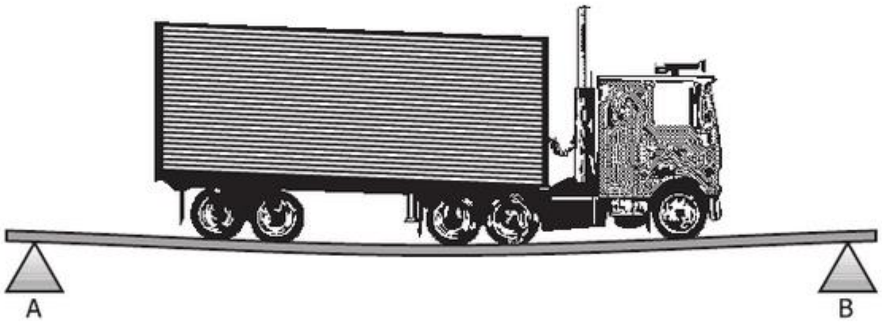
Capítulo 1
Tensão

1.1 - Introdução

Resistência dos materiais é um ramo da mecânica que estuda as relações entre as cargas *externas* aplicadas a um corpo deformável e a intensidade das forças *internas* que agem no interior do corpo.



- com esse material estrutura resiste ou se rompe à solicitação?
- que deformações ocorrerão?

Resistência dos materiais

Correlação entre as ciências

Física ⇨ Leis naturais

⇩

Estática ⇨ Equilíbrio das estruturas em face as ações, reações e momentos

⇩

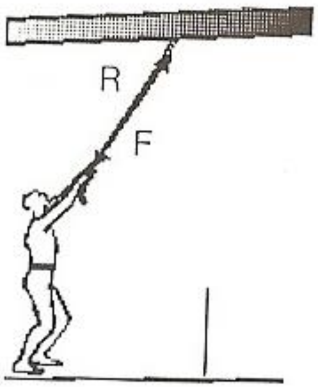
Resistência dos Materiais ⇨ Projeto

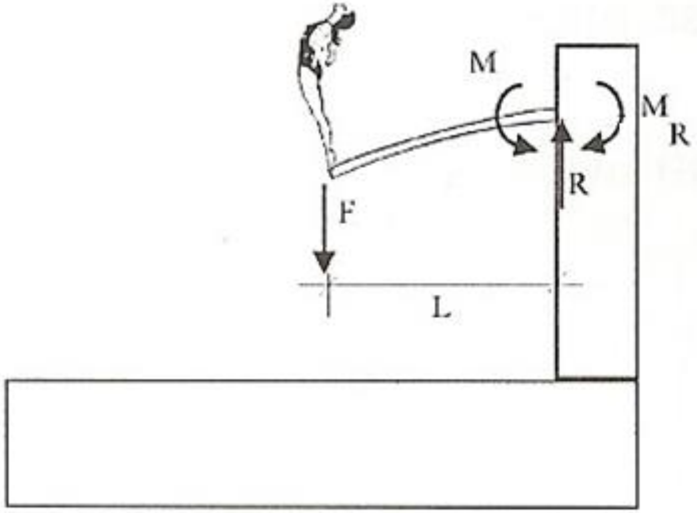
1.2 – Equilíbrio estático

Uma pessoa apoiada no chão. Se o chão puder reagir com uma reação igual ao peso, a pessoa entrará em equilíbrio. Se o chão for um charco, um lodaçal, ele não reagirá ao peso e a pessoa afundará.

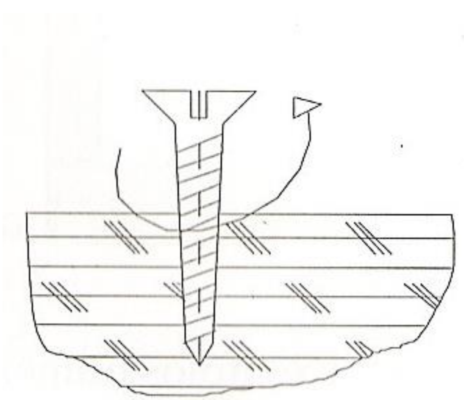
Temos uma pessoa puxando um fio. Tudo estará em equilíbrio se a amarração do fio na parede e o próprio fio puderem reagir com uma força F igual e contrária à ação.

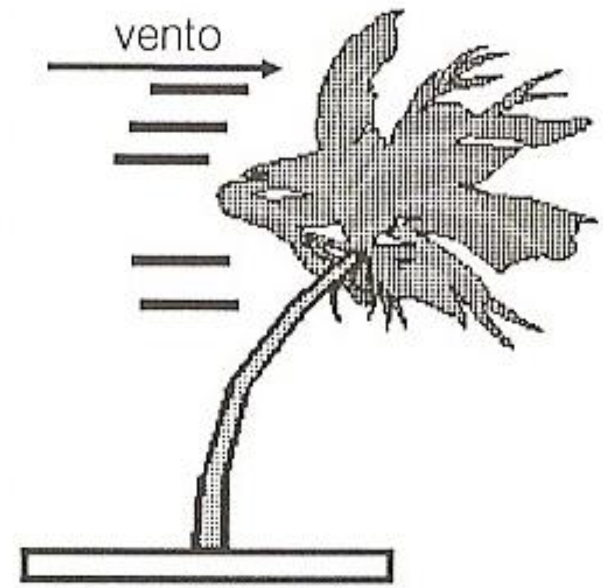
Uma pessoa empurra para baixo um trampolim. Seguramente o trampolim se deformará, mas estará em equilíbrio se o engaste trampolim-estrutura puder reagir à força e ao momento F x L criado.





Agora temos um parafuso preso numa madeira e, com uma ferramenta apoiada nessa madeira, tentamos torcê-lo. Se o momento de torção que causamos for suficiente, o parafuso girará. Se for fraco, então as resistências de atrito serão suficientes para reagir com o momento igual e de sentido contrário; deste modo o parafuso fica em equilíbrio e torçor reativo não gira.





Não confunda equilíbrio com deformações.

Para um corpo em equilíbrio estático, as forças e momentos externos são anulados e não produzirão nenhum movimento de translação ou rotação no corpo.

A condição necessária e suficiente para o equilíbrio estático de um corpo é que a força resultante e o momento resultante de todas forças externas formam um sistema equivalente a zero.

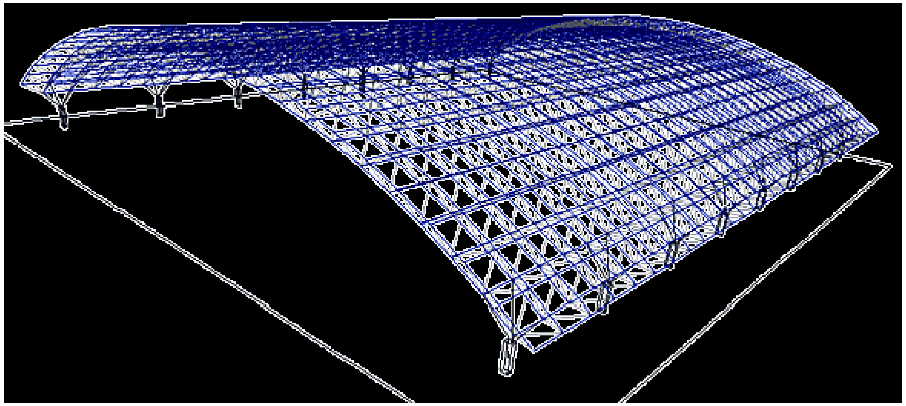
$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{M}_O = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F} \right) = 0$$

Equilíbrio de uma estrutura no espaço tridimensional:

Decompondo as duas equações de equilíbrio segundo 3 eixos cartesianos ortogonais, resultam 6 equações de equilíbrio.

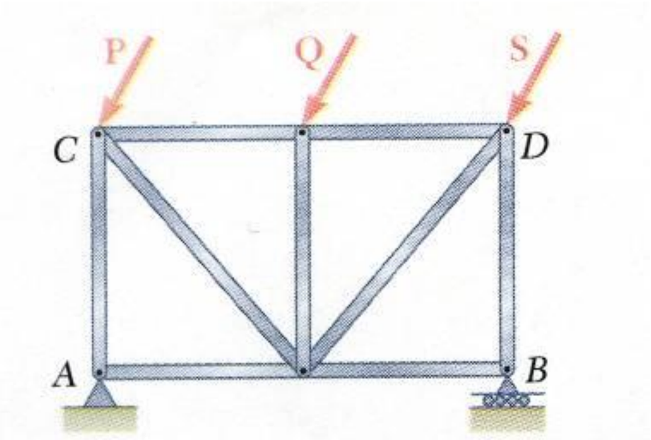
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$



Equilíbrio de uma estrutura no espaço bidimensional:

- Se todas as forças e momentos atuam no plano da estrutura

- As equações de equilíbrio se reduzem a:

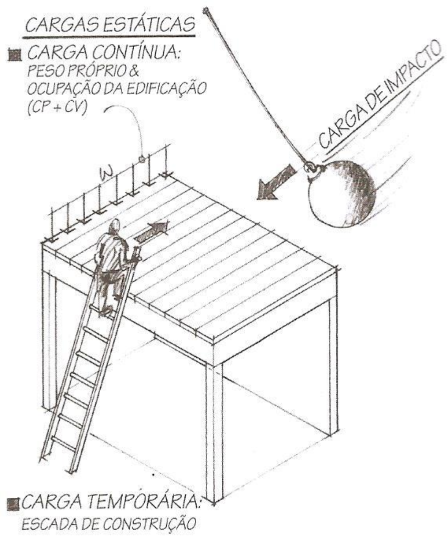


$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

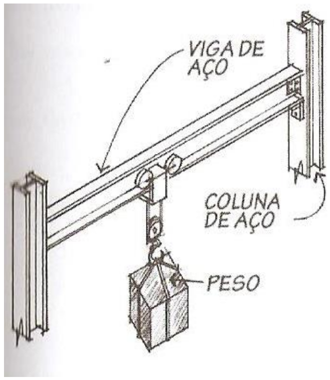
onde A é um ponto qualquer no plano da estrutura.

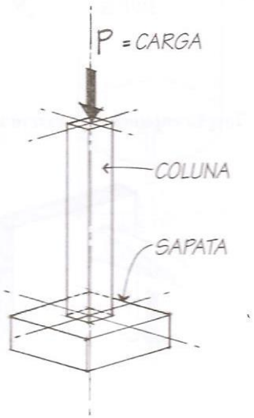
1.3 – Cargas

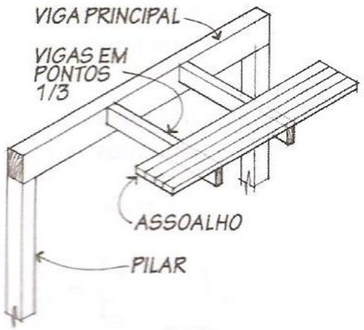
Com relação ao tempo:

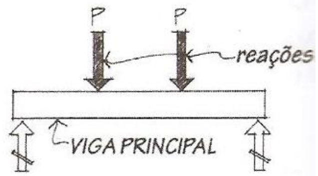


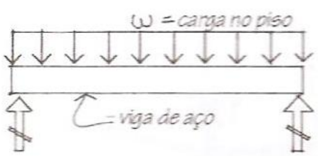
Com relação à área sobre a qual é aplicada:

