Ondas (continuação)

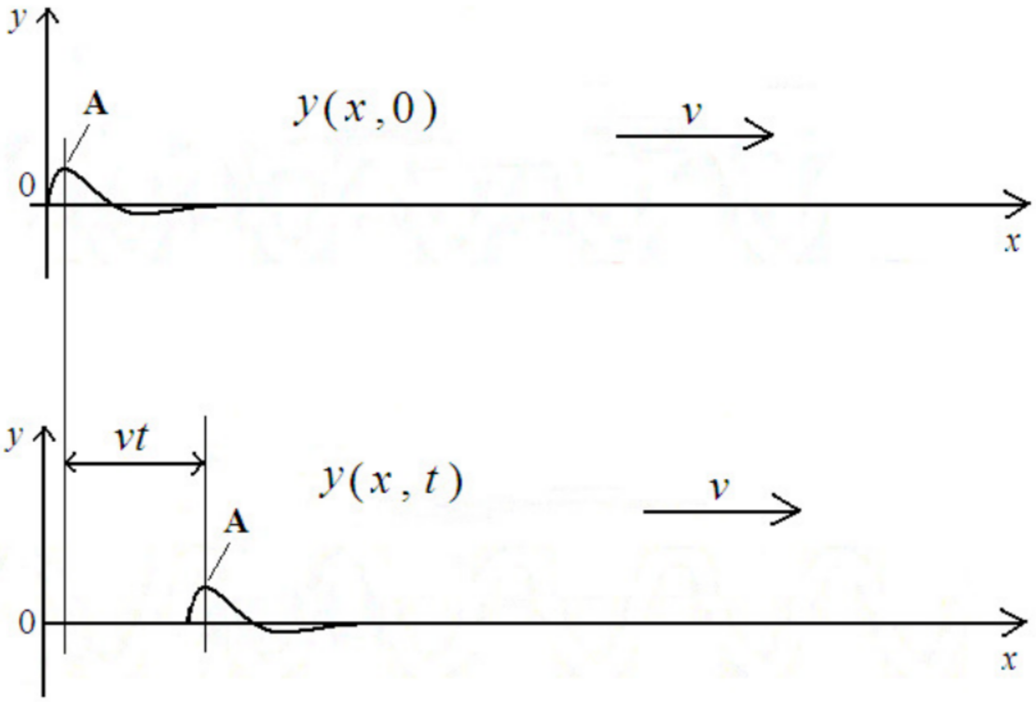
Ondas propagando-se em uma dimensão

Vamos agora estudar propagação de ondas. Vamos considerar o caso simples de ondas transversais propagando-se ao longo da direção x, como o caso de uma onda em uma corda por exemplo.

O primeiro passo é encontrar uma função matemática que descreva a *forma* da onda em um dado instante de tempo. Por forma da onda estaremos pensando na forma da linha que indica os deslocamentos da corda em cada ponto x no instante t.

Por enquanto, não vamos propor uma forma funcional específica para descrever a onda, mas vamos apenas usar a notação genérica $y(x, t)$.

