c$=0,05m$^3$ e $T_c = \dfrac{P_c \cdot V_c}{n \cdot R} = \dfrac{2 \cdot 10^5 N/m^2 \cdot 0,05m^3}{1,5mol \cdot 8,31J/(mol \cdot K)} = 802,3K$ ;

**estado d**: $P_d$=2·10$^5$N/m$^2$, $V_d$=0,02m$^3$ e $T_d = \dfrac{P_d \cdot V_d}{n \cdot R} = \dfrac{2 \cdot 10^5 N/m^2 \cdot 0,02m^3}{1,5mol \cdot 8,31J/(mol \cdot K)} = 320,9K$ .

b) Neste item, vamos calcular o calor trocado em cada processo; $Q_{ab}$, $Q_{bc}$, $Q_{cd}$ e $Q_{da}$ (o sentido do processo é indicado pela seta) e o trabalho realizado; $W_{ab}$, $W_{bc}$, $W_{cd}$ e $W_{da}$. Como se trata de um gás diatômico, então ***$c_V$=5/2R*** e ***$c_P$=$c_V$+R=5/2R +R=7/2R*** .

**processo ab** (processo isobárico '*pressão constante*'): $Q_{ab(P)} = n \cdot c_P \cdot \Delta T$ e $W_{ab(P)} = P \cdot \Delta V \overset{ou}{=} n \cdot R \cdot \Delta T$

$Q_{ab(P)} = n \cdot c_P \cdot (T_b - T_a) \Rightarrow Q_{ab(P)} = 1,5mol \cdot 7/2 \cdot 8,31J/(mol \cdot K)(1604,5K - 641,8K) = +42000,2J > 0\ (abs)$

$W_{ab(P)} = n \cdot R \cdot (T_b - T_a) \Rightarrow W_{ab(P)} = 1,5mol \cdot 8,31J/(mol \cdot K)(1604,5K - 641,8K) = +12000,0J > 0$ (expansão) ou

$W_{ab(P)} = P_a \cdot (V_b - V_a) \Rightarrow W_{ab(P)} = 4 \cdot 10^5 N/m^2 \cdot (0.05m^3 - 0.02m^3) = +12000.0J$

**processo bc** (processo isocórico '*volume constante*'): $Q_{bc(V)} = n \cdot c_V \cdot \Delta T$ e $W_{bc(V)} = 0J$

$Q_{bc(V)} = n \cdot c_V \cdot (T_c - T_b) \Rightarrow Q_{bc(V)} = 1,5mol \cdot 5/2 \cdot 8,31J/(mol \cdot K)(802,3K - 1604,5K) = -24998,6J < 0\ (rej)$

$W_{bc(V)} = 0J$ . Não existe realização de trabalho quando o volume é mantido constante.

**processo cd** (processo isobárico '*pressão constante*'): $Q_{cd(P)} = n \cdot c_P \cdot \Delta T$ e $W_{cd(P)} = P \cdot \Delta V \overset{ou}{=} n \cdot R \cdot \Delta T$

$Q_{cd(P)} = n \cdot c_P \cdot (T_d - T_c) \Rightarrow Q_{cd(P)} = 1,5mol \cdot 7/2 \cdot 8,31J/(mol \cdot K)(320,9K - 802,3K) = -21002,3J < 0\ (rej)$

$W_{cd(P)} = n \cdot R \cdot (T_d - T_c) \Rightarrow W_{cd(P)} = 1,5mol \cdot 8,31J/(mol \cdot K)(320,9K - 802,3K) = -6000,0J < 0$ (compressão) ou

$W_{cd(P)} = P_c \cdot (V_d - V_c) \Rightarrow W_{cd(P)} = 2 \cdot 10^5 N/m^2 \cdot (0,02m^3 - 0,05m^3) = -6000,0J$

**processo da** (processo isocórico '*volume constante*'): $Q_{da(V)} = n \cdot c_V \cdot \Delta T$ e $W_{da(V)} = 0J$

$Q_{da(V)} = n \cdot c_V \cdot (T_a - T_d) \Rightarrow Q_{da(V)} = 1,5mol \cdot 5/2 \cdot 8,31J/(mol \cdot K)(641,8K - 320,9K) = +10000J > 0\ (abs)$

$W_{da(V)} = 0J$ . Não existe realização de trabalho quando o volume é mantido constante.

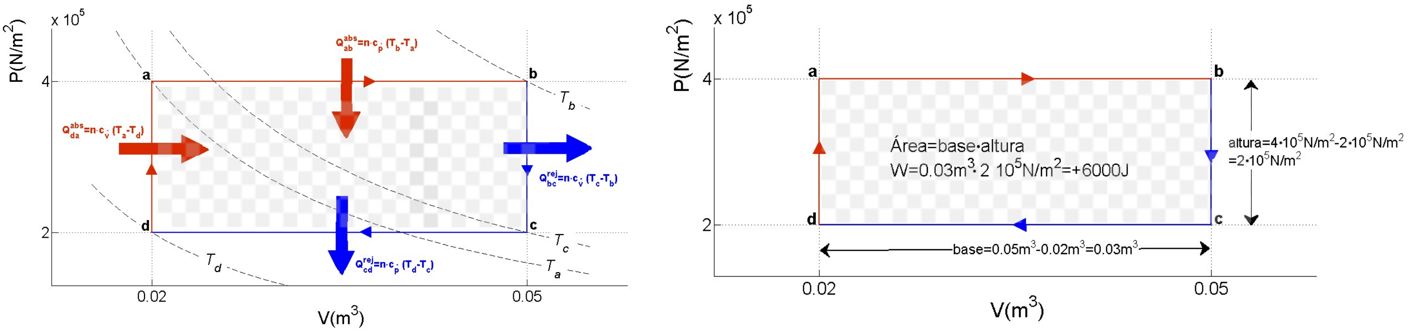



**Figura 92** – Na figura a esquerda, tem-se o desenho esquemático para troca de calor ao longo do ciclo termodinâmico. Na figura a direita, o trabalho realizado pelo ciclo termodinâmico é numericamente igual à área do ciclo.

c) O trabalho do ciclo é obtido somando todos os trabalhos ao longo dos processos termodinâmicos que compõe o ciclo. Neste exemplo, você também pode fazer pela área do ciclo, que é um retângulo.

$W_{ciclo}= W_{ab}+W_{bc}+W_{cd}+W_{da} =12000J+0J+(-6000J)+0J=+6000J.$

$$Q_{ciclo}^{abs} = Q_{ab} + Q_{da} = 42000.2J + 10000.0J = +52000.2J,$$
$$\left|Q_{ciclo}^{rej}\right| = \left|Q_{bc}\right| + \left|Q_{cd}\right| = \left|-24998.6J\right| + \left|-21002.3J\right| = +46000.9J.$$

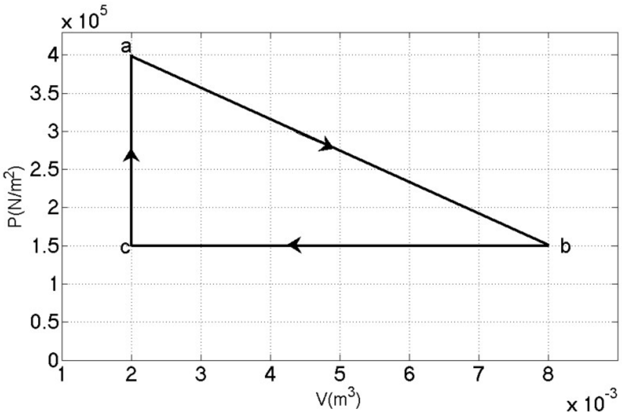
*Potência da máquina:* $P_{otencia} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{6000J}{1/10s} = \boxed{60000\cancel{W}} \cdot \left(\frac{1cv}{735{,}5\cancel{W}}\right) \boxed{= 81{,}6cv}$. Considerando *1cv=735,5W.*

Para a eficiência do ciclo, usar a equação (3.22): $\boxed{\varepsilon = \frac{W}{Q_q^{abs}}}$ *ou* $\boxed{\varepsilon = 1 - \frac{\left|Q_f^{rej}\right|}{Q_q^{abs}}}$.

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_q^{abs}} = \frac{6000\cancel{J}}{52000{,}2\cancel{J}} = 0{,}12(=12\%) \quad ou \quad \varepsilon = 1 - \frac{\left|Q_f^{rej}\right|}{Q_q^{abs}} = 1 - \frac{46000{,}9\cancel{J}}{52000{,}2\cancel{J}} = 0{,}12(=12\%).$$

**E.3)** Na figura ao lado tem-se um ciclo termodinâmico realizado por *0.1* mol de um gás poliatômico. Calcule:

a) Os calores trocados: $Q_{ab}$, $Q_{bc}$, $Q_{ca}$, indique se o calor foi absorvido ou rejeitado.
b) O trabalho realizado pela máquina térmica e a potência ( em *W* e *cv*), sabendo que esse motor realiza 20 ciclos por segundo.
c) A eficiência do ciclo termodinâmico.