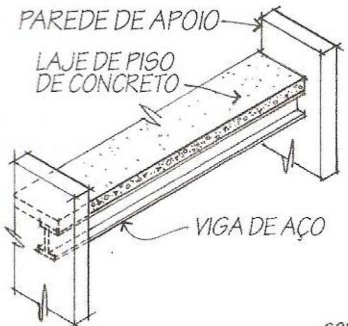


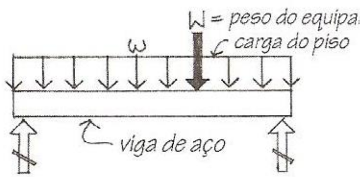


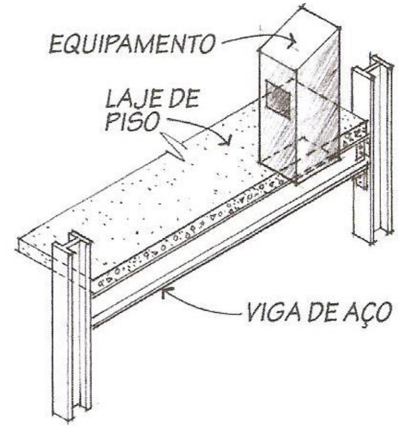

VIGA PRINCIPAL
VIGAS EM PONTOS 1/3
ASSOALHO
PILAR

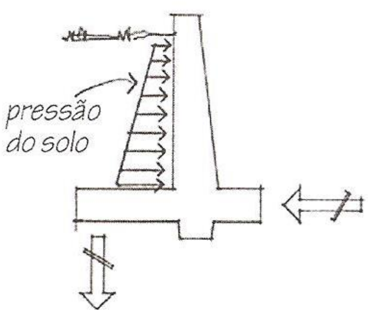

P
P
reações
VIGA PRINCIPAL

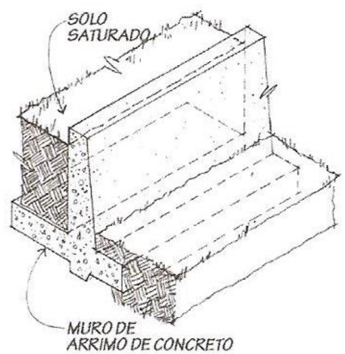

ω = carga no piso
viga de aço


PAREDE DE APOIO
LAJE DE PISO DE CONCRETO
VIGA DE AÇO


W = peso do equipa
ω
carga do piso
viga de aço

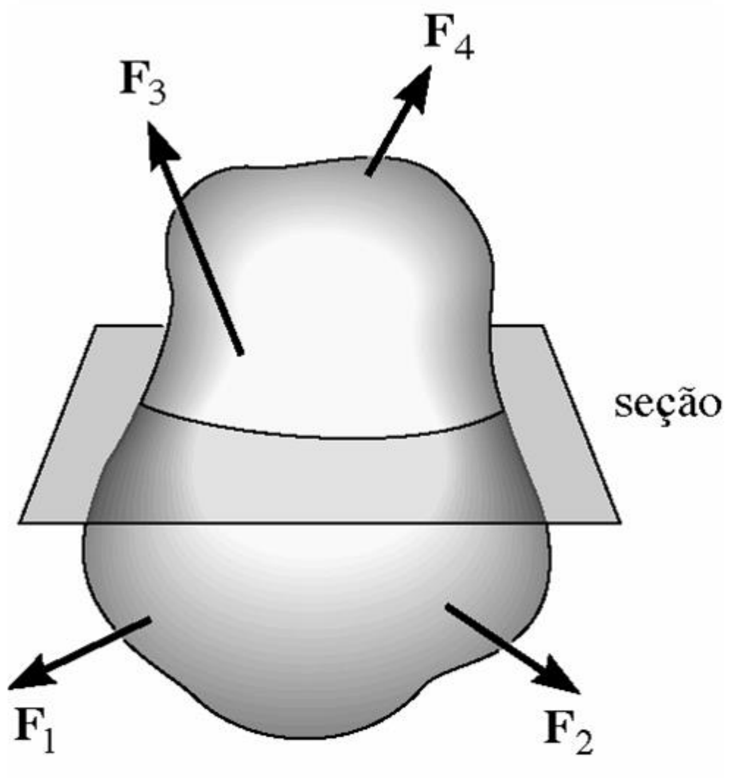

EQUIPAMENTO
LAJE DE PISO
VIGA DE AÇO


pressão do solo

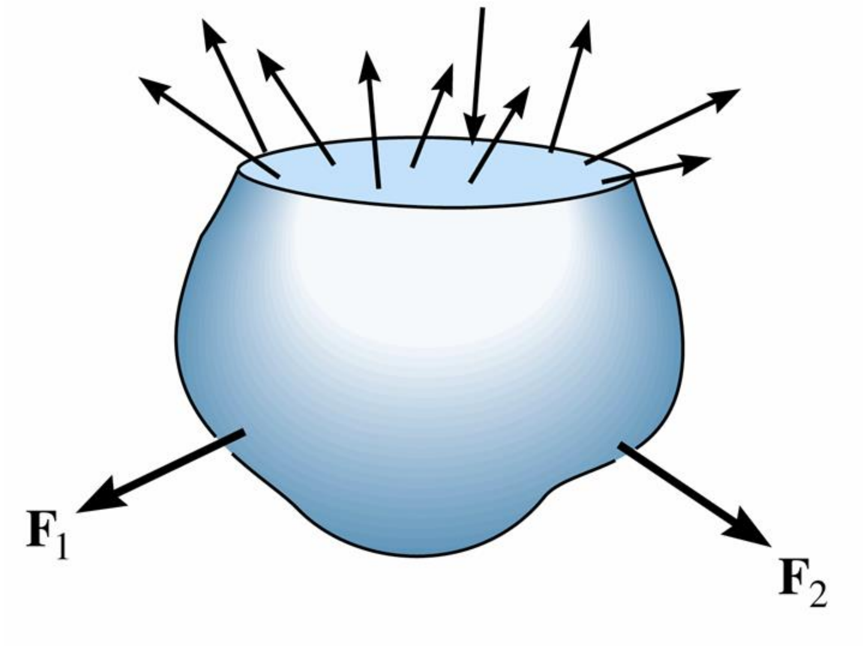

SOLO SATURADO
MURO DE ARRIMO DE CONCRETO

Método da seções

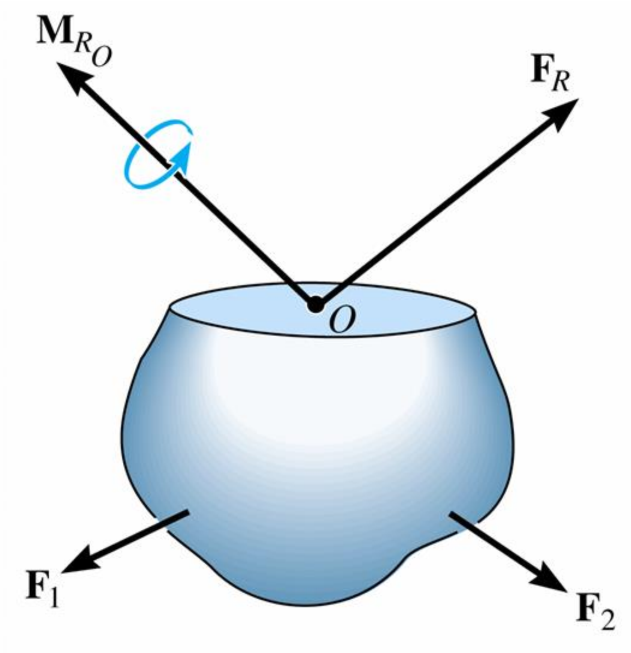
- Desenhar um diagrama de corpo livre da estrutura.
- Incluir todas as forças externas.
- Incluir todas as reações de apoio.
- Dividir a estrutura em duas partes através de um plano (seção).



- Tomar isoladamente uma das partes da estrutura.
- No plano da seção deverão surgir forças que mantenham a parte isolada da estrutura em equilíbrio.



- Calcular a força resultante e momento resultante em relação ao centróide da seção, das forças necessárias para manter a parte isolada do corpo em equilíbrio.
- Aplicar as equações de equilíbrio a parte do corpo que foi isolada.

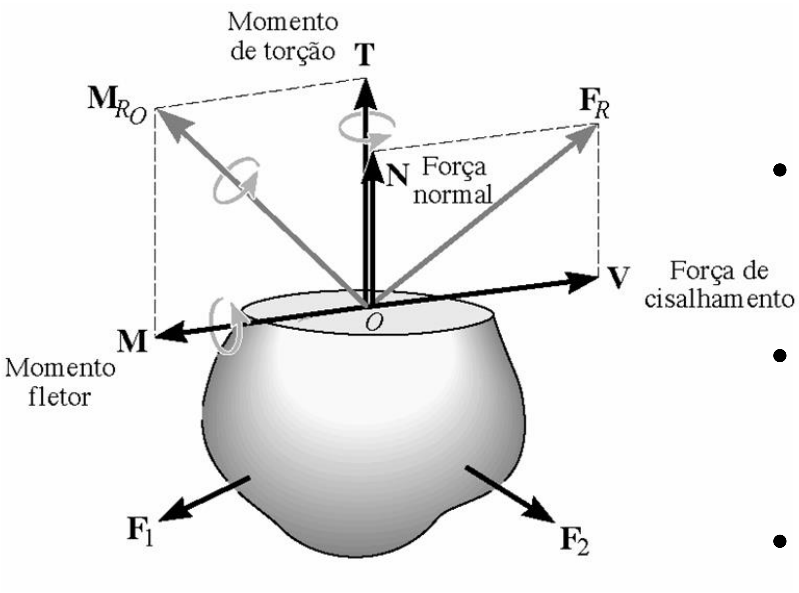


$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{M}_O = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F} \right) = 0$$

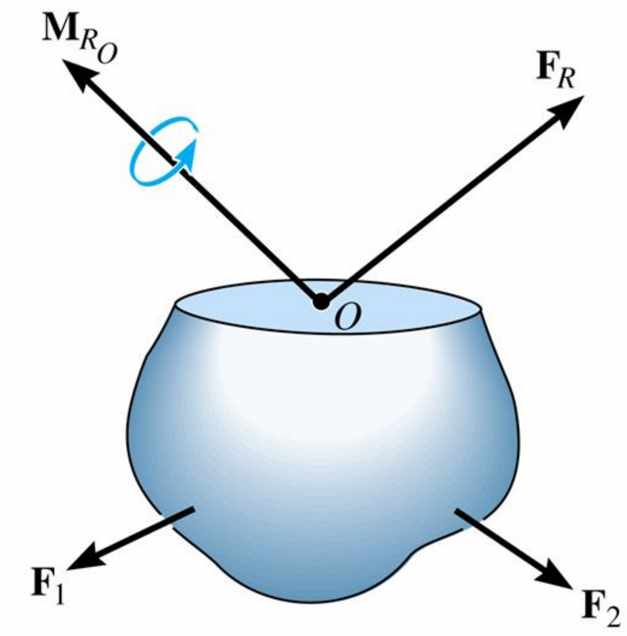
Esforços internos simples

- Decompor a força resultante e o momento resultante segundo as direções normal e tangencial ao plano da seção transversal.

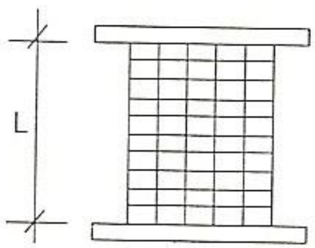


- **Esforço normal N**: é uma força que atua perpendicularmente ao plano da seção e segundo o eixo da estrutura.
- **Esforço cortante V:** é uma força de corte que atua no próprio plano da seção.
- **Momento fletor M**: é um momento cujo eixo de atuação encontra-se contido no plano da seção.
- **Momento torçor T**: é um momento cujo eixo de atuação é perpendicular ao plano da seção.

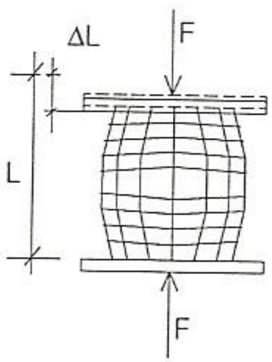
- O efeito que um lado da seção exerce sobre o outro pode ser reduzido a uma força resultante e a um momento resultante aplicados no centróide da seção.
- Mas a interação entre os dois lados da seção transversal não ocorre apenas no ponto do centróide.



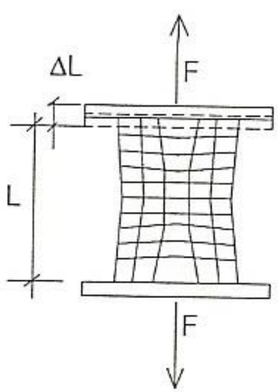
Exemplos



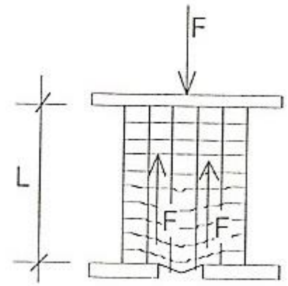
Peça original



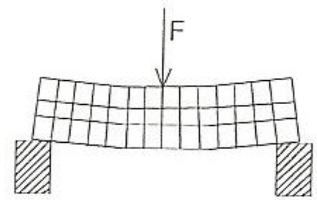
Peça em compressão



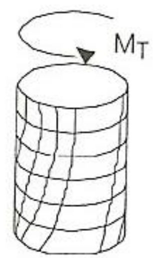
Peça em tração



Peça em corte



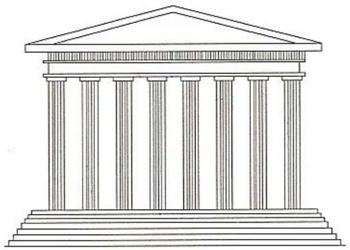
Peça sofrendo flexão (vigas)

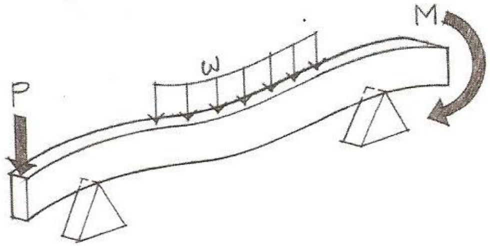


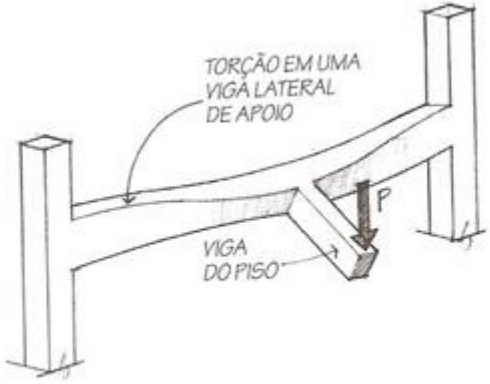
Peça sofrendo torção (eixo)

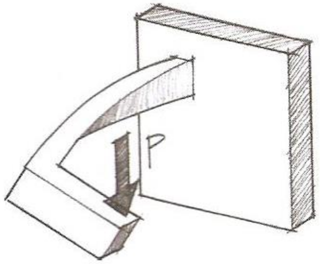
Exemplos

Partenon: em cada coluna há forças normais e tensões de compressão

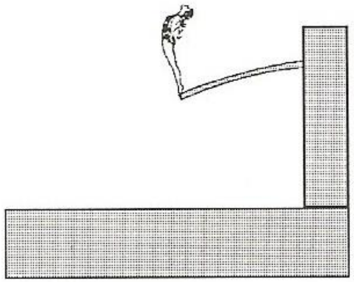




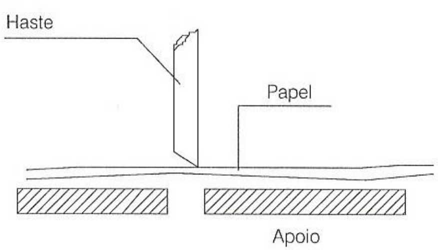




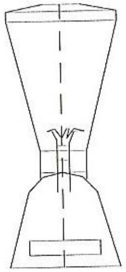
Trampolim: há momento fletor no trampolim.