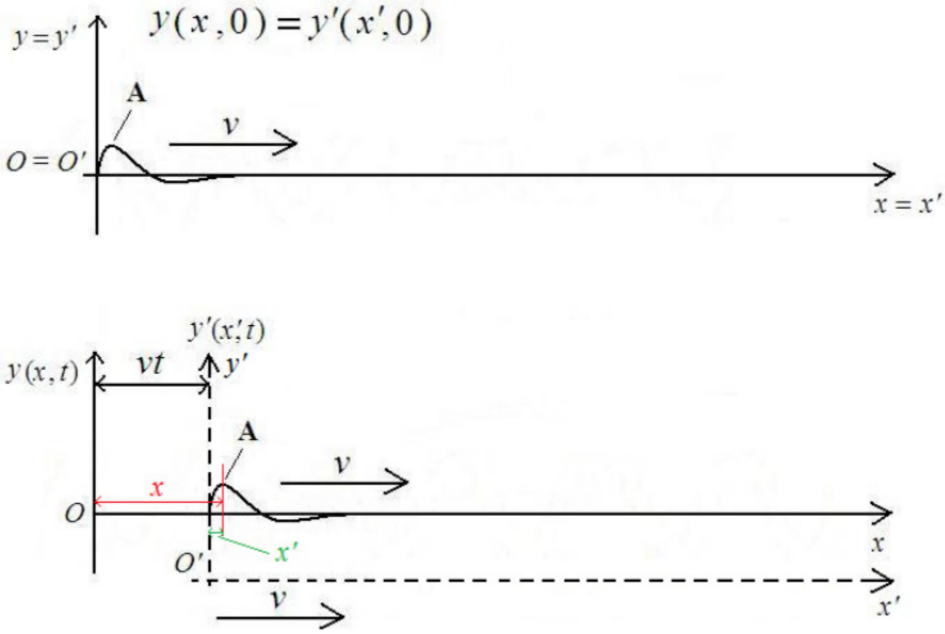
A figura abaixo mostra a forma da onda (um pulso) para dois instantes de tempo, 0 e t. Entre 0 e t o ponto **A** da onda caminhou uma distância $x = vt$ para a direita.



No tempo *t* a onda se deslocou uma distância *vt* para a direita

Vamos agora definir outro sistema de referência, que denominaremos de "sistema linha", que está *sentado* rigidamente sobre o ponto **A** da onda. Imagine um surfista de pé sobre uma prancha na crista de uma onda que se propaga durante certo intervalo de tempo sem alterar a sua forma.

O desenho abaixo é o mesmo desenho da figura acima, só que agora com os eixos do sistema linha sendo mostrados por linhas tracejadas. Em $t = 0$ os dois referenciais coincidem, mas no tempo t a origem do sistema linha, O', está deslocada por uma distância $x = vt$ em relação à origem do sistema sem linha, O.



O eixo horizontal do referencial linha foi desenhado um pouco abaixo do eixo horizontal do referencial sem linha para que os dois possam ser visíveis. Na realidade, o eixo tracejado está sobre o eixo contínuo.

Note que o referencial linha se movimenta para a direita com velocidade v

A relação entre os referenciais linha e sem linha é dada pela transformação de Galileu (observe a figura acima, onde a coordenada x do ponto **A** é indicada em vermelho e a coordenada x' do ponto **A** é indicada em verde),

$$x' = x - vt; \quad y' = y \quad (1)$$

Vista do referencial linha, a função que descreve a onda não muda no tempo (porque o referencial se move junto com a onda). Vamos chamar esta função de $f(x')$, de maneira que

$$y'(x',t) = y'(x',0) = f(x'). \quad (2)$$

Vista do referencial sem linha, a forma da onda é *a mesma* que a da função $f(x')$, só que movendo-se no tempo para a direita com velocidade v. Sendo assim, podemos escrever,

$$y(x,t) = f(x - vt)\,. \tag{3}$$

O valor da função y em um ponto x no instante t é o mesmo que o medido pelo referencial linha no ponto x' dado por $x' = x - vt$.

É importante entender o que a equação acima significa. Ela nos diz que y, que é uma função de x e de t, só depende dessas duas variáveis *combinadas* na forma $x - vt$.

Por exemplo, vamos supor que $f(x')$ é uma função seno,

$$f(x') = \text{sen}(ax')\,.$$

Então,

$$y(x,t) = \text{sen}[a(x - vt)],$$

que é diferente de sen(axt) ou sen($ax + at$) por exemplo.