*Solução:*

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow \boxed{T = \frac{P \cdot V}{n \cdot R}} \Rightarrow T_a = \frac{P_a \cdot V_a}{n \cdot R} = \frac{4 \cdot 10^5 N/m^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} m^3}{0{,}1mol \cdot 8{,}31J/(mol \cdot K)} = \boxed{T_a = 962{,}7K}$$
$$T_b = \frac{1{,}5 \cdot 10^5 N/m^2 \cdot 8 \cdot 10^{-3} m^3}{0{,}1mol \cdot 8{,}31J/(mol \cdot K)} = \boxed{T_b = 1444K}; \quad T_c = \frac{1{,}5 \cdot 10^5 N/m^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} m^3}{0{,}1mol \cdot 8{,}31J/(mol \cdot K)} = \boxed{T_c = 361K}$$
$$c_v = 3R = 3 \cdot 8{,}31J/(mol \cdot K) = 24{,}93J/(mol \cdot K)$$
$$n = 0{,}1mol$$

*a)*

*Da primeira lei*:

$$\Delta E_{int} = Q - W; \quad \Delta E_{int} = n \cdot c_v \cdot (T_{final} - T_{inicial})$$

$Q_{ab} = \Delta E_{int(ab)} + W_{ab} = n \cdot c_v \cdot (T_b - T_a) +$ W=Área $= 1200J + 1650J = \boxed{2850J}^{absorvido}$

$Q_{bc} = \Delta E_{int(b \to c)} + W_{bc} = n \cdot c_v \cdot (T_c - T_b) +$ W=Área $= (-2700)J + (-900J) = \boxed{-3600J}^{rejeitado}$

ou

$$Q_{bc} = n \cdot c_p \cdot (T_c - T_b) = 0{,}1mol \cdot 4 \cdot 8{,}31J/(mol \cdot K)(361 - 1444)K = -3600J$$

$Q_{ca} = \Delta E_{int(ca)} + W_{ca} = n \cdot c_v \cdot (T_a - T_c) + | = 1500J + 0J = \boxed{1500J}^{absorvido}$

*b) Trabalho do ciclo e Potência da máquina*

$$W_{ciclo} = \sum Q_{absorvido} - \left|\sum Q_{rejeitado}\right| = 2850J + 1500J - |-3600J| = \boxed{750J}; \quad P = \frac{W_{ciclo}}{\Delta t_{\substack{duraçao \\ ciclo}}} = \frac{750J}{\frac{1}{20}s} = \boxed{15000W = 20,4cv}$$

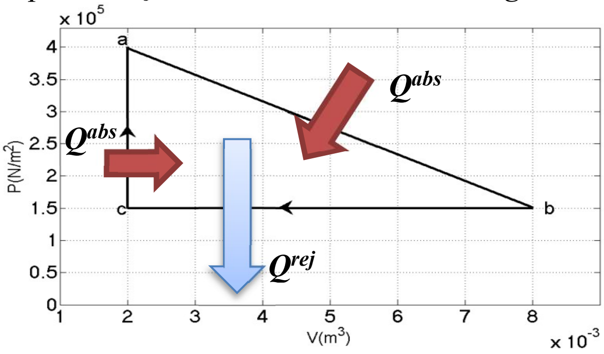
ou

$$W_{ciclo} = \triangle = \frac{(8-2)\cdot 10^{-3}m^3 \cdot (4-1,5)\cdot 10^5 N/m^2}{2} = \boxed{750J}$$

*c) Eficiência do ciclo*

$$\varepsilon = \frac{W_{ciclo}}{\sum Q_{absorvido}} = \frac{750J}{Q_{(ab)} + Q_{(ca)}} = \frac{750J}{2850J + 1500J} = 0,172$$

*Representação da troca de calor ao longo do ciclo*




Nenhuma máquina pode ter 100% de eficiência ($\varepsilon = 1,0$), pois isso violaria a segunda lei da termodinâmica, converter calor completamente em trabalho mecânico sem perdas (ou $|Q_f^{rej}| = 0$). A equação (3.22) é geral, válida para qualquer ciclo termodinâmico. Veja que uma forma de aumentar a eficiência de uma máquina térmica é aumentar a quantidade de calor absorvido na fonte quente $Q_q^{abs}$ (ver Figura 93). O ciclo termodinâmico mais eficiente foi idealizado por Sadi Carnot, no ano de 1824, que será definido mais adiante.

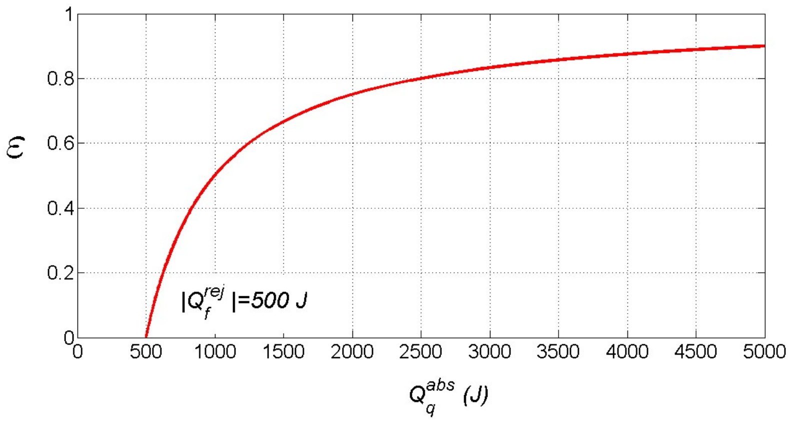



Figura 93 – A eficiência de uma máquina térmica é maior com o aumento do calor absorvido $Q_q^{abs}$ do reservatório térmico quente.

## Calor liberado na explosão de alguns Combustíveis

Quando a mistura *ar+combustível* explode, o calor liberado na explosão é o calor absorvido $Q_q^{abs}$ pela máquina térmica. É possível calcular esse calor absorvido pela relação

$$Q_q^{abs} = m \cdot L_e \tag{3.23}$$

onde $m$ é a massa de combustível queimada e $L_e$ é o calor latente de explosão (também conhecido como calor latente de combustão), cujo valores estão na Tabela 8 para alguns combustíveis. Por exemplo, uma grama de *gasolina A* quando é queimada, esta libera $Q = m \cdot L_e = 1g \cdot 45980J/g = 45980J$ de energia em forma de calor. Já a gasolina com 20% de etanol, a mesma massa de 1 grama, libera 40550J de energia em forma de calor, e assim por diante.

| Combustível | Calor Latente de Explosão $L_e$ (*J/g*) |
|---|---|
| Gás liquefeito de petróleo (GLP) | 49030 |
| Gasolina A | 45980 |
| Oléo Diesel | 43890 |
| Óleo Combustível | 42630 |
| Gasolina com 20% de etanol | 40550 |
| Carvão vegetal | 33430 |
| Etanol | 27170 |
| Bagaço de cana | 9615 - 19165 |
| Lenha | 10450-14630 |

Tabela 8 - Calor latente de explosão $L_e$ para vários combustíveis.

## Ciclo de Carnot

Sadi Carnot idealizou um ciclo termodinâmico composto por quatro processos: dois processos isotérmicos (que ocorre a temperatura constante) e dois processos adiabáticos (onde não há troca de calor). O ciclo de Carnot fornece a maior eficiência que uma máquina térmica pode ter. Nenhum outro ciclo pode ter uma eficiência maior que a do ciclo de Carnot.

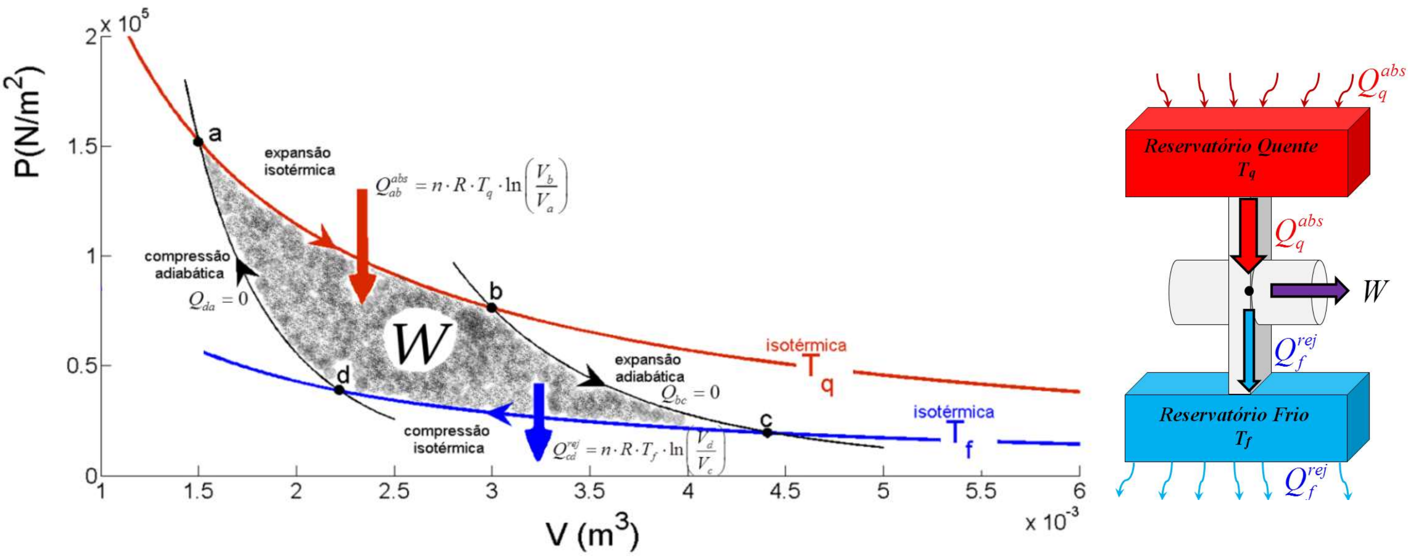



**Figura 94** – Ciclo de Carnot para uma máquina térmica. O ciclo é composto por dois processos isotérmicos e dois processos adiabáticos. Durante a expansão isotérmica, o calor é absorvido do reservatório térmico quente $Q^{abs}$; e durante a compressão isotérmica, o calor é rejeitado $Q^{rej}$ no reservatório frio.