Furador de papel: a haste vertical cisalha o papel.



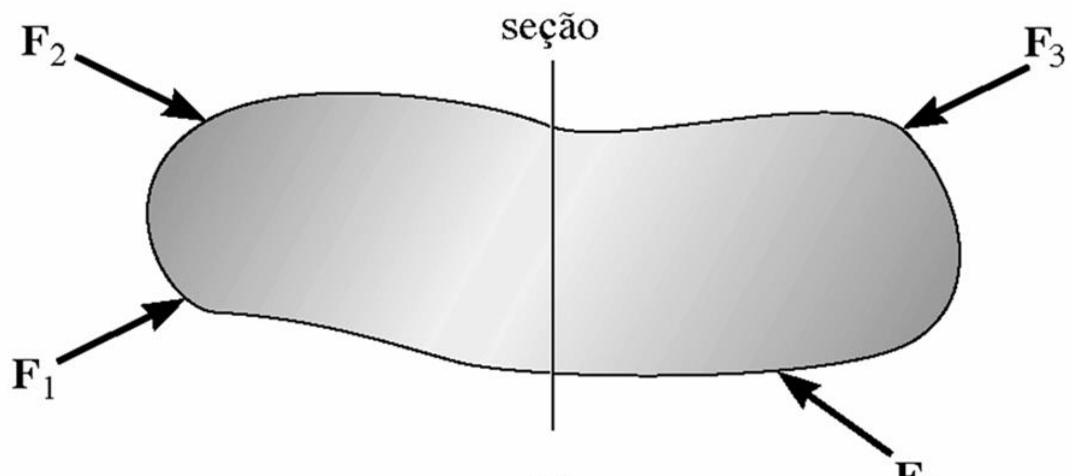
O liquidificador: o eixo girando cria torção nele próprio.



Estrutura contida em um plano xy

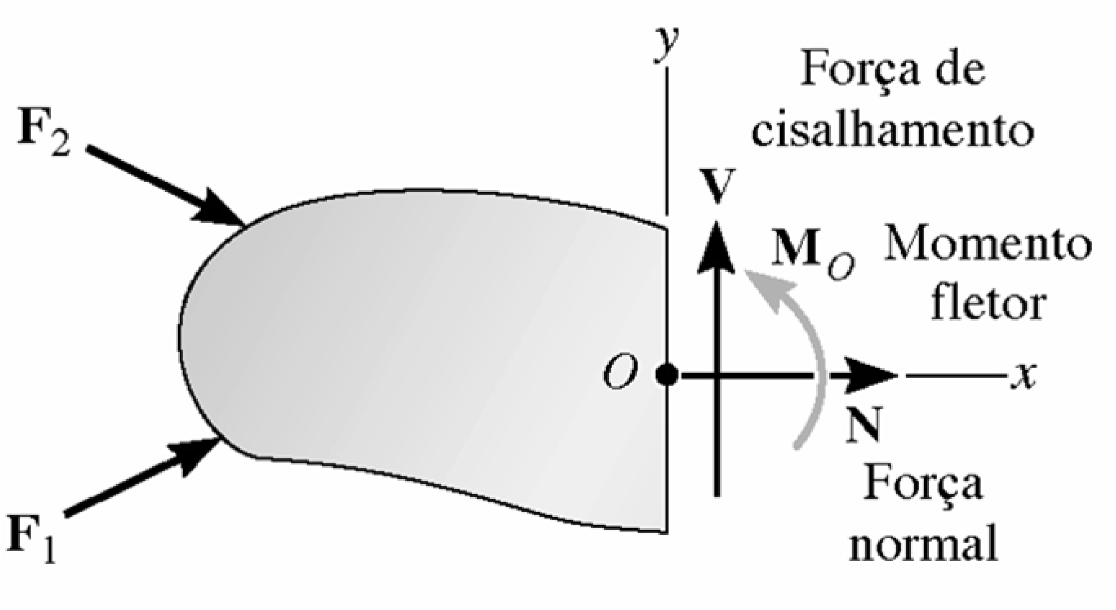
- Se a estrutura e o carregamento estiverem contidos em um único plano. (cargas coplanares).
- Basta secionar a estrutura e aplicar as equações de equilíbrio no plano.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$



(a)

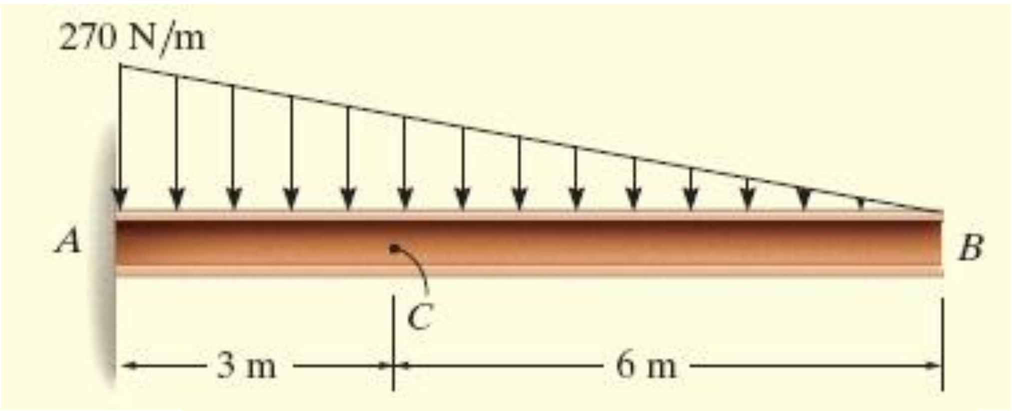
Esforços simples no plano xy



(b)

Exemplo 1 -

Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal em C da viga abaixo:



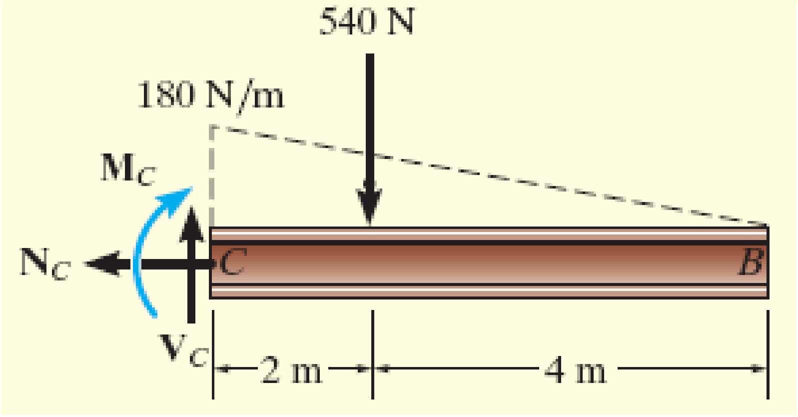
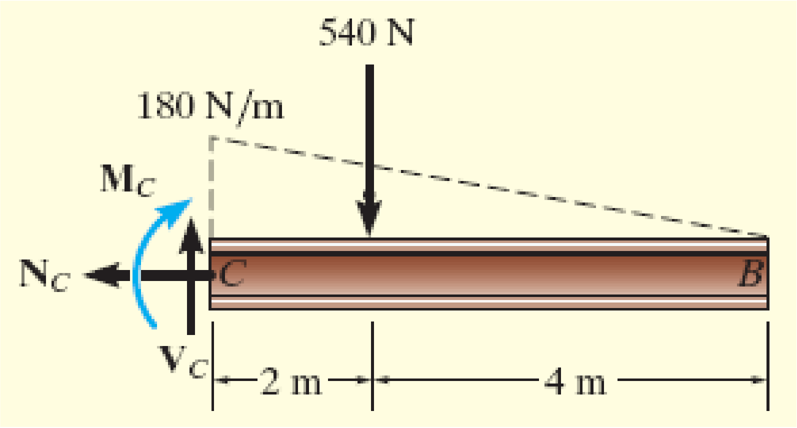


Diagrama do corpo livre



A intensidade da carga distribuída em C é determinada por proporção,

$$\frac{w}{6} = \frac{270}{9} \Rightarrow w = 180 \text{ N/m}$$

O valor da resultante da carga distribuída é

$$F = \tfrac{1}{2}(180)(6) = 540 \text{ N}$$

que age a $\tfrac{1}{3}(6) = 2\text{m}$ de C.

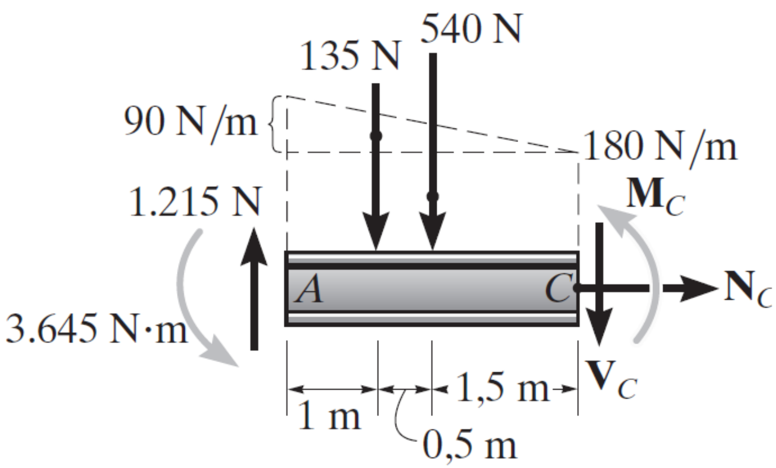
Aplicando as equações de equilíbrio, temos:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \qquad -N_C = 0 \qquad \boxed{N_C = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad V_C - 540 = 0 \qquad \boxed{V_C = 540N}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_C = 0; \qquad -M_C - 540(2) = 0 \qquad \boxed{M_C = -1.080 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

Elemento AC:



Aplicando as equações de equilíbrio, temos

$$+\rightarrow\sum F_x = 0; \qquad -N_C = 0 \qquad \boxed{N_C = 0}$$

$$+\uparrow\sum F_y = 0; \qquad V_C - 1215 + 135 + 540 = 0 \qquad \boxed{V_C = 540N}$$

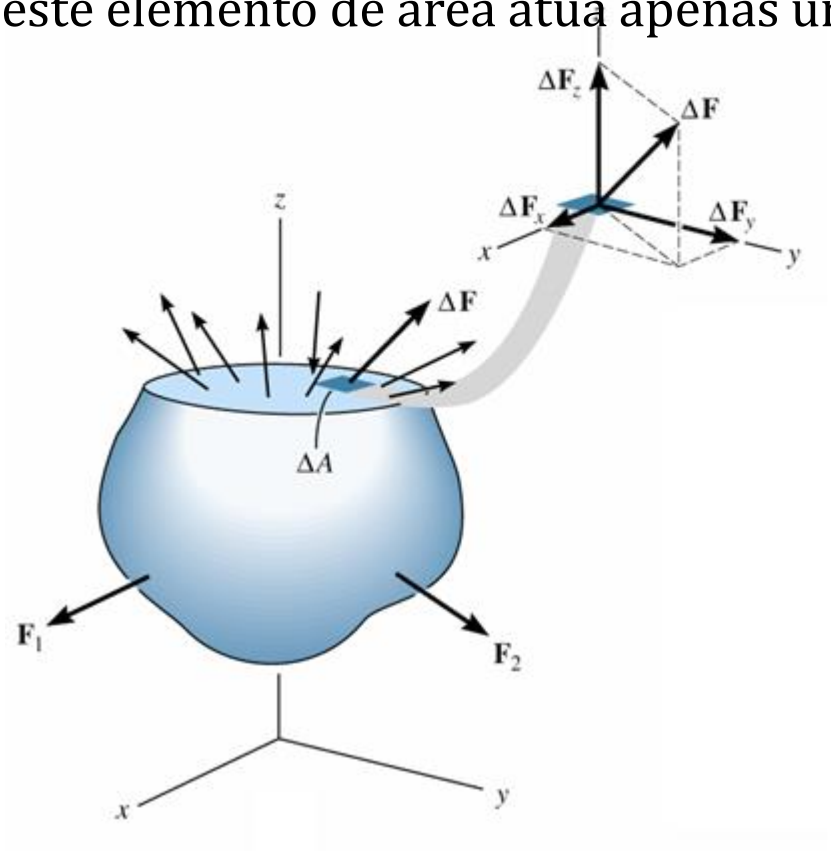
$$\circlearrowleft + \sum M_C = 0; \qquad +M_C + 3645 + 540(1.5) + 135(2) - 1215(3) = 0 \qquad \boxed{M_C = -1.080\ \mathrm{N \cdot m}}$$

1.4 – O conceito de tensão

É necessário determinar como se dá a interação entre os dois lados da seção ponto a ponto.