Qualquer onda que se propaga para a *direita* com velocidade constante v é descrita, num referencial estático como o referencial sem linha, por uma equação do tipo

$$y(x,t) = f(x - vt)\,. \tag{4}$$

Se o movimento da onda for para a *esquerda*, a equação que descreve o seu movimento será do tipo

$$y(x,t) = f(x + vt). \tag{5}$$

Se, numa dada região do espaço, houver uma onda propagando-se da esquerda para a direita e outra onda propagando-se da direita para a esquerda, a equação que descreve o movimento combinado das duas ondas é

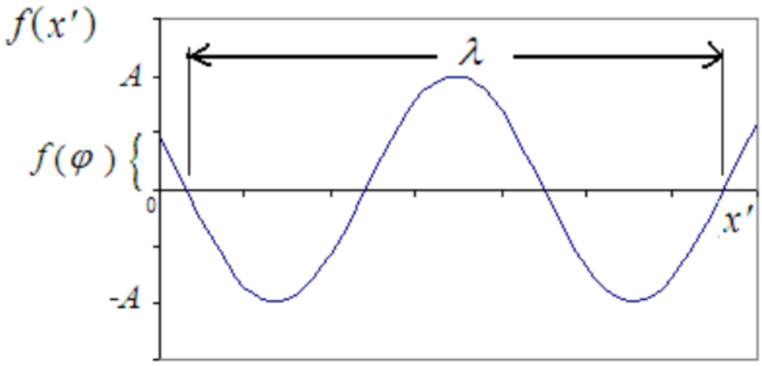
$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt). \tag{6}$$

Um tipo particular de onda bastante importante é aquele em que a função *y*, para um ponto *x* fixo, varia no tempo como um MHS. Uma onda deste tipo é chamada de *onda harmônica*.

Vamos supor que, para o referencial linha que acompanha o movimento da onda, a função $f(x')$ que descreve a onda é senoidal:

$$f(x') = A\cos(kx' + \varphi), \tag{7}$$

onde A, k e φ são constantes. O gráfico desta função é algo do tipo:



Vamos passar agora a trabalhar no referencial parado no espaço (o referencial sem linha), em relação ao qual a onda se propaga. Notem que este é o nosso referencial. Vamos supor que a onda se propaga para a direita, de maneira que a função que descreve o comportamento da onda no *espaço* e no *tempo* é do tipo

$$y(x,t) = f(x - vt) .$$

Substituindo nessa expressão a função senoidal que descreve a onda no referencial linha (para fazer isso, basta colocar o termo ($x - vt$) no lugar de x' em 7),

$$y(x,t) = A\cos\left[k\left(x - vt\right) + \varphi\right]. \qquad (8)$$

Para um ponto x qualquer fixo (por exemplo x^*), a equação acima dá:

$$y(x^*,t) = A\cos\left[k\left(x^* - vt\right) + \varphi\right] = A\cos\left[-kvt + \left(kx^* + \varphi\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x^*,t) = A\cos\left[-kvt + \delta\right] = A\cos\left[-\left(kvt - \delta\right)\right] = A\cos\left(kvt - \delta\right).$$

Comparando a expressão obtida acima com a de um movimento harmônico simples (equação 8 da aula 1),

$$y\left(x^*, t\right) = A\cos\left(kvt - \delta\right) \quad \text{e} \quad y(t)_{\text{MHS}} = A\cos\left(\omega t + \alpha\right),$$

vemos que o ponto x^* executa um MHS com frequência angular,

$$\omega = kv . \qquad (9)$$

A frequência e o período da oscilação temporal do ponto x^* são, portanto:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kv}{2\pi} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{kv}. \tag{10}$$

Substituindo a expressão (9) na equação para a onda senoidal (equação 8), obtemos esta equação escrita em termos da frequência angular:

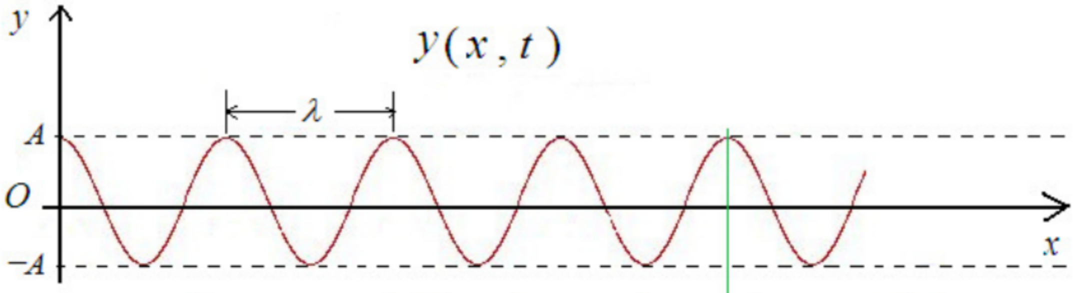
$$y(x,t) = A\cos\left(kx - \omega t + \varphi\right). \tag{11}$$

Esta função é conhecida como *função de onda* de uma onda harmônica. Ela descreve o comportamento de uma onda harmônica propagando-se para a direita, para qualquer ponto x e qualquer instante de tempo t.