### Eficiência do ciclo de Carnot

Usando a equação (3.22) $\varepsilon = 1 - \frac{\left|Q_f^{rej}\right|}{Q_q^{abs}}$, podemos calcular a eficiência do ciclo de Carnot. Para isso, precisamos conhecer o calor total absorvido $Q_q^{abs}$ e o calor total rejeitado $Q_f^{rej}$ ao longo do ciclo termodinâmico.

Resumos das equações que sempre iremos usar ao longo de qualquer processo termodinâmico.

$\Delta E_{\text{int}} = Q - W$ (1ª Lei da Termodinâmica)

$$\Delta E_{\text{int}} = n \cdot c_v \cdot (T_{final} - T_{inicial}), \quad \underbrace{c_v = \frac{3}{2}R}_{\text{gás monoatômico}}, \quad \underbrace{c_v = \frac{5}{2}R}_{\text{gás diatômico}}, \quad \underbrace{c_v = 3R}_{\text{gás poliatômico}}, \quad R = 8.31\frac{J}{mol \cdot K}.$$

$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ (equação de estado dos gases ideais)

- Processo (**ab**): O processo (*ab*) é uma expansão (W$_{ab}$>0) isotérmica que ocorre na temperatura $T_q$, portanto $\Delta T_{ab}=0$ e $\Delta E_{int(ab)}=0$. Usando a primeira lei da termodinâmica $\Delta E_{\text{int}} = Q - W = 0$, concluímos que o calor trocado $Q$ é igual ao trabalho realizado $W$ no processo isotérmico $Q_{ab}^{abs} = W_{ab} = n \cdot R \cdot T_q \cdot \ln\left(\dfrac{V_b}{V_a}\right) > 0$ (calor absorvido). Resumo:

**Variação da Energia Interna e a 1ª Lei da Termodinâmica**

$$\Delta E_{\text{int}(ab)} = Q_{ab} - W_{ab} \qquad \text{1ª Lei da Termodinâmica}$$

$$\Delta E_{\text{int}(ab)} = n \cdot c_v \cdot (\underbrace{T_q}_{T_b} - \underbrace{T_q}_{T_a}) = 0, \quad \text{pois: } T_a = T_q \text{ e } T_b = T_q \text{(temperatura da fonte quente)}$$

**Calor Trocado**

$$Q_{ab}^{abs} = W_{ab} = n \cdot R \cdot T_q \cdot \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) > 0 \text{ (calor absorvido),}$$

**Trabalho Realizado**

$$W_{ab} = n \cdot R \cdot T_q \cdot \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) > 0 \text{ (expansão).}$$

- Processo (**bc**): O processo (*bc*) é uma expansão ($W_{bc}>0$) adiabática, portanto $Q_{bc}=0$ (não há troca de calor).

**Variação da Energia Interna e a 1ª Lei da Termodinâmica**

$$\Delta E_{\text{int}(bc)} = Q_{bc} - W_{bc} \qquad \text{1ª Lei da Termodinâmica}$$

$$\Delta E_{\text{int}(bc)} = n \cdot c_v \cdot (\underbrace{T_f}_{T_c} - \underbrace{T_q}_{T_b}), \quad \text{pois: } T_c = T_f \text{(temperatura da fonte fria) e } T_b = T_q \text{(temperatura da fonte quente)}$$

**Calor Trocado**

$$Q_{bc} = 0.$$

**Trabalho Realizado**

$$W_{bc} = -\Delta E_{\text{int}(bc)} = -n \cdot c_v \cdot (T_f - T_q),$$

$$T_q \cdot \mathrm{V}_b^{\gamma-1} = T_f \cdot \mathrm{V}_c^{\gamma-1} \text{(ao longo do processo adiabático)} \Rightarrow \frac{T_q}{T_f} = \left(\frac{\mathrm{V}_c}{\mathrm{V}_b}\right)^{\gamma-1}.$$

- Processo (**cd**): O processo (*cd*) é uma compressão (W$_T$<0) isotérmica que ocorre na temperatura $T_f$, portanto $\Delta T_{cd}=0$ e $\Delta E_{int}=0$. Usando a primeira lei da termodinâmica $\Delta E_{\text{int}} = Q - W = 0$, concluímos que $Q_{cd}^{rej} = W_{cd} = n \cdot R \cdot T_f \cdot \ln\left(\dfrac{V_d}{V_c}\right) < 0$ (calor rejeitado).

**Variação da Energia Interna e a 1ª Lei da Termodinâmica**

$$\Delta E_{\text{int}(cd)} = Q_{cd} - W_{cd} \qquad \text{1ª Lei da Termodinâmica}$$

$$\Delta E_{\text{int}(cd)} = n \cdot c_v \cdot (\underbrace{T_f}_{T_d} - \underbrace{T_f}_{T_c}) = 0, \quad \text{pois: } T_d = T_f \text{ e } T_c = T_f \text{(temperatura da fonte fria).}$$

**Calor Trocado**

$$Q_{cd}^{rej} = W_{cd} = n \cdot R \cdot T_f \cdot \ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right) < 0 \text{ (calor rejeitado)},$$

$$\left|Q_{cd}^{rej}\right| = n \cdot R \cdot T_f \cdot \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right) > 0 \text{ (módulo do calor rejeitado)}.$$

**Trabalho Realizado**

$$W_{cd} = n \cdot R \cdot T_f \cdot \ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right) < 0 \text{ (compressão)}.$$

- Processo (**da**): O processo (*da*) é uma compressão ($W_{da}<0$) adiabática, $Q_{da}=0$ (não há troca de calor).

**Variação da Energia Interna e a 1ª Lei da Termodinâmica**

$$\Delta E_{\text{int}(da)} = Q_{da} - W_{da} \qquad \text{1ª Lei da Termodinâmica}$$

$$\Delta E_{\text{int}(da)} = n \cdot c_v \cdot (\underbrace{T_q}_{T_a} - \underbrace{T_f}_{T_d}), \quad \text{pois: } T_a = T_q \text{ (temperatura da fonte quente) e } T_d = T_f \text{ (temperatura da fonte fria)}.$$

**Calor Trocado**

$$Q_{da} = 0.$$

**Trabalho Realizado**

$$W_{da} = -\Delta E_{\text{int}(da)} = -n \cdot c_v \cdot (T_q - T_f),$$

$$T_f \cdot \mathrm{V}_d^{\gamma-1} = T_q \cdot \mathrm{V}_a^{\gamma-1} \text{(ao longo do processo adiabático)} \Rightarrow \frac{T_q}{T_f} = \left(\frac{\mathrm{V}_d}{\mathrm{V}_a}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\mathrm{V}_d}{\mathrm{V}_a}\right)^{\gamma-1}}_{\text{do processo }(da)} = \underbrace{\left(\frac{\mathrm{V}_c}{\mathrm{V}_b}\right)^{\gamma-1}}_{\text{do processo }(bc)} \Rightarrow \frac{V_c}{V_d} = \frac{V_b}{V_d}.$$

A partir das equações para troca de calor e o trabalho realizado em cada processo, usando a equação (3.22), você pode mostrar que a eficiência do cilco de Carnot é

$$\boxed{\varepsilon_{carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_q}} \qquad \boxed{\varepsilon_{carnot} = 1 - \left(\frac{\text{menor temperatura em Kelvin K}}{\text{maior temperatura em Kelvin K}}\right)} \tag{3.24}$$

onde $\varepsilon_{carnot}$ é a eficiência do ciclo de Carnot, $T_f$ é a temperatura da fonte fria (em Kelvin *K*) e $T_q$ é a temperatura de operação da fonte quente (em Kelvin *K*). A equação (3.24) é valida apenas para o ciclo de Carnot. Novamente, uma forma de aumentar a eficiência de uma máquina térmica é aumentar a temperatura de operação da fonte quente de calor. No entanto, ficamos limitados à resistência dos materiais de que é feita a máquina térmica, pois se a temperatura de operação do motor for muito alta, esse motor pode fundir (derreter). Veja na Tabela 9 alguns materiais e suas respectivas temperaturas de fusão (ponto de derretimento).

| Material | Temperatura de Fusão (ºC/K) |
|---|---|
| Ferro | 1535/1808 |
| Aço Inoxidável | 1510/1783 |
| Aço Carbono | 1410/1683 |
| Ferro Fundido | 1200/1473 |
| Bronze | 927/1200 |
| Alumínio | 659/932 |
| Chumbo | 327/600 |