Para isso toma-se um elemento de área ΔA muito pequeno.

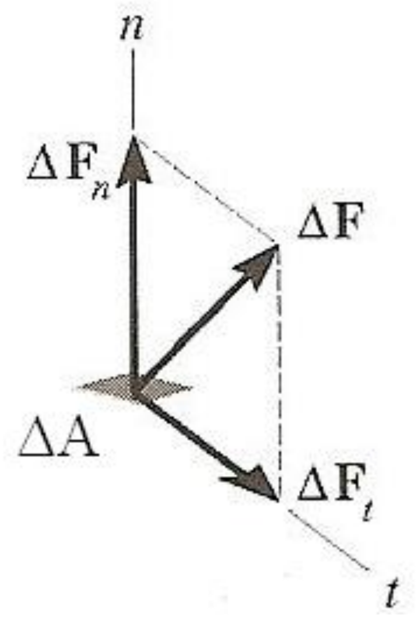
Sobre este elemento de área atua apenas uma força elementar $\Delta \boldsymbol{F}$.



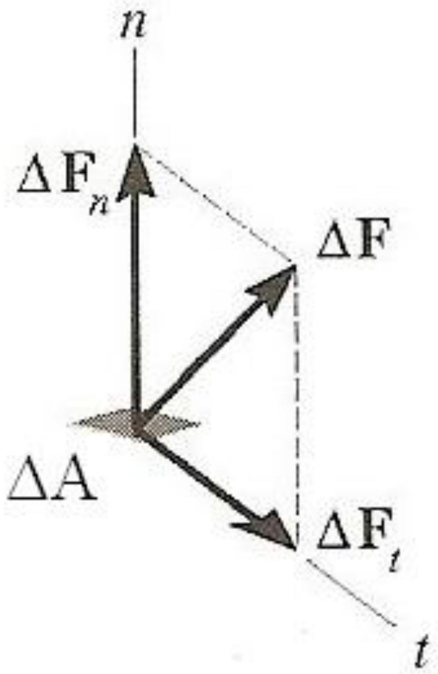
Esta força elementar $\Delta \boldsymbol{F}$ pode ser decomposta em duas componentes.

Uma componente normal ao plano da seção $\Delta \boldsymbol{F}_n$.

Uma componente tangencial ao plano da seção $\Delta \boldsymbol{F}_t$.



A **tensão** descreve a intensidade da força interna sobre um plano específico (área) que passa por um ponto.



É a razão entre a forças $\Delta \boldsymbol{F}$ e a área ΔA, *força por unidade de área,* quando ΔA *tende a zero.*

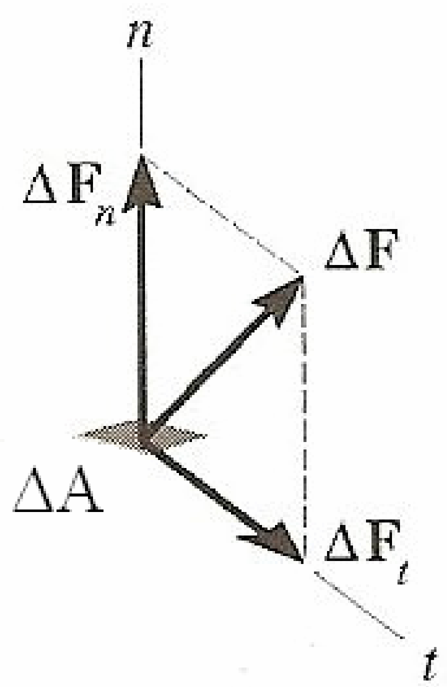
$$\vec{T} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

Tensão é o valor limite da força por unidade de área quando a área tende a zero. Por essa definição, o material no ponto é considerado contínuo e coeso.

Tensão normal em um ponto

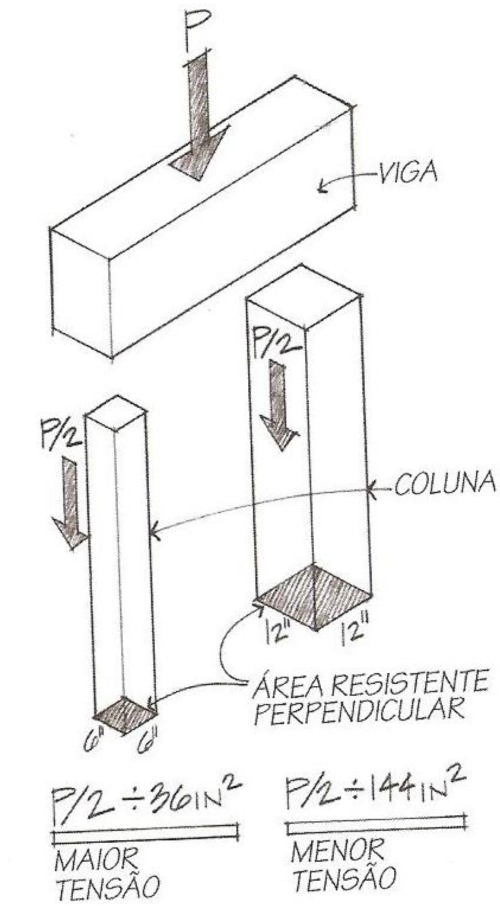
- É a razão entre a forças $\Delta \boldsymbol{F_n}$ e a área ΔA, *força por unidade de área,* quando ΔA *tende a zero.*

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$$



- Tensão normal de tração: quando puxa o elemento ΔA.

- Tensão normal de compressão: quando empurra o elemento ΔA.

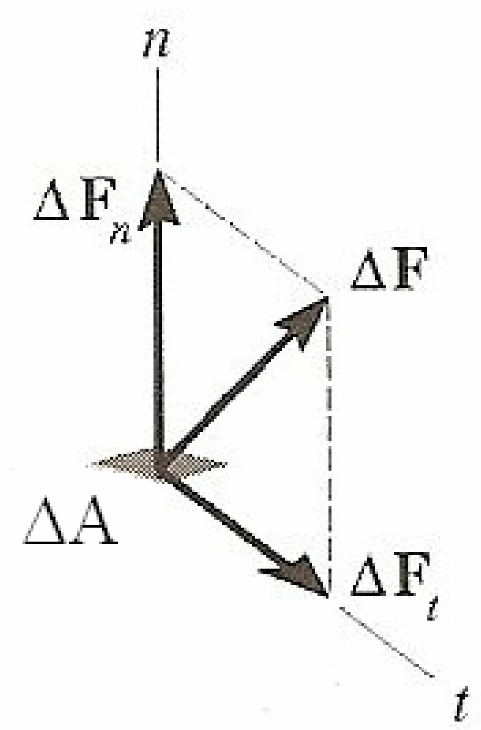


$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Tensão cisalhante em um ponto

- É a razão entre a força $\Delta \boldsymbol{F}_t$ e a área ΔA, *força por unidade de área,* quando ΔA *tende a zero.*

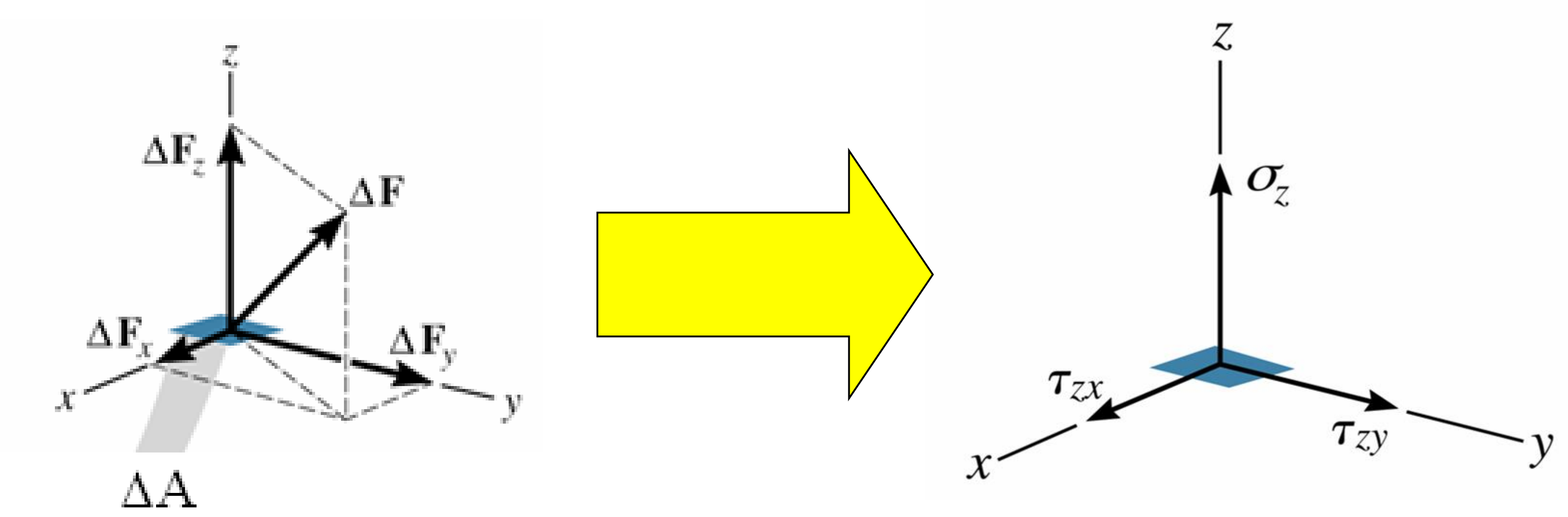
$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A}$$



- Tensão cisalhante produz um deslizamento do elemento ΔA, *efeito de cisalhamento (corte).*

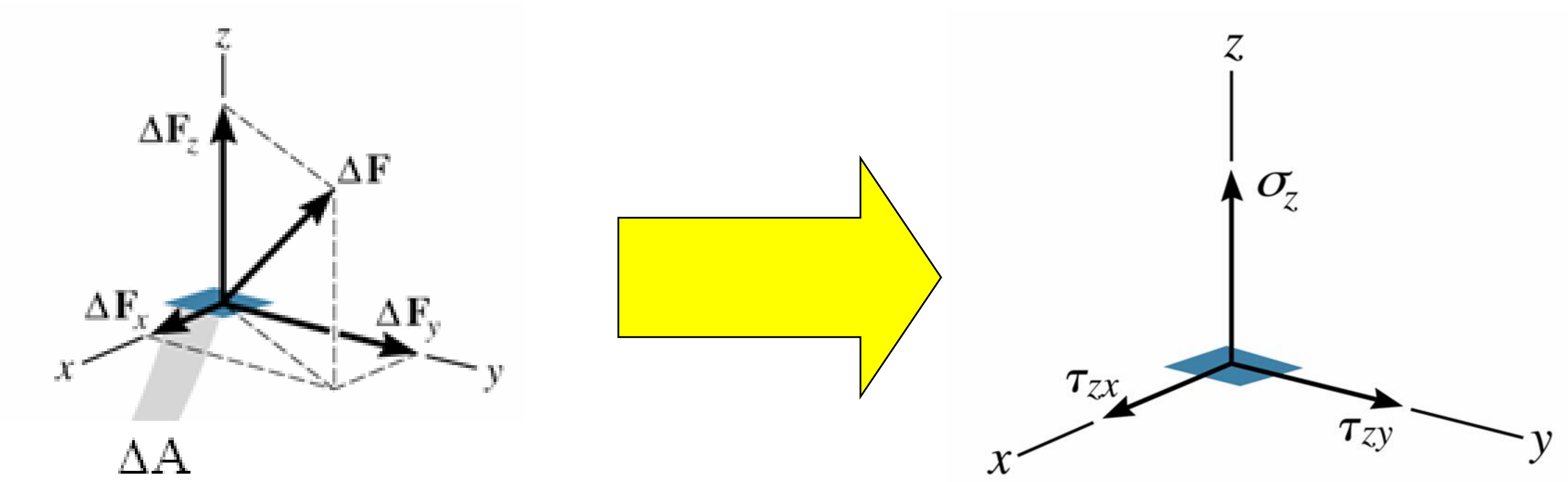
Componentes cartesianas de tensão:

A força $\Delta \boldsymbol{F}$ pode ser decomposta segundo um sistema de eixos cartesianos ortogonais.



- Componente de tensão normal σ_z

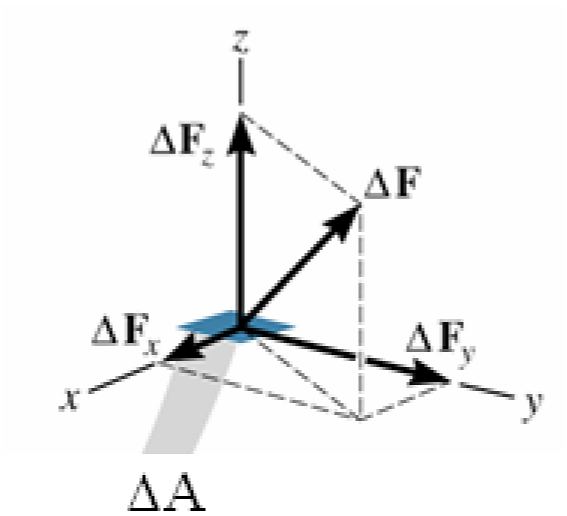
$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

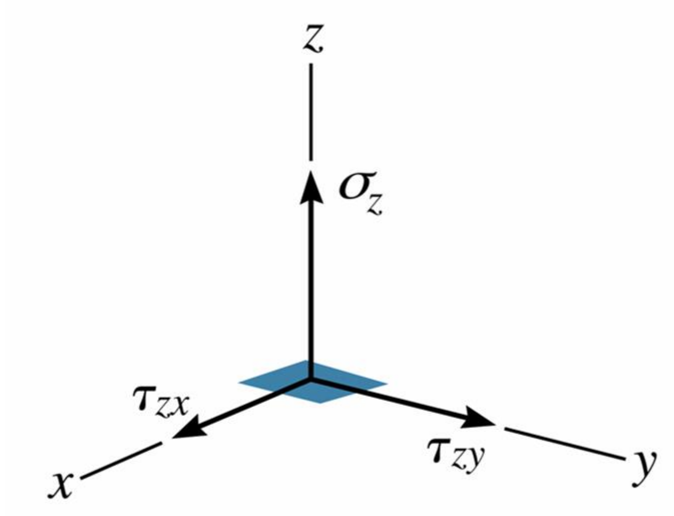


- Componentes de tensão tangencial τ_{zx} e τ_{zx}.
- O primeiro índice indica a direção da normal a ΔA.
- O segundo índice indica a direção da componente de força.