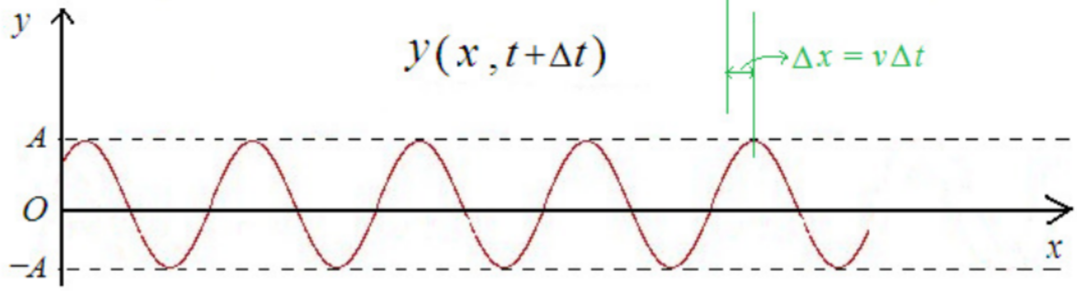
A função de onda para uma onda harmônica propagando-se para a esquerda é dada por:

$$y(x,t) = A\cos\left(kx + \omega t + \varphi\right). \tag{12}$$

É importante que você entenda bem o significado da função de onda. Ela é uma função de duas variáveis, x e t. Fixando um tempo t, ela nos diz como y varia ao longo do espaço (coordenada x) neste instante fixo (veja abaixo).

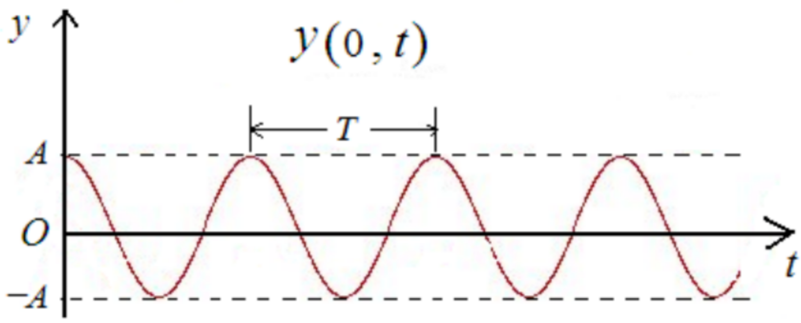


Configuração espacial da onda em um instante de tempo t dado



Configuração espacial da onda no instante de tempo $t + \Delta t$

Por outro lado, para um ponto espacial x fixo, a função de onda nos diz como a coordenada y desse ponto varia no tempo (veja abaixo).



Comportamento temporal do ponto $x = 0$

Observe que as funções acima são periódicas (senoidais), tanto para t fixo como para x fixo.

No caso do gráfico para *x* fixo, o período da oscilação é (equação 5 da aula 1)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (13)$$

No caso do gráfico para *t* fixo, podemos obter uma expressão para o *período espacial*, ou *comprimento de onda*, da oscilação de uma maneira análoga à feita na aula 1. Chamando o período espacial de λ, ele é definido por:

$$y(x + \lambda, t) = y(x, t). \qquad (14)$$

Substituindo (12) em (14):

$$A\cos\left[k(x + \lambda) - \omega t + \varphi\right] = A\cos\left(kx - \omega t + \varphi\right).$$

Esta identidade é satisfeita se

$$k\lambda = 2\pi\ ,$$

ou

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \qquad (15)$$

Combinando as equações (15) e (9):

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} \quad \text{e} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f}{v} = \frac{1}{\lambda},$$

ou

$$\lambda f = v , \tag{16}$$

ou seja, o produto do comprimento de onda pela frequência temporal, ou simplesmente frequência, da função de onda é igual à velocidade de propagação da onda.