**Tabela 9** – temperatura de fusão de alguns materiais. A lembrar que $T_K = T_C + 273$.

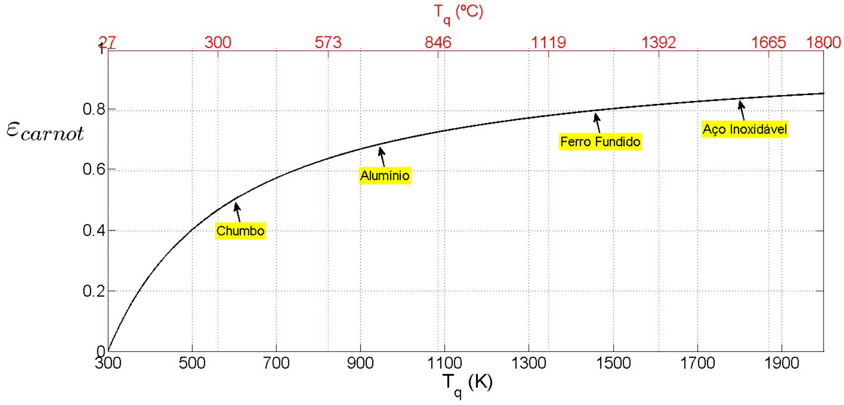



**Figura 95** - Eficiência do motor de Carnot versus temperatura de operação da fonte quente ($T_q$), para temperatura da fonte fria de $T_f$=*300K* (*=27ºC*). A eficiência ε é alta para maior temperatura de operação do reservatório quente ($T_q$).

A eficiência dos motores atuais é limitada pelo ponto de fusão dos materiais que os motores são fabricados. Normalmente os motores são produzidos em ferro fundido ou alumínio, mas o cilindro do motor onde ocorre a absorção de calor (pela explosão da mistura *ar+gasolina*) é revestido de aço inoxidável por ter maior ponto de fusão e suportar maiores temperaturas. No futuro, os cilindros dos motores serão revestidos com cerâmica de alto desempenho, por possuir maior ponto de fusão (3415ºC) que o aço inoxidável (1510ºC). No presente momento, esse material ainda é bem caro o que o torna inviável o seu uso nos carros de passeio. Nos aviões modernos, as suas turbinas já são revestidas com cerâmicas, o que tornas esses aviões mais econômicos no consumo de combustível.

*Exemplo*

**E.1)** Uma máquina de Carnot absorve 3290 *cal* e rejeita 2632 *cal*. Calcule temperatura de operação da fonte quente, dado que a temperatura da fonte fria é 27ºC.
*Solução:*

A relação que envolve temperatura para a máquina de Carnot é a equação (3.24) $\varepsilon_{carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_q}$. Isolando $T_q$:

$T_q = \frac{T_f}{1-\varepsilon_{carnot}}$. Veja que não conhecemos ε, mas podemos calculá-lo usando a equação geral (3.22): $\varepsilon = \frac{Q_q^{abs} - |Q_f^{rej}|}{Q_q^{abs}} = \frac{W}{Q_q^{abs}} = \frac{3290cal - 2632cal}{3290cal} = \frac{658\cancel{cal}}{3290\cancel{cal}} = 0,2$. Portanto, a temperatura da fonte quente é $T_q = \frac{(273+27)K}{1-0.2} = \underline{375K|}$ ou $\underline{102^o C|}$. *Usar sempre a temperatura T na escala absoluta (kelvin). Converter para a escala celsius apenas no final do processo, caso você deseje saber essa temperatura nessa escala.*

## Ciclo de Otto (motor a gasolina)

O ciclo da gasolina é composto por quatro processos: dois processos adiabáticos ***ad*** e ***cd***; dois processos isocórico ***bc*** e ***da***. A área do ciclo, região rachurada, é numericamente igual ao trabalho realizado pelo ciclo termodinâmico. Quanto maior for a área (W), melhor é a eficiência do ciclo.

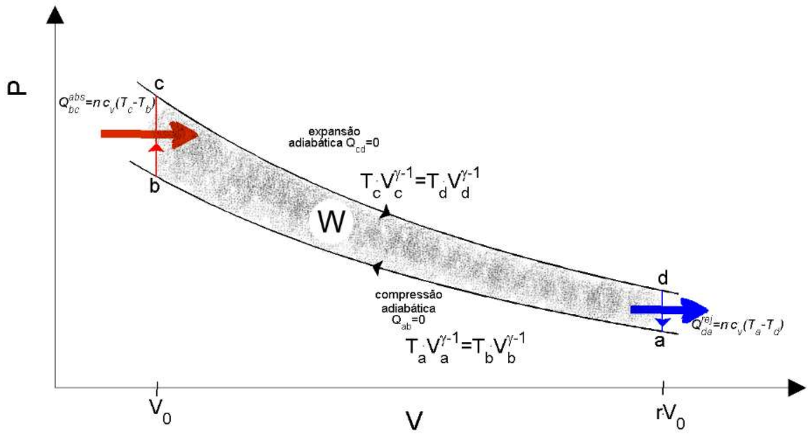



**Figura 96** – Ciclo termodinâmico do motor a gasolina. Nesta figura, *r* é a taxa de compressão da mistura *ar+gasolina*. Uma maneira de aumentar o trabalho W (ou a a potência do motor) é aumentar a taxa de compressão *r*. A gasolina é injetada no estado **a.**

A gasolina é injetada no estado **a** e durante a compressão adiabática (**ab**) a mistura *ar+gasolina* é aquecida. No estado **b** a vela de ignição solta uma centelha para a mistura (*ar+gasolina*) explodir. O calor absorvido $Q_{bc}^{abs}$ no processo ***bc*** é devido a essa explosão a volume constante. Na expansão **cd** o trabalho útil e realizado pelo motor. No processo ***da*** o calor é rejeitado $Q_{da}^{rej}$ pelo sistema de escapamento do motor, e o ciclo se repete. Motores a gasolina normalmente utilizam taxa de compressão *r* de 10:1 e os motores a etanol, usam taxa de 12:1. Estas baixas taxas de compressão não são suficientes para a mistura explodir de forma espontânea. Já os motores a Diesel utilizam taxa de compressão mais elevada, em torno de 20:1. Esta alta taxa já é suficiente para o combustível explodir de forma espontânea, sem a necessidade de usar vela de ignição.

Vela de ignição.

Octanagem é a resistência que um combustível oferece à detonação. Quanto maior for octanagem, maior pode ser a taxa de compressão *r* para esse combustível. Aumentando-se a compressão *r*, aumenta-se a eficiência e a potência do motor. Durante a compressão, a mistura *ar+combustível* esquenta e se este tiver baixa octanagem, pode haver o efeito indesejável da pré-ignição, que é explosão espontânea do combustível antes da hora. O etanol possui maior octanagem que a gasolina. Por isso o carro quando abastecido com etanol fica mais potente. No entanto, o consumo de combustível é maior quando usado o etanol se comparado com a gasolina. Isso acontece porque o etanol posssui um menor calor latente de combustão $L_c$ se comparado com a gasolina. É necessário *queimar* mais massa de etanol do que gasolina para o mesmo calor liberado na explosão ($Q^{abs}=+m\cdot L_c$). Para a gasolina com 20% de etanol, tem-se $L_{c,gasolina}=40{,}5\cdot 10^3 J/g$ e para o etanol, tem-se $L_{c,etanol}=27{,}2\cdot 10^3 J/g$ . Dividindo o calor de combustão do etanol pela gasolina chega-se a razão de 0,67. Por isso, só vale a penas abastecer o carro com etanol quando o seu litro estiver abaixo de 67% (~70%) do preço do litro da gasolina.

**E.2)** Calcular a eficiência termodinâmica do ciclo do motor a gasolina, mostrado na Figura 96.

*A eficiência do ciclo é obida pela equação (3.22)* $\varepsilon = 1-\dfrac{\left|Q_f^{rej}\right|}{Q_q^{abs}} \Rightarrow \quad \varepsilon = 1-\dfrac{\left|Q_f^{rej}\right|}{Q_q^{abs}} = 1-\dfrac{\cancel{n\cdot c_V}\cdot(T_d-T_a)}{\cancel{n\cdot c_V}\cdot(T_c-T_b)}$. *Veja que*

*O calor rejeitado no processo* ***(da)*** *é* $Q_{da}^{rej}=n\cdot c_V\cdot(T_a-T_d)<0$ e o módulo é $\left|Q_{da}^{rej}\right|=n\cdot c_V\cdot(T_d-T_a)>0$. *Agora vamos eliminar as temprereturas $T_a$, $T_b$, $T_c$ e $T_d$, usando a equação auxiliar para o processo adiabático:* $TV^{\gamma-1}=cte$.