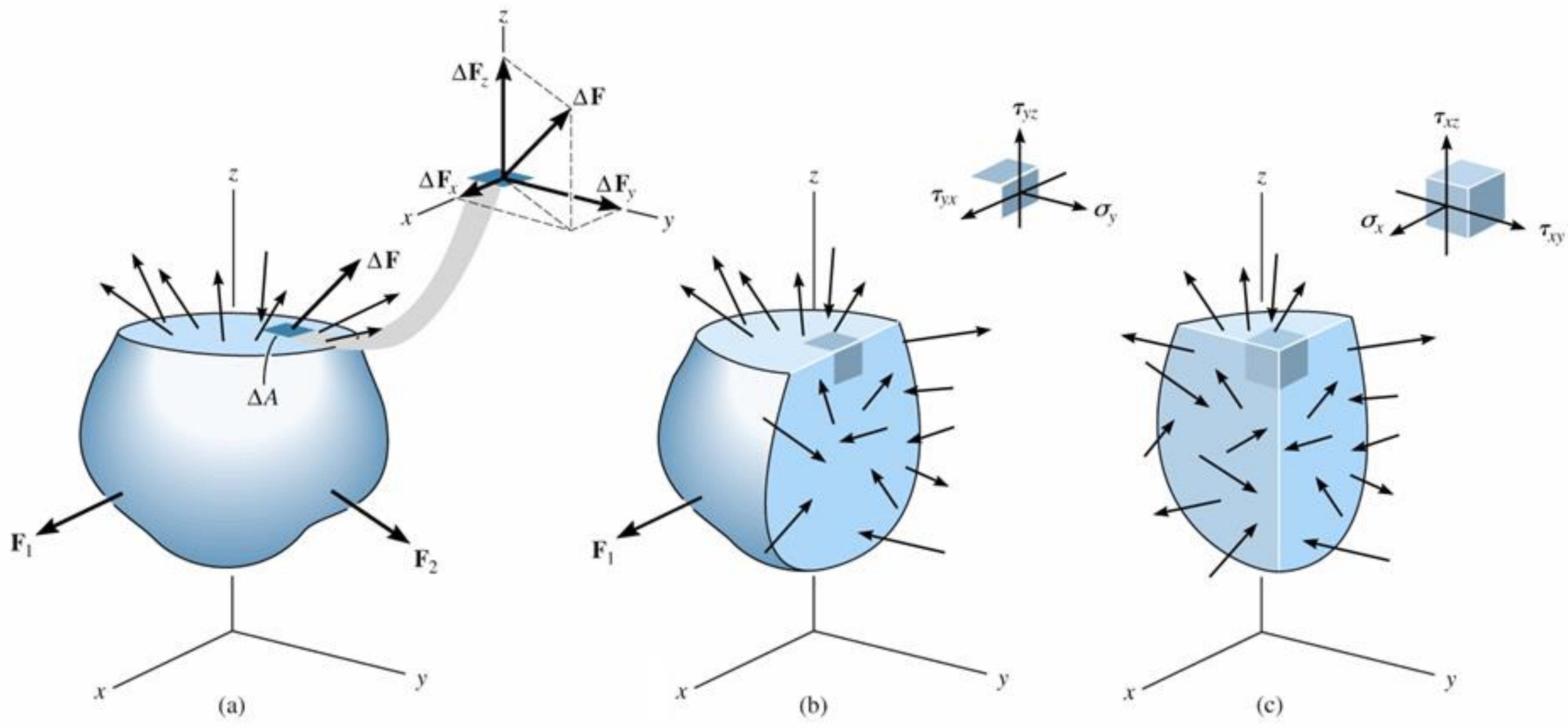
$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$

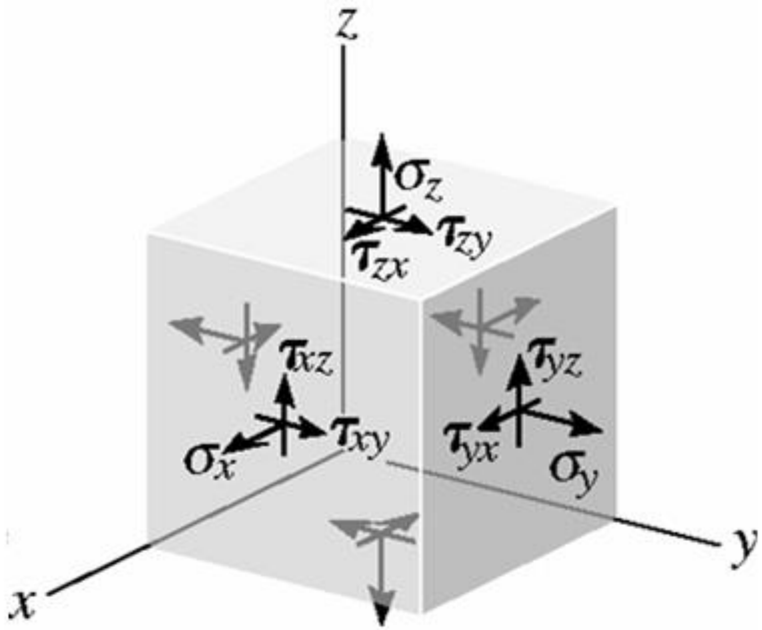




Fazendo-se seções segundo dois outros planos, ortogonais aos eixos y e x.

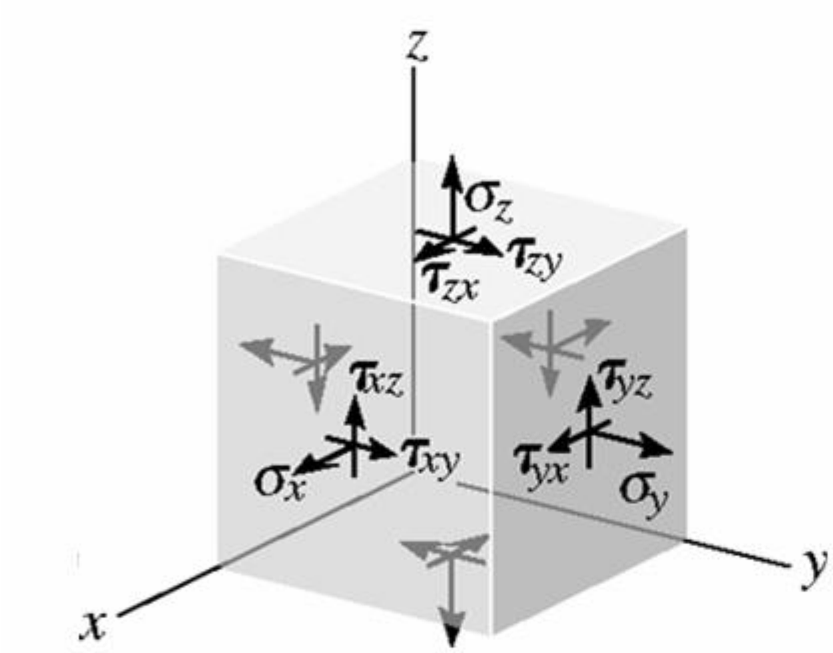


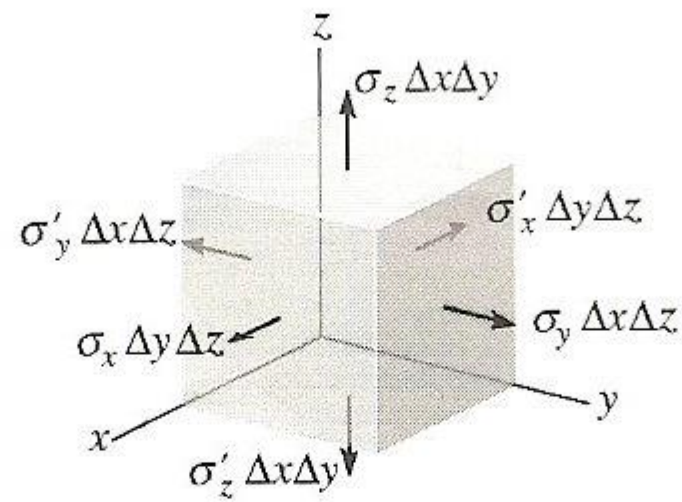
Componentes cartesianas de tensão que definem o estado de tensão em um ponto.



Estado geral da tensão

Nas faces opostas do cubo existem tensões normais de mesmo módulo e sentido oposto, por equilíbrio de forças.

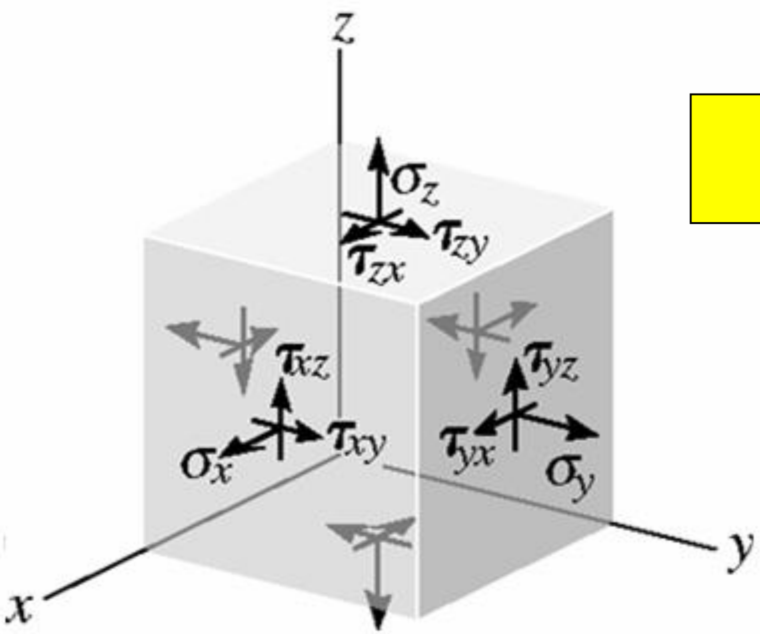


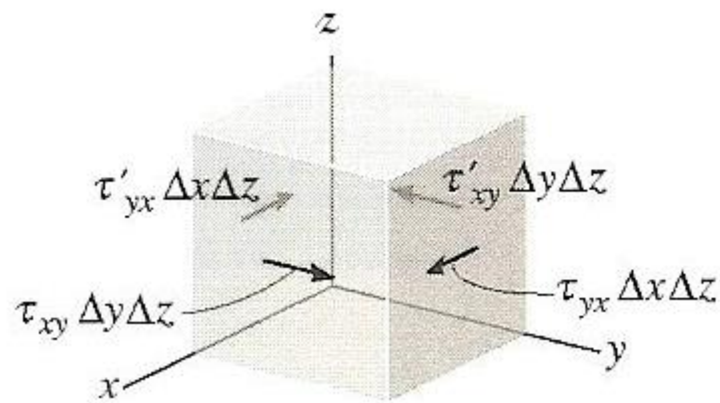


$$\Sigma F_x = 0; \qquad \overbrace{\overbrace{\sigma_x}^{\text{tensão}}\overbrace{(\Delta y \Delta z)}^{\text{área}}}^{\text{força}} - \sigma'_x(\Delta y \Delta z) = 0$$

$$\sigma_x = \sigma'_x$$

Nas faces adjacentes do cubo existem tensões tangenciais de mesmo módulo e sentido oposto, por equilíbrio de momentos.