Resumo (para fixar e evitar confusões):

- A função de onda harmônica é dada por (o sinal de menos indica uma onda propagando-se para a direita e o sinal de mais indica uma onda propagando-se para a esquerda):

$$y(x,t) = A\cos\left(kx \mp \omega t + \varphi\right) = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(x \mp vt\right) + \varphi\right]. \tag{17}$$

- A função de onda harmônica implica que tanto a variação temporal como a variação espacial da onda são senoidais. Portanto, tanto uma como a outra tem amplitude, período, frequência, frequência angular e fase.
- As amplitudes da oscilação temporal e da oscilação espacial são iguais a A. Ela é chamada de *amplitude da onda* e é medida em metros (m).
- A frequência da oscilação temporal, denotada aqui por f[1], é chamada de *frequência da onda*. A frequência da onda é medida em s^{-1} ou hertz.

---

[1] Muitos livros representam a freqüência pela letra grega υ, mas isto não será feito aqui para não confundir com a velocidade v.

- A frequência angular da oscilação temporal é

$$\omega = \frac{2\pi}{f}. \tag{18}$$

Ela é chamada de *frequência angular da onda* e é medida em rad/s ou s^{-1}.

- O período da oscilação temporal é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}. \tag{19}$$

Ele é medido em segundos (s).

- O período da oscilação espacial é λ. Ele é chamado de *comprimento de onda* e é medido em metros (m).

- A frequência da oscilação espacial dá o número de comprimentos de onda por unidade de comprimento. Ela é definida por

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \tag{20}$$

e é chamada de *número de onda*. Ela é medida em m^{-1}. *Esta grandeza não é usada na prática*.

- A frequência angular da oscilação espacial é chamada de *número de onda angular*. Ela é dada por

$$k = 2\pi\sigma = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{21}$$

e é medida em rad/m ou m^{-1}. Como σ não é usado, é comum chamar k simplesmente de *número de onda*. Esta será a terminologia adotada aqui.

- O comprimento de onda e a frequência da onda estão relacionados entre si por

$$\lambda f = v\ , \tag{22}$$

onde v é a velocidade de propagação da onda. Esta equação permite escrever a frequência angular como

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{v}{\lambda}\ . \tag{23}$$

- O argumento da função de onda,

$$\phi(x,t) = kx - \omega t + \varphi\ , \tag{24}$$

é chamado de *fase* da onda. A constante φ é chamada de *constante de fase*.

No início desta aula, falamos de uma situação hipotética em que se estaria "sentado" sobre um dado ponto da onda, acompanhando seu deslocamento junto com ela. Com a terminologia que acabamos de definir, esta situação corresponde a acompanhar o deslocamento da onda ao longo do tempo de um ponto onde a fase ϕ é constante,

$$\phi(x,t) = kx - \omega t + \varphi = \phi_0 = \text{constante}\quad .$$

Derivando esta expressão em relação a t,

$$\frac{d\phi}{dt} = k\frac{dx}{dt} - \omega = 0\ ,$$

ou

$$k\frac{dx}{dt} = \omega \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v\ .$$

Isto significa que a velocidade de um "observador" que acompanha o deslocamento da onda "sentado" sobre um ponto de fase constante é igual à própria velocidade v da onda. Por causa disso, a velocidade da onda também é chamada de *velocidade de fase*.

Para terminar esta aula, vamos adicionar que a função de onda (uma função real) também pode ser escrita em notação complexa como:

$$y(x,t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{\,i(kx-\omega t+\varphi)}\right]. \qquad (25)$$

Assim como no caso dos fenômenos oscilatórios, o uso da representação complexa também simplifica a análise matemática de fenômenos ondulatórios.