Processo adiabático (**ab**): $T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1} \overset{\text{isolar } T_b}{\Rightarrow} T_b = T_a \cdot \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_b = T_a \cdot \left(\frac{r \cdot \cancel{V_o}}{\cancel{V_o}}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_b = T_a \cdot r^{\gamma-1}.$

Processo adiabático (**cd**): $T_c V_c^{\gamma-1} = T_d V_d^{\gamma-1} \overset{\text{isolar } T_c}{\Rightarrow} T_c = T_d \cdot \left(\frac{V_d}{V_c}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_c = T_d \cdot \left(\frac{r \cdot \cancel{V_o}}{\cancel{V_o}}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_c = T_d \cdot r^{\gamma-1}.$

*Portanto* $T_c - T_b = (T_d - T_a) \cdot r^{\gamma-1}$ *e vamos substituir na equação da eficiência:*

$\varepsilon = 1 - \frac{\cancel{(T_d - T_a)}}{\cancel{(T_d - T_a)} \cdot r^{\gamma-1}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}}$, cujo gráfico está mostrado na figura ao lado. Se você aumentar a taxa de compressão *r*, a eficiência aumenta e a potência também. Fixando a taxa de compressão *r*, se você usar um gás monoatômico terá uma maior eficiência se comparada com um gás poliatômico. Os motores usam os gases oxigênio $O_2$ e o nitrogênio $N_2$. O gás oxigênio é o mais importante, pois só existe combustão se existir o gás oxigênio.

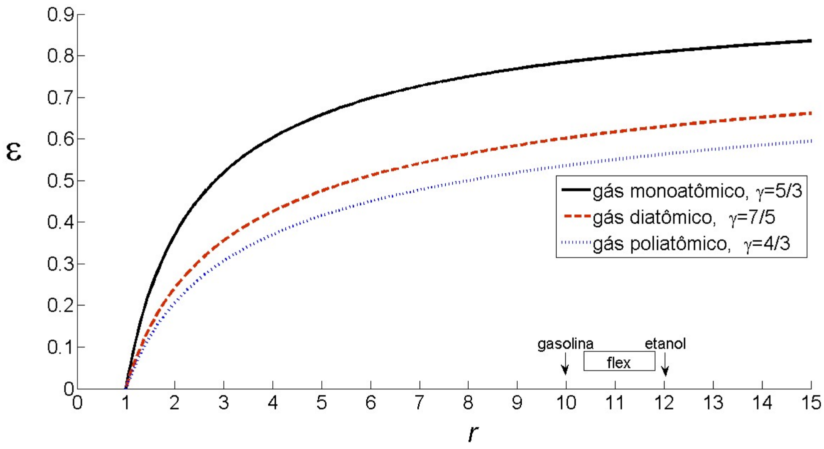



**Figura 97** –Eficiência termodinâmica ε em função da taxa de compressão *r*. Para a gasolina, a taxa de compressão ótima é 10:1. Já o etanol, o valor ótimo é 12:1. Os motores flex usam uma taxa de compressão intermediária entre 10 e 12. Uma forma de aumentar a potência de um motor é aumentar a taxa de compressão *r*, pois o trabalho do ciclo *W* aumenta.

## Ciclo do Diesel (Motor a Diesel)

O ciclo do diesel é composto por quatro processos: dois processos adiabáticos ***ad*** e ***cd*** (sem troca de calor); um processo isobárico ***bc*** *(a pressão constante)* e um processo isocórico ***da*** (*a volume constante*). A área do ciclo é numericamente igual ao trabalho realizado pelo ciclo termodinâmico. Durante a compressão adiabática (***ab***), o ar esquenta tanto que quando o diesel é injetado no estado **b** a mistura *ar+diesel* explode de forma espontânea, devido a alta temperatura dos gases O2 e N2, sem a necessidade de usar a vela de ignição, como ocorre no motor a gasolina. Durante a expansão isobárica (***bc***) o calor absorvido $Q_{bc}^{abs}$ é devido a explosão da mistura *ar+diesel*. No processo (***da***), o calor é rejeitado $Q_{da}^{rej}$ pelo sistema de escapamento do motor. Todo o ciclo termodinâmico ocorre dentro do cilindro do motor.

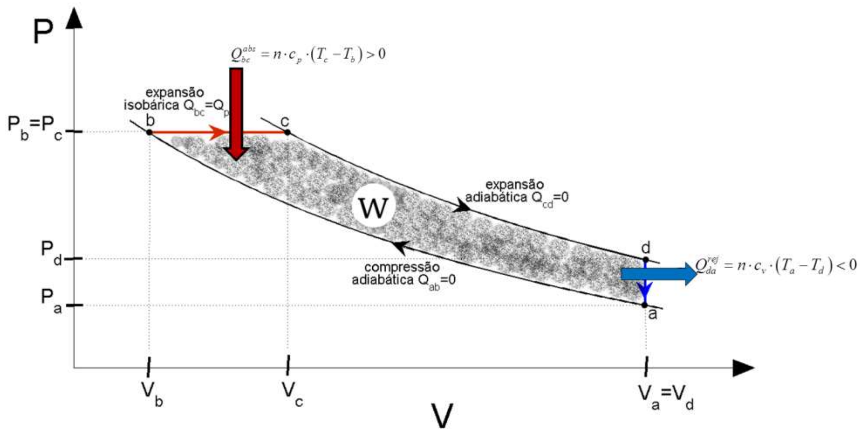



**Figura 98** – Ciclo termodinâmico do motor a diesel. O calor absorvido $Q_{bc}^{abs} = m \cdot L_e$ é proveniente da explosão da mistura *ar+diesel* dentro do cilindro do motor. O diesel é injetado no estado **b** e explode de forma espontânea devido ao super aquecimento do ar durante a compressão adiabática **ab**. Não existe vela de ignição.

Dados do Trator Massey Ferguson MF 5285 4x4

*Performance*

Potência do motor, na rotação nominal: **62,5 KW ou 85 cv**

Torque máximo no motor a 1200 rev/min : **288 N·m**

*Motor **Diesel***

Marca: Perkins

Modelo: P4001

Número de Cilindros: **4**

Cilindradas: **4100cm³ (ou 4,1L a soma dos 4 cilindros)**

http://docplayer.com.br/3431817-Tratores-motor-modelo-a4-3-9-numero-de-cilindros-4-cilindrada-cm3-3867-ambiente-de-operador-plataforma-ergonomica.html

# Refrigeradores

*Definição*: O refrigerador absorve calor ($Q_f^{abs}$) de um reservatório térmico a temperatura mais baixa ($T_f$) e o rejeita para outro reservatório térmico ($Q_q^{rej}$) a uma temperatura mais elevada ($T_q$) à custa de um trabalho externo $W$, realizado pelo compressor para comprimir o gás de refrigeração. Refrigerador opera em ciclo reverso de uma máquina térmica. Um exemplo de refrigerador é o ar condicionado, a geladeira e assim por diante. Para o refrigerador, o reservatório térmico quente é chamado de *Condensador* e o reservatório térmico frio é chamado de *Evaporador*.

É possível identificar um refrigerador sempre que o calor absorvido for na fonte de menor temperatura e o calor rejeitado for na fonte de maior temperatura.

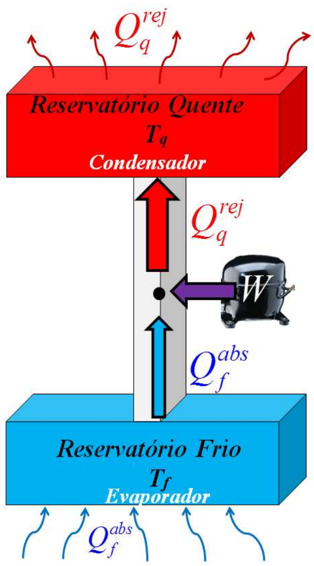



Figura 99 – Desenho esquemático de um refrigerador. O calor é absorvido no reservatório frio e rejeitado no reservatório quente às custas de um trabalho externo **W**, realizado pelo compressor.

## Trabalho realizado por um Refrigerador

Usando o principio da conservação da energia, a energia que entre no ponto ▪ (ver Figura 99) deve ser igual a energia que sai desse ponto: $\underbrace{Q_f^{abs} + W}_{entrando} = \underbrace{Q_q^{rej}}_{saindo}$ . Isolado $W$, temos o trabalho do ciclo do refrigerador

$$\boxed{|W| = \left|Q_q^{rej}\right| - Q_f^{abs}} \tag{3.25}$$

o símbolo $|...|$ representa o módulo da variável, você deve usar apenas o valor absoluto (positivo).

## Coeficiente de desempenho (K) do refrigerador (Coeficiente de eficiência energética)

O melhor ciclo é aquele que absorve a maior quantidade de calor $Q_f^{abs}$ para o mesmo trabalho $W$ realizado. Quantificamos o ciclo pelo coeficiente de desempenho $K$, cuja definição é:

$$\boxed{K = \frac{Q_f^{abs}}{|W|}}$$

ou (3.26)

$$\boxed{K = \frac{Q_f^{abs}}{\left|Q_q^{rej}\right| - Q_f^{abs}}}$$

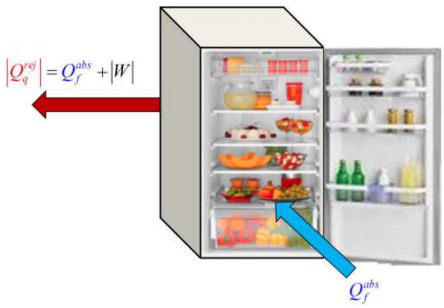
onde $K>1$. O melhor refrigerador é aquele que tem maior valor de $K$. Para $K\to\infty$ viola a 2ª lei da termodinâmica, pois o calor estaria fluido da fonte fria para a fonte quente de forma espontânea, com $W=0$.