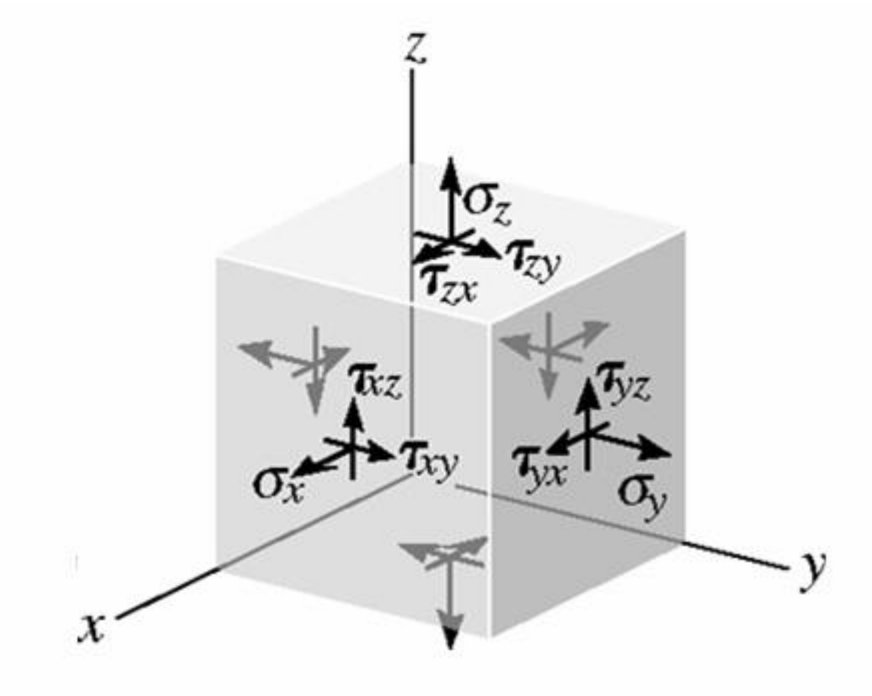


$$\sum M_z = 0; \quad \overbrace{\overbrace{\overbrace{\tau_{xy}}^{\text{tensão}}\overbrace{(\Delta y \Delta z)}^{\text{área}}}^{\text{força}}\overbrace{\Delta x}^{\text{braço}}}^{\text{momento}} - \tau_{yx}(\Delta x \Delta z)\Delta y = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xy} = \tau'_{xy} = \tau_{yx} = \tau'_{yx}$$

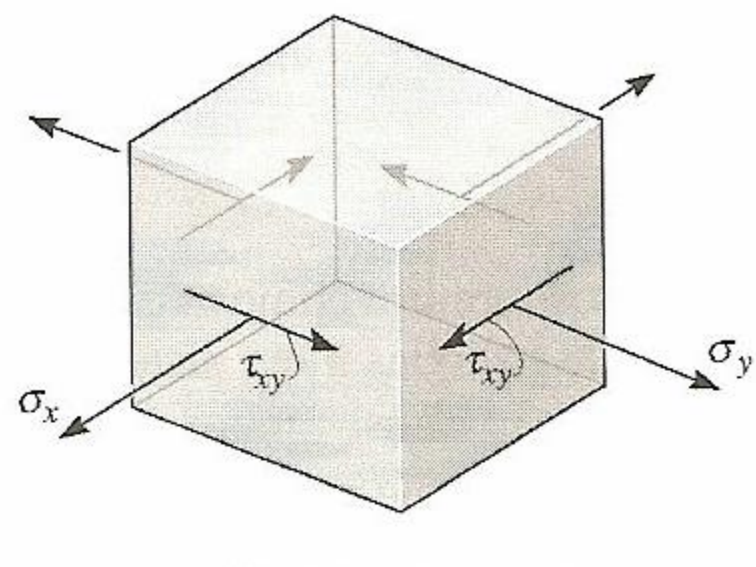
Então são necessárias apenas 6 componentes de tensão para definir o estado de tensões em um ponto.



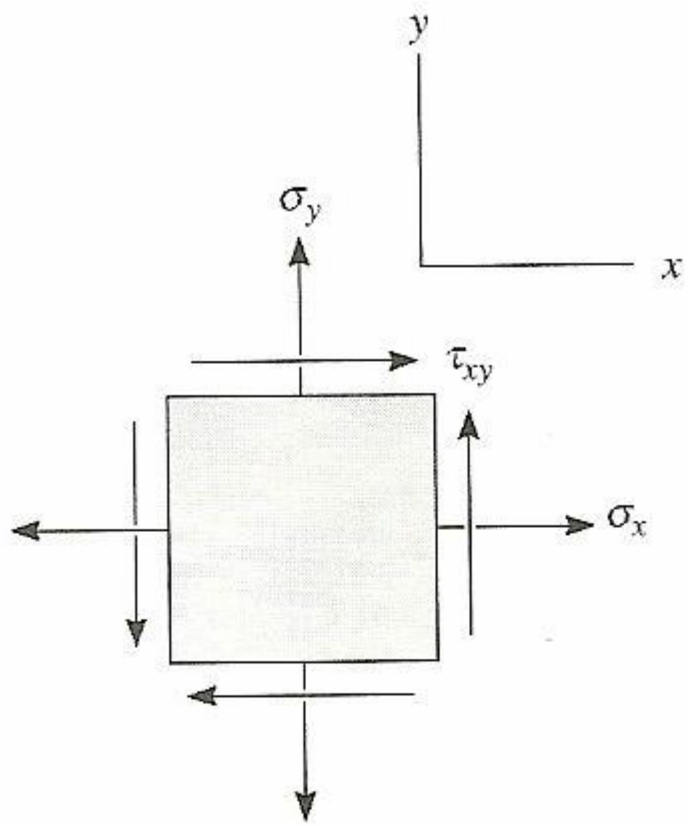
Tensor de tensões simétrico:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

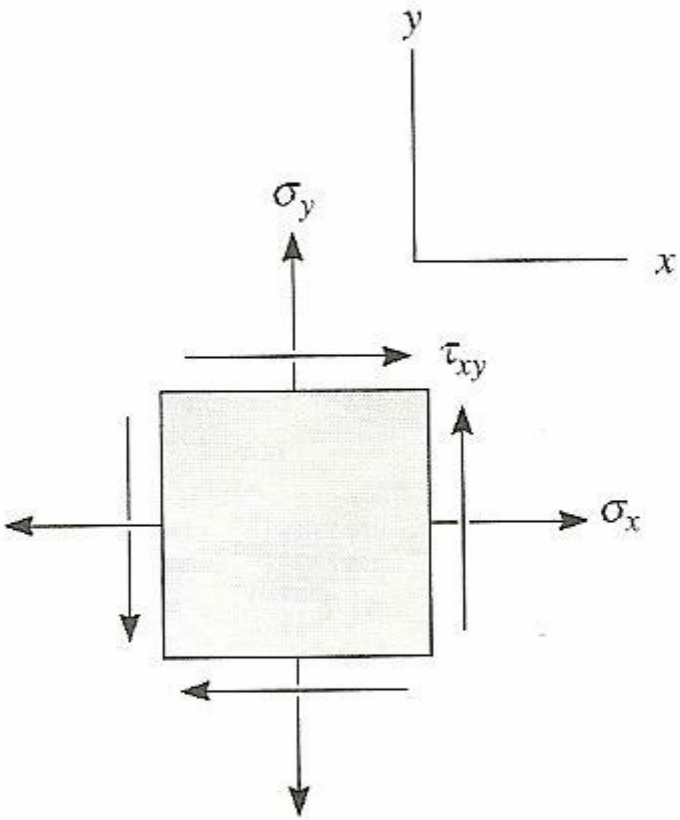
Felizmente, na prática muitos problemas se reduzem a um estado plano de tensões.



Estado plano de tensões



Estado plano de tensões
(vista bidimensional)



Estado plano de tensões
(vista bidimensional)

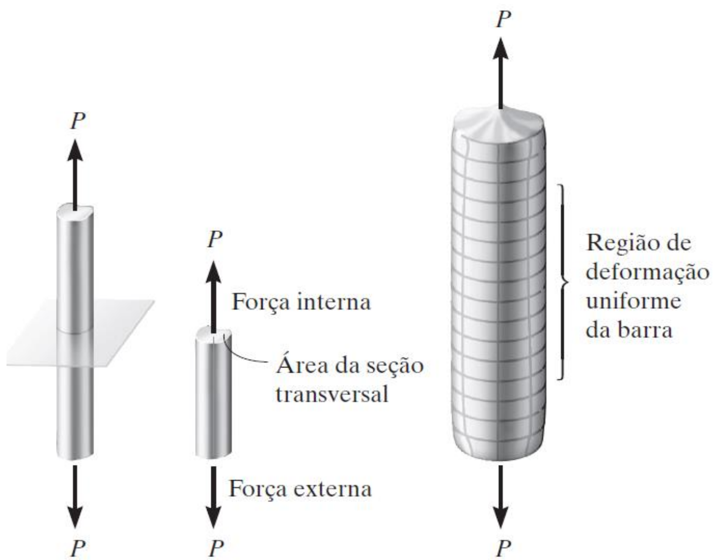
- No estado plano de tensões é necessário determinar apenas 3 componentes de tensão.
- As componentes fora do plano são todas nulas.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

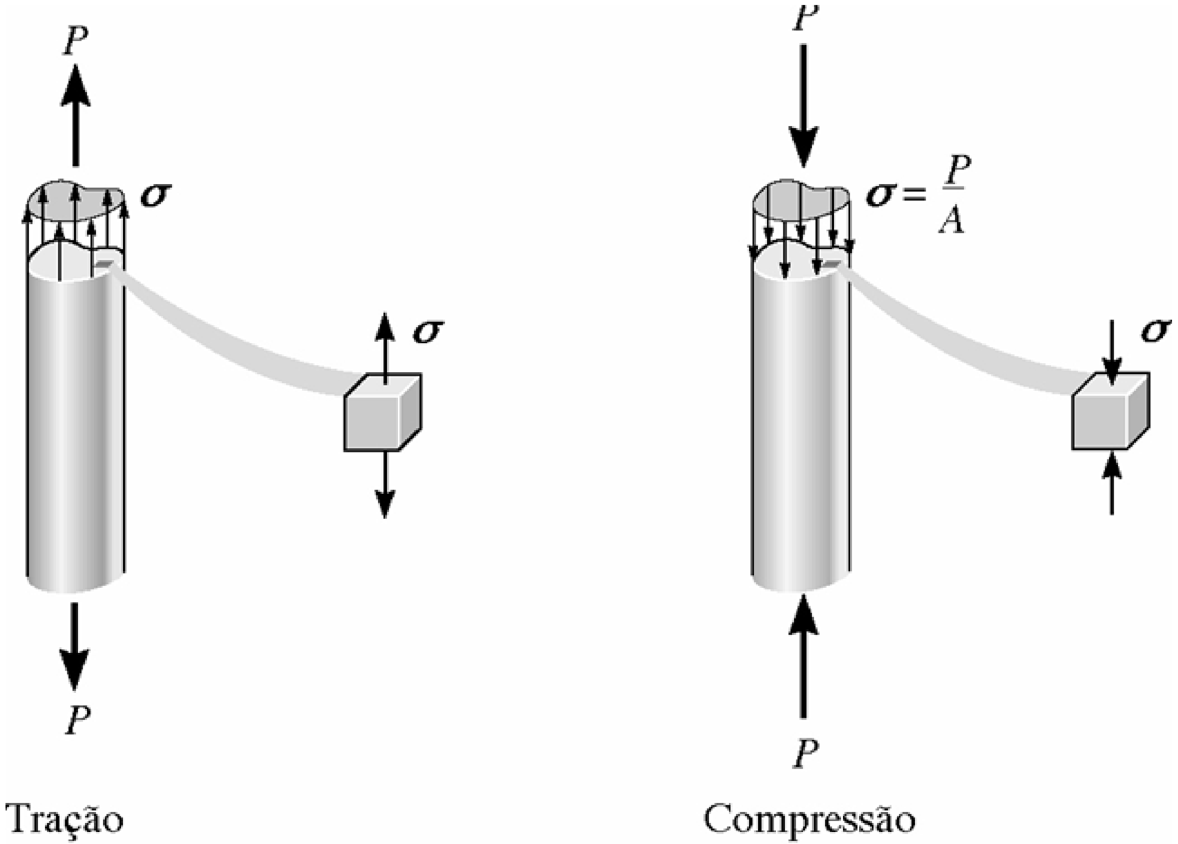
Tensão normal média em uma barra com carga axial:

Barra é prismática quando todas as seções são iguais.

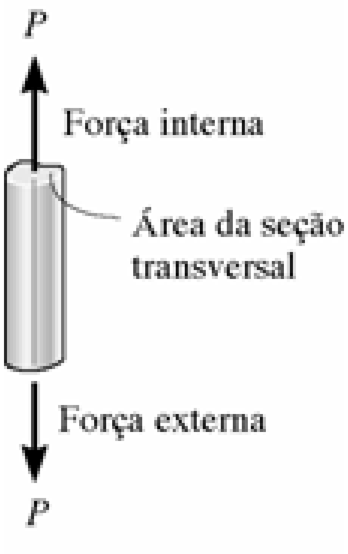
Quando ***a área da seção transversal da barra*** está submetida à força axial pelo centróide, ela está submetida somente à tensão nominal.

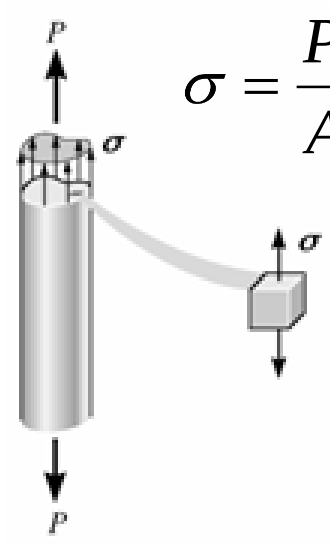


- Barra reta (deformação uniforme)
- Material homogêneo
- Isotrópicos (mesma propriedades em todas direções).