Para ar condicionado, modelo Split hi-wall, a ENCE – Etiqueta Nacional de Conservação de Energia, atribui a seguinte etiquetagem, de acordo com o coeficiente de desempenho K, do Split

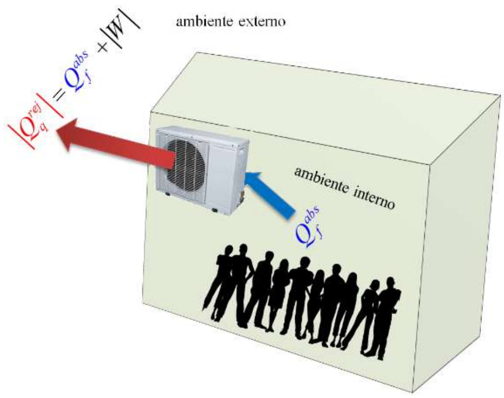
| Classes | Coeficiente de desempenho ***K*** |
|---|---|
| **A** | $3{,}20 < K$ |
| **B** | $3{,}00 < K \le 3{,}20$ |
| **C** | $2{,}80 < K \le 3{,}00$ |
| **D** | $2{,}60 < K \le 2{,}80$ |
| **E** | $2{,}39 \le K \le 2{,}60$ |

**Tabela 10** – O coeficiente de desempenho $K$ dos condicionadores de ar, modelo Split, fica em torno de $K\approx 3.0$.

Agora, entenda porque deixar a geladeira aberta em dias muito quente ajuda a aumentar ainda mais a temperatura no interior do ambiente. O calor que é retirado $Q_f^{abs}$ pela geladeira é colocado de volta $\left|Q_q^{rej}\right|$ juntamente com o trabalho $|W|$ que foi usado para retirar o calor. No saldo, a geladeira está adicionando $|W|$ de calor no interior do ambiente que vai esquentá-lo. Agora você percebe porque os ar-condicionados precisam de uma unidade externa ao ambiente que esta sendo refrigerado?




Os ar-condicionados e os Splits, sempre ficam com uma de suas partes no ambiente externo, para rejeitar o calor $\left|Q_q^{rej}\right|$ fora do ambiente interno. Veja que $Q_f^{abs}$ é o calor absorvido (retirado) do ambiente interno, $|W|$ é a energia gasta para a retirada desse calor.




Sobre ar condicionados. **A** unidade BTU, que é a abreviação de "**B**ritish **T**hermal **U**nit", que significa "unidade térmica britânica", é uma unidade de energia (ou calor) que é equivalente a 252.2 calorias (1BTU=252,2 cal). O BTU significa a capacidade que o ar condicionado possui de **absorver Calor do ambiente interno**.

Exemplo

**E.1)** Para um ar condicionado de *9000BTU/h*, significa que esse ar condicionado pode remover 9000 BTU em uma hora.

a) Converta *9000BTU/h* para Joules por segundo (*J/s=W*).

*Solução*: $Q_f^{abs} = 9000 \frac{\cancel{BTU}}{\cancel{h}} \left( \frac{1\cancel{h}}{3600s} \right) \left( \frac{252{,}2\,\cancel{cal}}{1\,\cancel{BTU}} \right) \left( \frac{4{,}19J}{1\,\cancel{cal}} \right) = 2641{,}8J/s$. Portanto, o ar condicionado de 9000BTU/h pode remover 2641,8 J de calor por segundo.

b) Calcule a potência do ar condicionado (consumo energético, para *K=3,0*)

*Solução*: O trabalho que você precisa fornecer, pela rede elétrica, para esse ar condicionado funcionar, pode ser calculado usando a equação (3.26), $K = \frac{Q_f^{abs}}{|W|} \Leftrightarrow |W| = \frac{Q_f^{abs}}{K}$. Para um coeficiente de desempenho *K=3,0* a energia consumida, *por segundo*, por esse ar condicionado é $|W| = \frac{Q_f^{abs}}{K}$, substituindo os valores numéricos temos: $|W| = \frac{2641{,}8J/s}{3{,}0} = \boxed{880{,}6\,J/s = 880{,}6\,W}$.

c) Uma pessoa, em média, dissipa *100W* de calor (*=100J* por *segundo ou 100J/s*). Calcule o número de pessoas que pode permanecer no interior do ambiente, de modo que a temperatura interna desse ambiente não varie.

*Solução*: Para que a temperatura não varie, o calor total que é dissipado pelas pessoas deve ser absorvido pelo ar condicionado. Como o ar condicionado pode remover *2641,8J/s* e cada pessoa dissipa *100J/s*, então o número de pessoas é: $n = \frac{2641{,}8J/s}{100J/s} \cong \boxed{26\,pessoa}$.

d) Agora calcule a energia consumida por um ar condicionado de *12000BTU/h*, considerando um coeficiente de desempenho *K=2,8 (categoria C)* e também calcule o número de pessoas (cada uma dissipando *100W*) que pode permanecer dentro do ambiente interno sem aquecê-lo.

**Caso Particular: Refrigerador de Carnot**

O refrigerador de Carnot opera em um ciclo inverso ao da máquina térmica de Carnot.

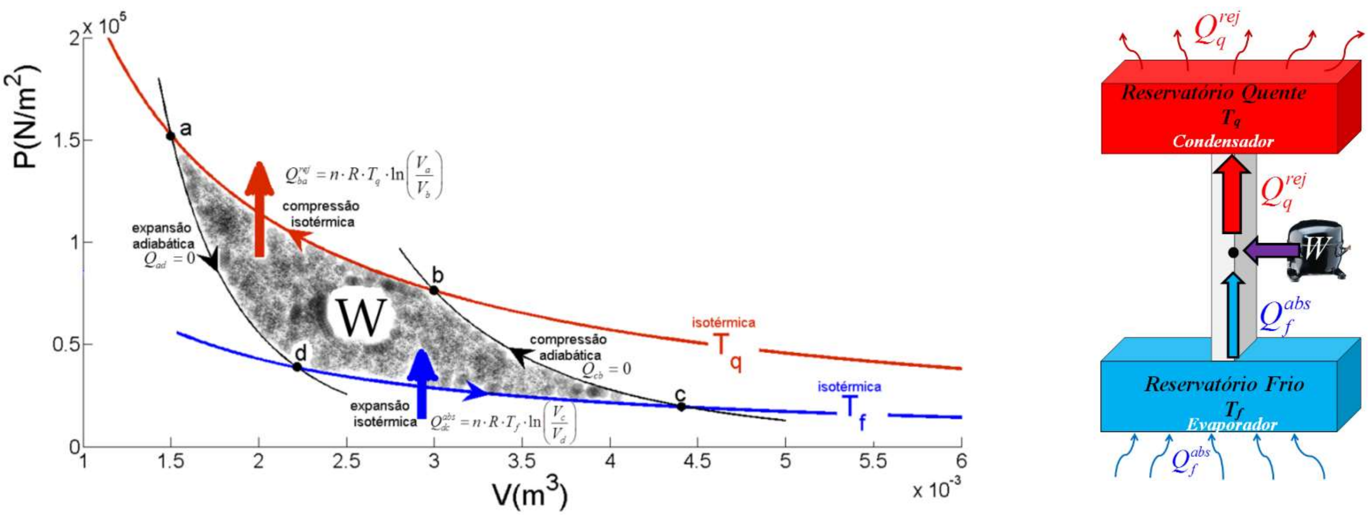



Figura 100 – Ciclo termodinâmico do refrigerador de Carnot.

Para o refrigerador de Carnot, podemos encontrar uma equação para o coeficiente de desempenho $K$ do ciclo, que só depende da temperatura de operação do reservatório quente $T_q$ e do reservatório frio $T_f$. Fazendo a mesma análise que foi feita para a Máquina de Carnot (calculando o calor trocado e o trabalho realizado em cada processo), só que agora o ciclo é invertido (anti-horário para o refrigerador) e usando a definição (3.26) para o coeficiente de desempenho $K$, pode-se mostrar que

$$\boxed{K_{Carnot} = \frac{T_f}{T_q - T_f}} \tag{3.27}$$

onde $K_{Carnot}$ é o coeficiente de desempenho, válido apenas para o refrigerador de Carnot. Você também pode usar as equações gerais (3.26), que são válidas para qualquer ciclo, inclusive o de Carnot. Se o cilco do refrigerador é invertido, este se torna de uma maquina térmica, cuja eficiência é $\varepsilon_{Carnot}=1-T_f/T_q$.

## Exercícios

**1)** Um dispositivo de Carnot extrai (absorve) 10kJ de calor de um corpo a -10ºC. Calcule o trabalho realizado (pelo ou sobre o dispositivo) quando o dispositivo rejeita calor para o ambiente a uma temperatura de:

a) **25ºC** (faça um desenho esquemático do dispositivo).
b) **0ºC** (faça um desenho esquemático do dispositivo).
c) **-20ºC** (faça um desenho esquemático do dispositivo).
d) O dispositivo, nos itens **a**, **b** e **c**, funciona como um motor ou refrigerador?

**2)** A eficiência de uma maquina térmica é de 0,125. Sabendo que o calor rejeitado foi de 1500J, calcule o calor absorvido do reservatório quente e o trabalho realizado pela máquina térmica.

**3)** Uma máquina de Carnot, cujo reservatório quente está a uma temperatura de 500K, absorve 600J de calor em cada ciclo e fornece 350J para o reservatório frio. Calcule:

a) A eficiência da máquina térmica.
b) A temperatura de operação da fonte fria.
c) A potência da máquina térmica, sabendo que esta executa *20* ciclos por segundo.

**4)** Uma máquina de Carnot (motor) tem uma eficiência de 25% e realiza *30000J* de trabalho em cada ciclo.

a) Quanto calor a máquina absorve e rejeita em cada ciclo?
b) Suponha que a máquina rejeita calor para uma fonte fria a uma temperatura de 20ºC. Qual é a temperatura da fonte quente de calor?

**5)** Um ar condicionado, com coeficiente de desempenho $K=17$, rejeita 12000J de calor para o ambiente externo.

a) Calcule o calor absorvido do ambiente interno.
b) Se o ar condicionado opera em um ciclo de Carnot, e a temperatura do ambiente interno é *15ºC*, qual é a temperatura externa?

**6)** Uma máquina que produz gelo opera em um ciclo de Carnot. Ela recebe (absorve) calor da água a 0ºC e rejeita calor a uma sala a 30ºC. Suponha que 100kg de água a 0ºC sejam convertidos em gelo a 0ºC ($Q=mL$; $L_f$=334000J/Kg).

a) Qual é o calor rejeitado para a sala?
b) Qual é a energia (trabalho) que deve ser fornecida para a máquina. Esta máquina é um motor ou refrigerador?

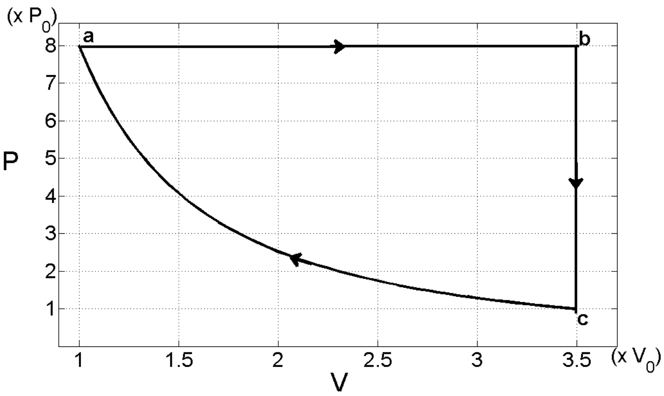
**7)** Dez moles de um gás poliatômico confinado em um cilindro de tampa móvel, a um volume inicial de $0.05m^3$, sofre uma expansão à pressão constante de $3,0 \cdot 10^5 N/m^2$ até que seu volume inicial tenha triplicado.

a) Desenhe o diagrama PV desse processo.

b) Calcule o trabalho ***W*** realizado, a variação da energia interna $\Delta E_{int}$ e o calor trocado ***Q***.

**8)** Calcule a eficiência do ciclo termodinâmico mostrado no diagrama *PV* da figura ao lado, realizado por um mol de um gás monoatômico, dado que o processo ***ca*** é adiabático ($PV^{\gamma} = const.$).

$$P_c V_c^{\gamma} = P_a V_a^{\gamma}; \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V}.$$

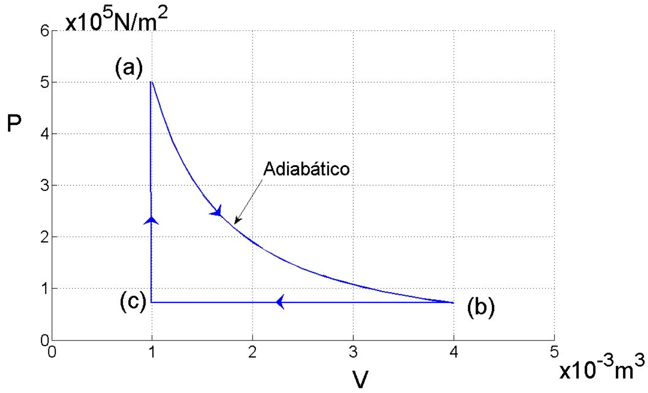



**9)** Na figura ao lado, tem-se um ciclo termodinâmico (**abca**). Sabendo que o processo **ab** é adiabático e a substância de trabalho é 0.1 mol de um gás diatômico, calcule:

a) Os calores trocados: $Q_{ab}$, $Q_{bc}$, $Q_{ca}$, indique se o calor foi absorvido ou rejeitado.

b) O trabalho realizado pela máquina térmica e a sua potência, sabendo que esse motor executa 25 ciclos por segundo.

c) A eficiência do ciclo termodinâmico.



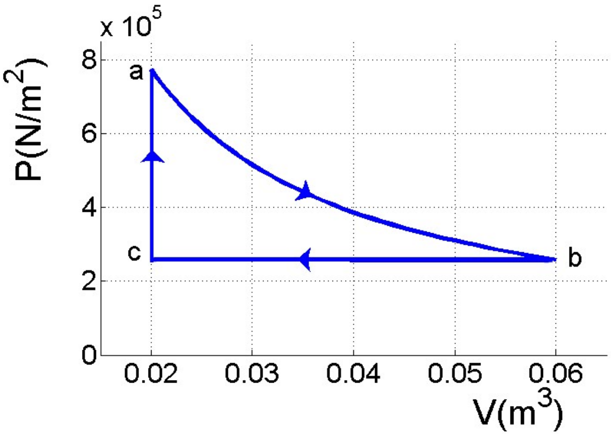

**10)** Uma máquina térmica funciona seguindo o ciclo mostrado na figura ao lado. O processo **ab** é <u>isotérmico</u> e a substância de trabalho é 3 mol de gás Hélio (*He*) que atinge uma temperatura máxima de 620K.

a) Calcule o trabalho ***W*** realizado, a variação da energia interna $\Delta E_{int}$ e o calor trocado ***Q*** em cada processo.

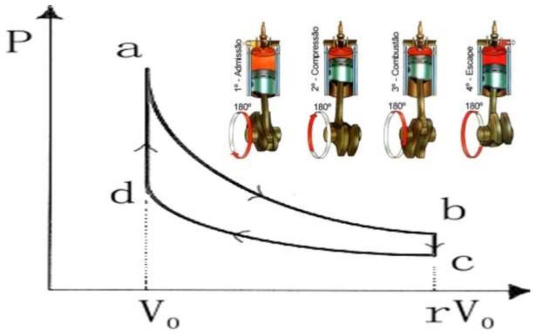
b) O trabalho realizado pela máquina por ciclo e a sua potência, dado que essa máquina realiza 10 ciclos por segundo.

c) A eficiência do ciclo termodinâmico.

d) Se essa máquina térmica fosse a de Carnot, qual seria a sua eficiência? Compare com o item c.



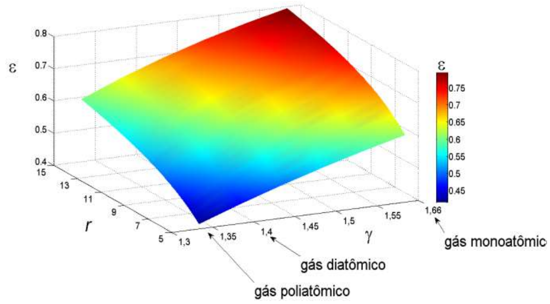
**11)** Ciclo de Otto (Motor a Gasolina). O ciclo idealizado do motor a gasolina é composto por quatro processos: dois adiabáticos **ab** e **cd** e dois isocóricos **bc** e **da**. Mostre que a eficiência do ciclo é dada por $\boxed{\varepsilon = 1 - \dfrac{1}{r^{\gamma-1}}}$, onde $r$ é a taxa de compressão(ver gráfico de ε versus γ e $r$, na figura ao lado).




a) Calcule a eficiência para *r=10* e *r=15* (considere o gás poliatômico).

b) Calcule a eficiência para *r=10* e *r=15* (considere o gás monoatômico).

c) Compare os resultados dos itens (a) e (b) e indique duas formas de aumentar a eficiência do ciclo.




$$PV^{\gamma} = const. \Rightarrow TV^{\gamma-1} = const.(Adiabático) \quad (P = \frac{nRT}{V} = nRTV^{-1})$$

$$T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1};\ T_c V_c^{\gamma-1} = T_d V_d^{\gamma-1}; \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V}; Q_v = nc_V \Delta T$$

**12)** Uma máquina de Carnot cujo reservatório térmico frio está a -40ºC possui uma eficiência de *30%*. Um engenheiro recebeu a tarefa de aumentar a eficiência da máquina para *40%*.
a) De quantos graus Celsius deve aumentar a temperatura de operação do reservatório quente, mantendo constante a temperatura do reservatório frio?