P
σ
σ
P
Tração
P
σ = P/A
σ
P
Compressão

Unidades de tensão:

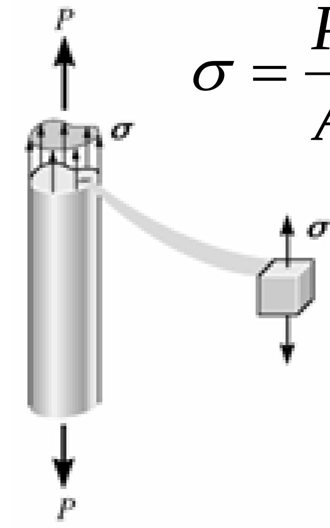




$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$Tensão = \frac{Unidade\ de\ Força}{Unidade\ de\ Área} = \frac{N\,(Newton)}{m^2\,(metro\ quadrado)} = Pa\,(Pascal)$$

Sistema internacional



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

O Pascal é uma unidade pequena para medir tensões em Engenharia.

Na prática usam-se múltiplos do Pascal:

kPa = 10^3 Pa (quilopascal)

MPa = 10^6 Pa (megapascal)

GPa = 10^9 Pa (gigapascal)

Observação:

$$\frac{1N}{mm^2} = \frac{1N}{10^{-6}m^2} = 10^6\frac{N}{m^2} = 1MPa$$

Sistema inglês

Unidades de tensão no sistema inglês:

Libra por polegada quadrada: psi = pound per square inch=lbf/in^2

Múltiplo: kip=k lbf

Múltiplo: ksi = kilopound per square inch

1 ft=12in

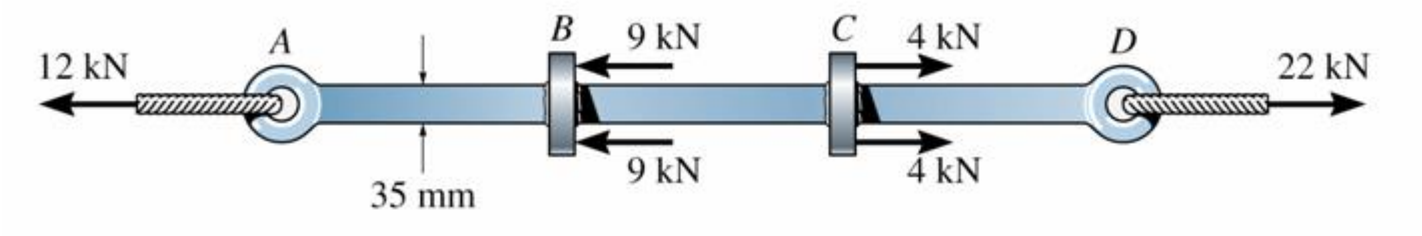
1 psi = 0,006895 MPa

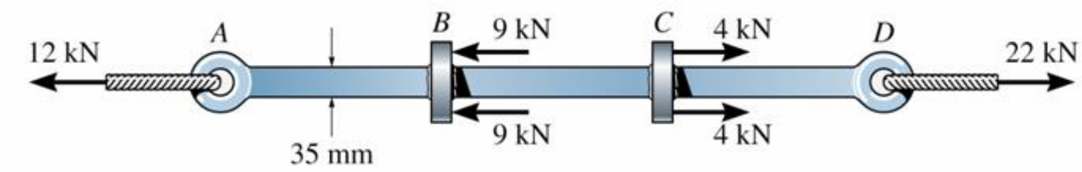
1 ksi =6,895 MPa

Conversão de unidades!

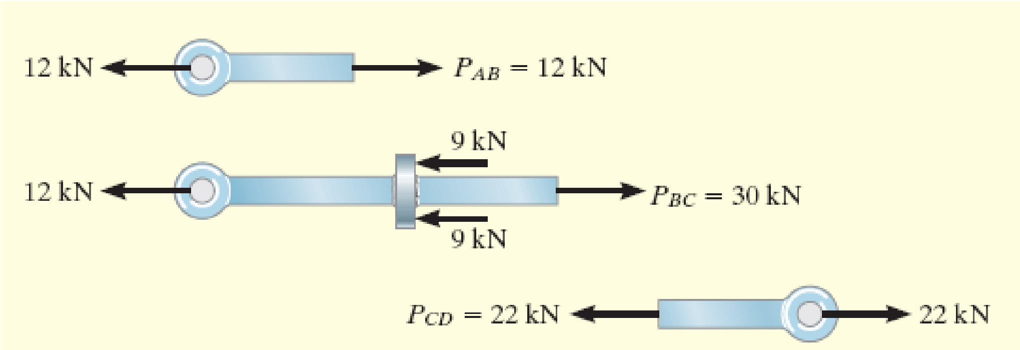
Exemplo 2 -

A barra tem largura constante de 35 mm e espessura de 10 mm. Determine a tensão normal média máxima na barra quando ela é submetida à carga mostrada.

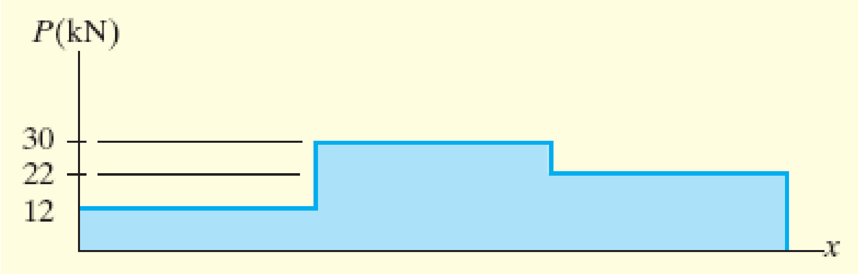




Por inspeção, as forças internas axiais são constantes, mas têm valores diferentes.

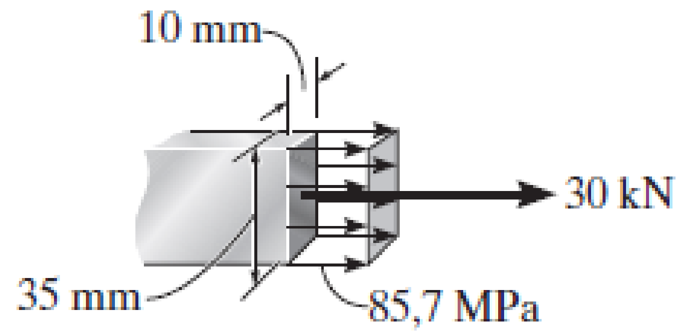


Graficamente, o diagrama da força normal é como mostrado abaixo:



A maior carga é na região BC, onde

$P_{BC} = 30$ kN.



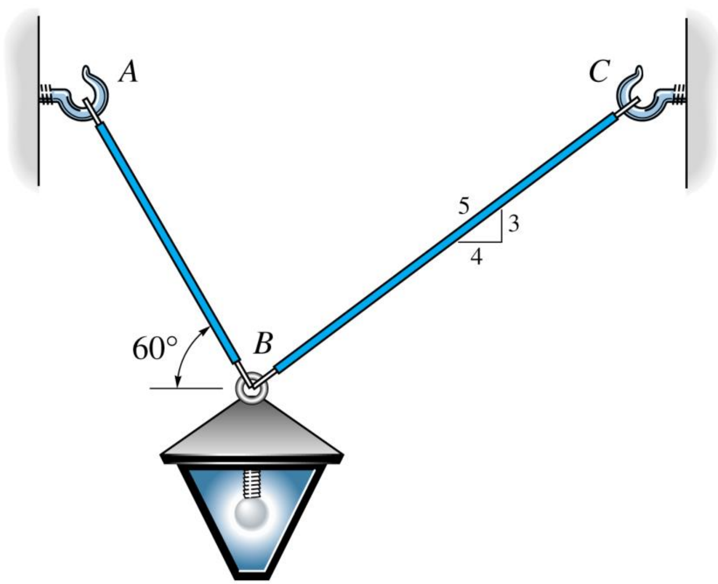
Visto que a área da seção transversal da barra é *constante*, a maior tensão normal média é:

$$\sigma_{BC} = \frac{P_{BC}}{A} = \frac{30\left(10^3\right)N}{(35)(10)\,mm^2}$$

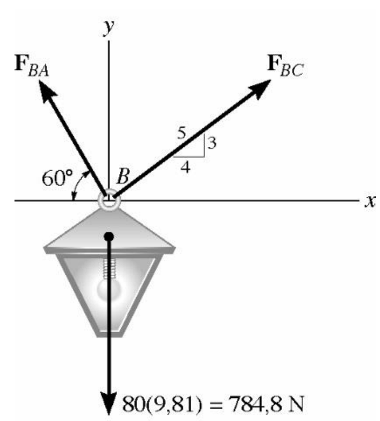
$$= \boxed{85{,}7\,MPa}$$

Exercício de fixação:

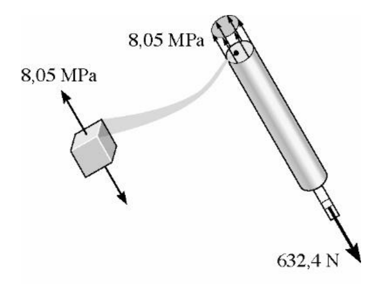
1)A luminária de 80kg é sustentada por duas hastes, AB e BC, como mostra a figura abaixo. Se AB tiver diâmetro de 10mm e BC tiver diâmetro de 8mm, determine a tensão normal média em cada haste.



(a)



(b)



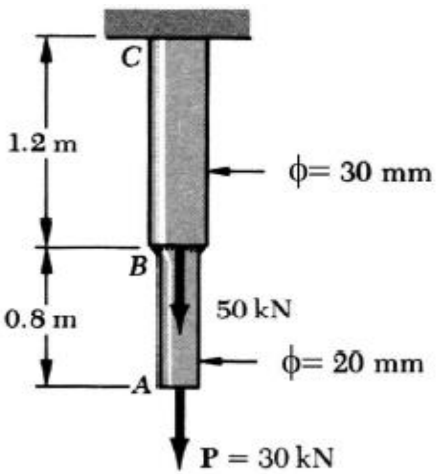
(d) (c)

Respostas:

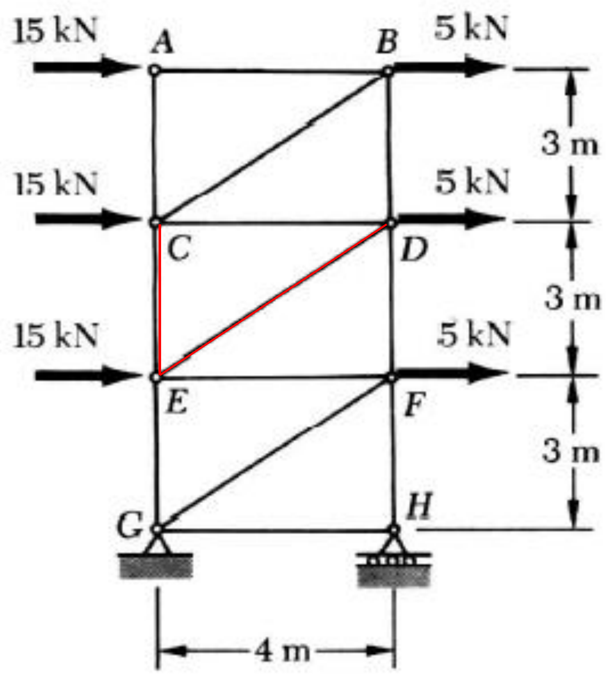
$$\boxed{\sigma_{BC} = 7{,}86 MPa \ e \ \sigma_{BA} = 8{,}05 MPa}$$

2)Duas barras circulares maciças estão soldadas em B, como mostrado na figura abaixo. Determine a tensão normal na seção média de cada trecho.

Respostas: $\boxed{\sigma_{AB} = +95{,}5MPa \ e \ \sigma_{BC} = +113{,}2MPa}$



3)Determine as tensões normais nas barras CE e DE, sabendo que elas têm seção transversal retangulares iguais, de dimensões 20x50mm.

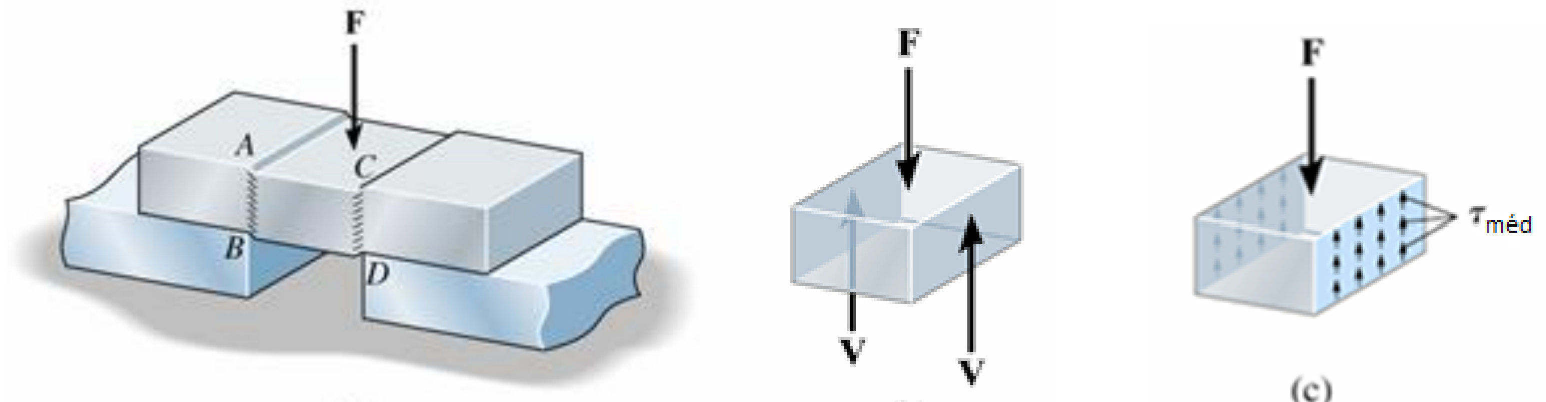


Respostas:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}_{CE} = +15MPa \ e \ \boldsymbol{\sigma}_{DE} = +50MPa}$$

Tensão cisalhante ou de corte

A tensão de cisalhamento foi definida anteriormente como a componente da tensão que age **no plano** da área secionada.