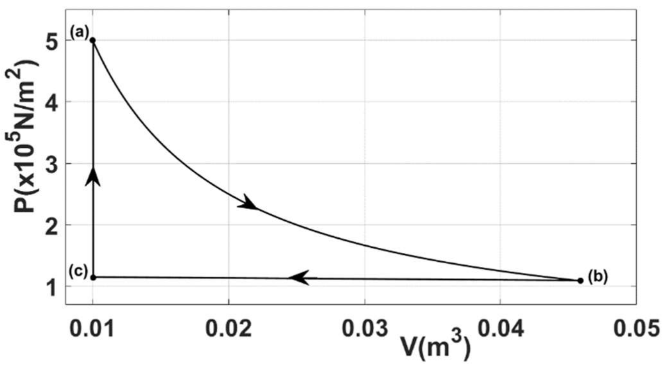
b) De quantos graus Celsius a temperatura do reservatório frio deve diminuir, mantendo constante a temperatura do reservatório quente?

**13)** Você está projetando uma máquina de Carnot que funciona com $CO_2$ como substância de trabalho. O gás precisa ter uma temperatura máxima de 520ºC. Com um fornecimento de 500J por ciclo, são obtidos 350J de trabalho também em cada ciclo. Calcule:

a) A temperatura do reservatório frio.

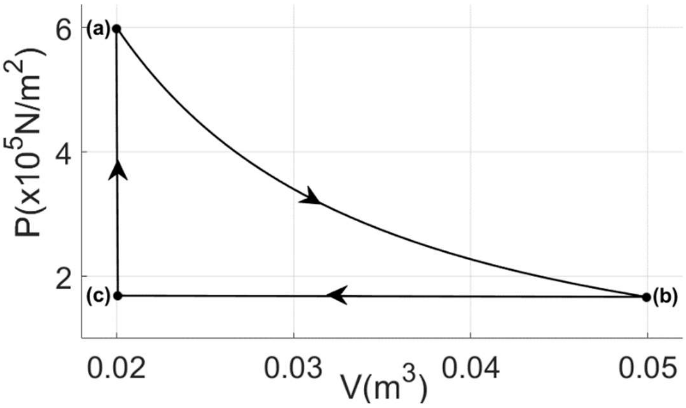
b) Quantos ciclos a máquina precisa efetuar para derreter completamente um bloco de 5kg de gelo estando inicialmente a 0ºC. Considere que todo o calor rejeitado seja utilizado para derreter o gelo.

**14)** Na figura ao lado tem-se um ciclo termodinâmico formado por três processos. A substância de trabalho é 1 mol de gás $N_2$. Sabe-se que o processo **ab** é isotérmico e que neste processo foram absorvidos 7630 J em forma de calor. Calcule:
**a)** O trabalho realizado pelo ciclo termodinâmico.
**b)** A eficiência do ciclo termodinâmico.
**c)** A eficiência do ciclo termodinâmico equivalente ao ciclo de Carnot.




**15)** Um condicionador de ar funciona com 800W de potência e apresenta um coeficiente de desempenho de 2.8 a uma temperatura interna de 21ºC e a uma temperatura externa de 35ºC. Calcule:
**a)** A taxa de remoção de calor dessa unidade.
**b)** A taxa com que o calor é rejeitado para o ambiente externo.

**16)** Calcule a eficiência ε do ciclo termodinâmico mostrado na figura ao lado, realizado por um mol de um gás diatômico, dado que o processo ***ab*** é adiabático.

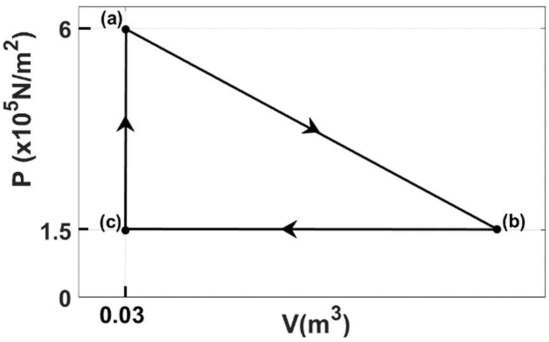



**17)** Na figura ao lado, tem-se um ciclo termodinâmico formado por três processos. A substância de trabalho é *n=2mol* de gás $N_2$. Dados: $\mathbf{T_b}$**=631,77 K.** Calcule:

**a)** - O Calor trocado em cada processo: $Q_{ab}$, $\mathbf{Q_{bc}}$ e $\mathbf{Q_{ca}}$.

**b)** - A eficiência **ε** do ciclo termodinâmico.

**c)** - Invertendo o ciclo, calcule o coeficiente de desempenho desse refrigerador.

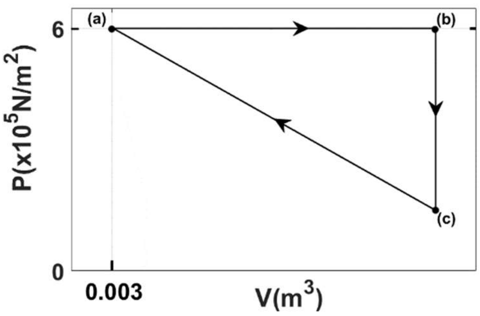



**18)** Na figura ao lado, tem-se um ciclo termodinâmico formado por três processos. A substância de trabalho é *n=0.2mol* de gás $N_2$. Dados: $\mathbf{T_b}$**=2527 K** e $\mathbf{T_c}$**=631,77 K.** Calcule:

**a)** - O Calor trocado em cada processo: $Q_{ab}$, $\mathbf{Q_{bc}}$ e $\mathbf{Q_{ca}}$.

**b)** - A eficiência **ε** do ciclo termodinâmico.

**c)** - Invertendo o ciclo, calcule o coeficiente de desempenho desse refrigerador.

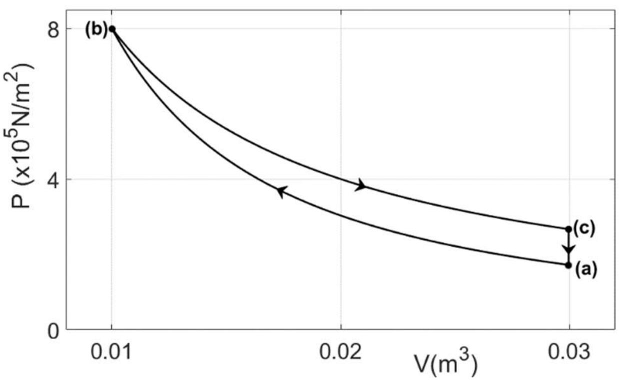



**19)** Na figura ao lado tem-se um ciclo termodinâmico realizado por dois mols de $H_2$. O processo **ab** é adiabático, o processo **bc** é isotérmico e **ca** e isocórico. Calcule:

**a)** - Calcule o trabalho realizado pelo ciclo.

**b)** - A eficiência do ciclo termodinâmico.

**c)** - Invertendo o ciclo, calcule o coeficiente de desempenho K desse refrigerador.



## *Respostas*

**1)** (a) $W=1331{,}6J$; (b) $W=380{,}2J$; (c) $W=380{,}2J$; (c) refri., refri., motor.

**2)** $Q_q=1714{,}3K$ $W=214{,}3J$

**3)** (a) $\varepsilon=0.42$; (b) $T_f=290K=17°C$, (c) $P_{ot}=5000W$

**4)** (a) $Q_q=120000J$, $|Q_f|=90000J$; (b) $T_q=117.7°C$

**5)** (a) $Q_f=11333{,}3J$; (b) $T_q=31{,}9°C$

**6)** (a) $|Q_q|=3{,}71\cdot10^7J$; (b) $|W|=3{,}7\cdot10^6J$, refrigerador

**7)** (b) *30000J; 90000J; 120000J*

**8)** $\varepsilon=0{,}27=(27\%)$

**9)** (a) $Q_{ab}=0J$, $Q_{bc}=-753{,}9J$, $Q_{ca}=1070{,}5J$; (b) $W_{ciclo}=316{,}6J$, $P_{ot}=7915{,}4W$, (c) $\varepsilon=0{,}30(30\%)$

**10)** (a) (**ab**) $W_{ab}=16980{,}8J$, $\Delta E_{int(ab)}=0J$, $Q_{ab}=16980{,}8J$, (**bc**) $W_{bc}=-10304{,}4$, $\Delta E_{int(bc)}=-15455{,}3J$, $Q_{bc}=-25759{,}8J$ (**ca**) $W_{ca}=0J$, $\Delta E_{int(ca)}=15455{,}3J$, $Q_{ca}=15455{,}3J$ (b) $W_{ciclo}=6676{,}4J$ $P_{ot}=66764W=90{,}8cv$ (c) $\varepsilon=0{,}21$ (d) $\varepsilon_{Carnot}=0{,}67$

**11)** (a) $\varepsilon(r=10)=0{,}53$ e $\varepsilon(r=15)=0{,}59$ (b) $\varepsilon(r=10)=0{,}78$ e $\varepsilon(r=15)=0{,}84$

**12)** (a) $T_q=388{,}3K$ aumento de 55,4K, (b) $T_f=199{,}7K$ diminuição de 33,3K

**13)** 11174 ciclos

**14) a)** 3702,3J **b)** 0,21=21% **c)** 0,78=78%

**15) a)** 2240 J/s **b)** 3040 J/s

**16)** 0,197=19,7%

**17)**

**18)**