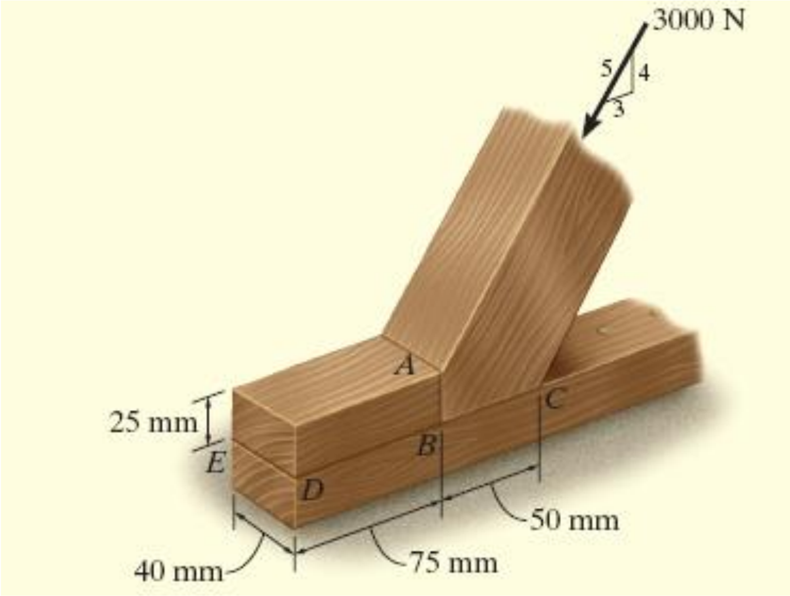


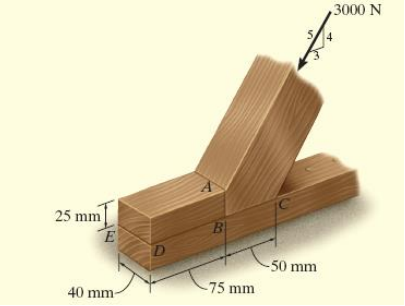
(a) (b) (c)

$$\tau_{média} = \frac{V}{A}$$

Exemplo 3 -

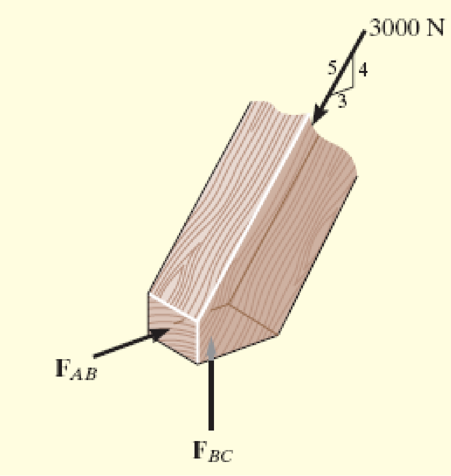
O elemento inclinado está submetido a uma força de compressão de 3.000 N. Determine a tensão de compressão média ao longo das áreas de contato lisas definidas por AB e BC e a tensão de cisalhamento média ao longo do plano horizontal definido por EDB.





O diagrama de corpo livre do elemento inclinado é mostrado:

As forças de compressão agindo nas áreas de contato são:



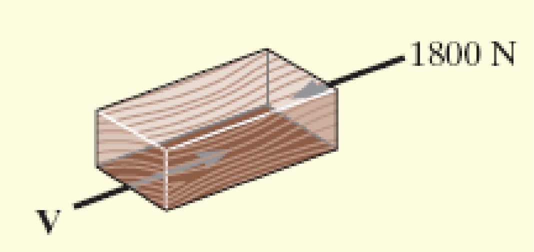
$$\cos\theta = \tfrac{3}{5} \qquad sen\theta = \tfrac{4}{5}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad F_{AB} - 3.000\left(\tfrac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow F_{AB} = 1.800 \text{ N}$$

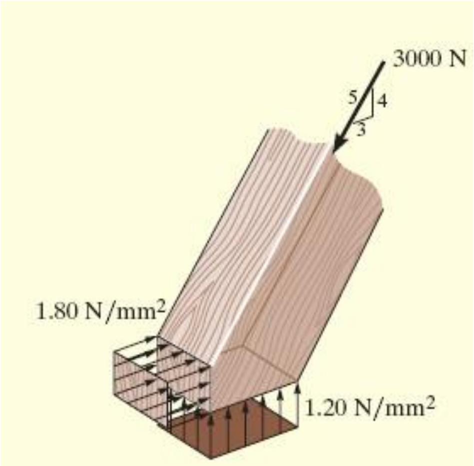
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{BC} - 3.000\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0 \Rightarrow F_{BC} = 2.400 \text{ N}$$

A força de cisalhamento agindo no plano horizontal secionado *EDB* é

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad V = 1.800 \text{ N}$$



As tensões de compressão médias ao longo dos planos horizontal e vertical do elemento inclinado são

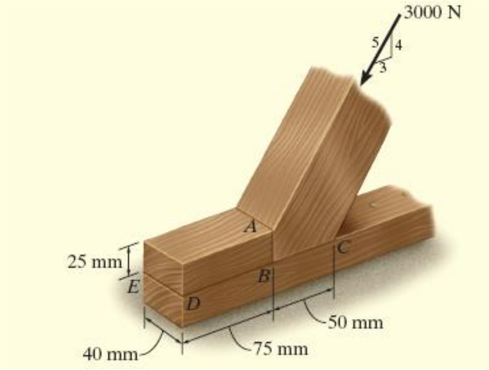


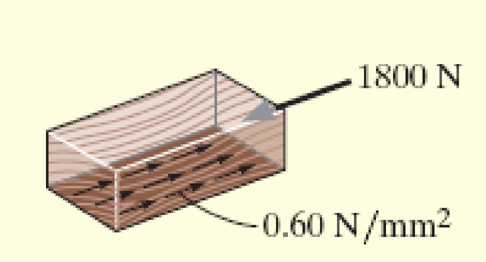
$$\sigma_{AB} = \frac{1.800N}{(25)(40)\,mm^2} = \boxed{1,80 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{2.400N}{(50)(40)\,mm^2} = \boxed{1,20 \text{ MPa}}$$

A tensão de cisalhamento média que age no plano horizontal definido por BD é

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{1.800N}{(75)(40)\,mm^2} = \boxed{0,60 \text{ MPa}}$$





1.5 – Tensão admissível

Um engenheiro responsável pelo **projeto** de um elemento estrutural ou mecânico deve restringir a tensão atuante no material a um **nível seguro** (além de ser analisado periodicamente).
Um método para especificação de carga admissível para projeto ou análise de um elemento é o uso de um número denominado **fator de segurança (FS) ou coeficiente de segurança .**

$$FS = \frac{\sigma_{\lim}}{\sigma_{adm}} \quad \text{ou} \quad FS = \frac{\tau_{\lim}}{\tau_{adm}}$$

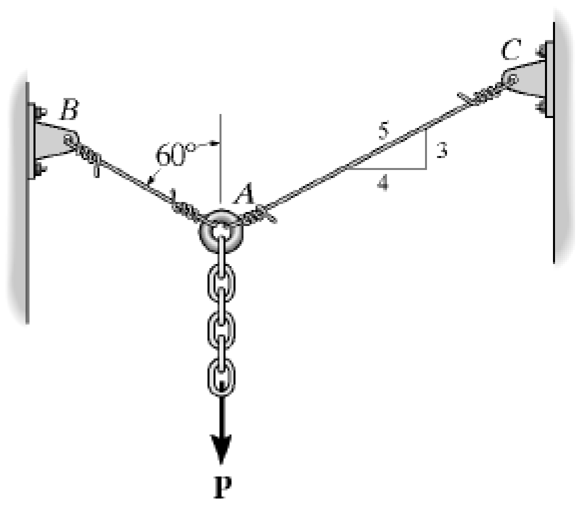
- Tensão limite de um material dúctil = tensão de escoamento
- Tensão limite de um material frágil = tensão de ruptura

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{\lim}}{FS}$$

- O fator de segurança FS será tanto maior quanto maiores forem as incertezas envolvidas no projeto.
- Fontes de incerteza em um projeto:
  - Variabilidade das cargas;
  - Variabilidade das resistências dos materiais;
  - Variabilidade da geometria (erros de construção);
  - Simplificações no modelo de cálculo.

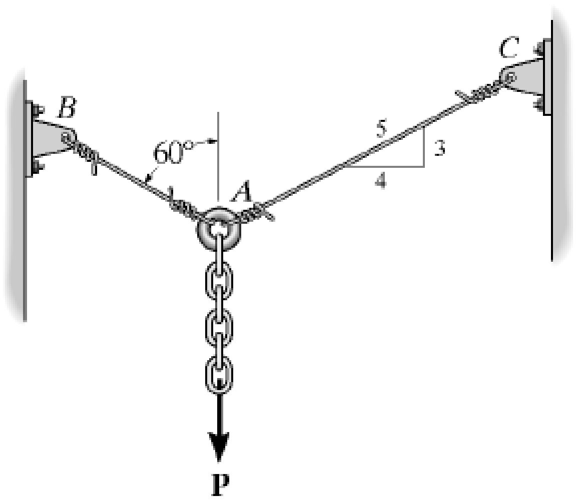
Exercício de Fixação:

4)Os cabos de aço AB e AC são usados para suportar a carga. Se ambos tiverem uma tensão de tração admissível forem $\sigma_{adm} = 200MPa$, determine o diâmetro exigido para cada cabo se a carga aplicada for P=5kN.



Resposta: $\boxed{\phi_{AB} = 5{,}26\text{mm}}$ $\boxed{\phi_{AC} = 5{,}47\text{mm}}$

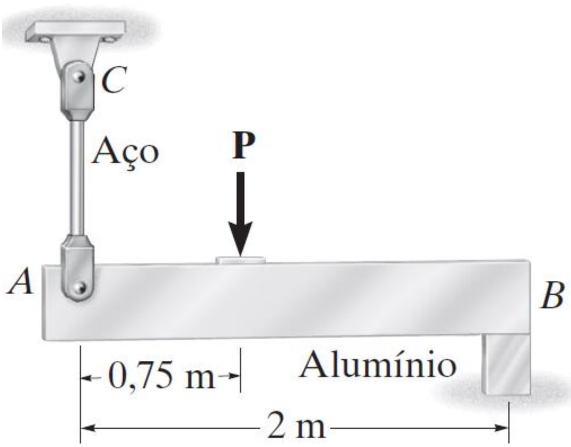
5) Os cabos de aço AB e AC são usados para suportar a carga. Se ambos tiverem uma tensão de tração admissível for $\sigma_{adm} = 180MPa$ se o cabo AB tiver o diâmetro de 6mm e o cabo AC 4mm, determine a maior força P que pode ser aplicada à corrente antes que um dos cabos falhe.



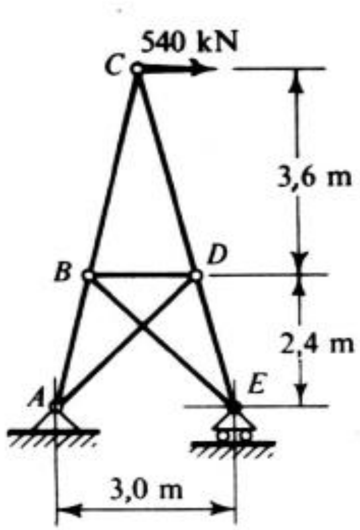
Resposta: $\boxed{P = 2{,}4kN}$

6) A barra rígida *AB* é sustentada por uma haste de aço AC com 20 mm de diâmetro e um bloco de alumínio com área de seção transversal de 1.800 mm^2. Se a tensão de ruptura do aço e do alumínio forem, respectivamente, $\left(\sigma_{aço}\right)_{\text{lim}} = 680MPa$ e $\left(\sigma_{alum}\right)_{\text{lim}} = 70MPa$. Determine a maior carga *P* que pode ser aplicada à barra. Aplique um fator de segurança FS = 2.

Resposta: $\boxed{P = 168kN}$



7) Uma torre utilizada em uma linha de alta tensão é representada na figura. Sabendo-se que a mesma está submetida a uma força horizontal de 540kN e que as tensões admissíveis valem 100MPa à compressão e 140MPa à tração, respectivamente, qual a área necessária para a seção transversal da barra AD? Todas as barras são articuladas. Todas as dimensões estão em metros.
Resposta: $\boxed{A_{AD} = 3640mm^2}$



8) Cada barra da treliça mostrada na figura tem área transversal igual a 1,25in^2. Se a tensão normal admissível para as barras vale 20ksi, quer à tração quer à compressão, determinar a máxima carga P que pode ser aplicada a esta treliça como indicado. Resposta: $\boxed{P = 15kip}$