



Encontro Gaúcho de Educação Matemática

*A Educação Matemática do presente e do futuro:
resistências e perspectivas*

21 a 23 de julho de 2021 - UFPel (Edição Virtual)

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Carolina Ferreira da Silva¹

Vanilde Bisognin²

Eixo: 01 – Ensino e aprendizagem na e da Educação Matemática

Modalidade: Comunicação Científica

Categoria: Aluno de Pós-Graduação

Resumo

Neste artigo são apresentados resultados parciais de uma pesquisa realizada com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática do Rio Grande do Sul, com o objetivo de investigar as contribuições de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares, à luz da Teoria de Registros de Representações Semióticas. Para esse fim, foi aplicada de modo remoto, uma sequência didática, contendo dez problemas sobre Sistemas de Equações Lineares. No trabalho aqui relatado, o foco é dado para sistemas de equações impossíveis. Explorou-se os distintos métodos de análise das soluções e diferentes representações. Os dados foram obtidos por meio das respostas apresentadas pelos alunos e por conversas via conferências. Concluímos que a maior parte dos estudantes conseguiu transitar ao menos entre dois tipos distintos de representações de um mesmo objeto matemático, não tendo grandes dificuldades nas conversões e tratamentos de problemas que reportavam a sistemas impossíveis. No entanto apresentaram dificuldades na representação gráfica e algumas lacunas existentes estão relacionadas à interpretação dos dados do problema, descritos em língua natural.

Palavras-chave: Sistemas impossíveis, Conversões, Tratamentos, Ensino de Matemática.

Introdução

O conteúdo matemático de Sistemas de Equações Lineares, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), possibilita aos estudantes o desenvolvimento das habilidades com o uso da representação algébrica, do raciocínio algébrico matemático e na resolução de problemas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no Ensino Fundamental, destaca que para a potencialização do pensamento algébrico, são essenciais a criação, interpretação e a

¹ Universidade Franciscana e carolsilva.cf57@gmail.com.

² Universidade Franciscana e vanildebisognin@gmail.com.



transição entre as representações gráficas e simbólicas, com o propósito de resolver problemas por meio de equações e inequações, ocorrendo assim, a compreensão dos procedimentos utilizados e das conjecturas construídas no processo de resoluções. (BRASIL, 2017).

Diante disso, com o objetivo de investigar as contribuições de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares, à luz da Teoria de Registros de Representações Semióticas, foi desenvolvida uma pesquisa de mestrado em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Rio Grande do Sul. Neste artigo, são apresentados os pressupostos teóricos e resultados do terceiro bloco da sequência didática desenvolvida nesta investigação.

Fundamentação Teórica

A Teoria dos Registros de Representações Semióticas, de Raymond Duval, tem como propósito a compreensão e investigação das possíveis dificuldades que os estudantes possam ter na construção do conhecimento matemático, e visa auxiliar no aprimoramento do raciocínio, análise e visualização, por meio dos registros de representações semióticas de um objeto matemático.

Duval (2009) salienta que a mobilização de distintos registros de um mesmo objeto matemático, na maioria das vezes, não se dá de maneira natural e óbvia para os estudantes. Nesse sentido, em concordância com a teoria citada, destaca-se que para a compreensão de um conceito é primordial que os discentes consigam transitar de um registro de representação semiótico a outro, sabendo seu significado, não confundindo a representação com o objeto matemático.

Duval (2013) faz referência a quatro tipos de registros de representação, divididos em discursivos e não discursivos. Os registros discursivos são aqueles que fazem referência à escrita, viabilizando a formulação de proposições, transformação de expressões, proporcionando a descrição, o raciocínio e calcular. Já, os registros não discursivos favorecem a visualização, em virtude de mostrar as formas e as configurações. Diante disso, a língua natural, as escritas para os sistemas de numeração, as formas algébricas, os gráficos, os diagramas e as figuras geométricas, são registros de representações semióticas, compreendidos em um sistema de capacidades específicas, com o propósito de descrever ou representar os objetos matemáticos.



Outro ponto que merece destaque, dentro da Teoria de Duval, é a importância de o estudante transitar ao menos em dois tipos distintos de representação de um mesmo objeto matemático, havendo assim, a compreensão do conteúdo, e conseqüentemente, a construção de conexões mentais de aprendizagem. “[...] essa apreensão é significativa a partir do momento que o aluno consegue realizar tratamentos em diferentes registros de representação e passar de um a outro o mais naturalmente possível”. (MACHADO, 2010, p.168).

Para Duval (2009) existem dois tipos de transformações de representações semióticas, chamadas de tratamentos e conversões, os quais representam os diferentes signos empregados na Matemática. Por tratamentos entende-se que são transformações de representações que ocorrem em um mesmo registro, por exemplo, resolver um sistema de equações lineares. Já por conversão, compreende-se que são transformações de representações que consistem em mudar de registro, por exemplo, passar do registro algébrico de um sistema de equações lineares à sua representação gráfica.

Neste trabalho, procuramos o desenvolvimento de conversões e tratamentos, entre os registros de língua natural, algébrica e gráfica, de modo que os licenciandos construíssem conhecimentos, como é ressaltado na teoria de Duval.

Aspectos Metodológicos

A pesquisa aqui relatada foi desenvolvida por meio de uma sequência didática que propiciou elementos para a coleta e análise dos dados. Os participantes da pesquisa foram seis estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina de Álgebra Linear I, que se dispuseram a responder a sequência didática. Todos os estudantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, e para preservar suas identidades foram denominados por E1, E2, E3, E4, E5 e E6.

A sequência didática elaborada incluiu dez problemas envolvendo o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, dividida em quatro blocos e dois desses blocos contendo o que denominamos por “Explorando Conhecimentos”, que são questionamentos com a intenção de identificar as conjecturas e percepções dos participantes em relação os problemas e suas resoluções. O Bloco I foi destinado a um reconhecimento inicial do conteúdo, uma familiarização dos estudantes com sistemas possíveis e impossíveis 2×2 . Ainda, este bloco contém o tópico “Explorando Conhecimentos”.



O Bloco II foi composto por problemas envolvendo sistemas possíveis 3×3 e 4×5 . O Bloco III continha problemas impossíveis 3×3 e o último bloco foi destinado a representação gráfica de três sistemas 2×2 para a classificação quanto suas soluções. Para finalizar possuía mais um “Explorando Conhecimentos”. Nesse trabalho apresentamos os problemas relacionados a sistemas de equações lineares impossíveis.

As respostas foram analisadas à luz da teoria de Registros de Representações Semióticas com foco nas conversões e tratamentos, e aplicadas seguindo os passos da metodologia de Resolução de Problemas de Onuchic e Allevato (2009), a saber: preparação do problema, leitura individual, leitura em conjunto, resolução do problema, observar e incentivar, registro das resoluções na lousa, plenária, buscado consenso e formalização do conteúdo.

Ressaltamos que a aplicação da sequência didática, deu-se de forma remota, devido a pandemia, ocasionada pelo vírus da COVID-19. Desse modo, os problemas foram enviados por blocos aos estudantes, via formulários Google, e ao final de cada bloco ocorreram encontros virtuais, via *Google Meet*, na disciplina de Álgebra Linear I, para as discussões das resoluções, possíveis dificuldades e dúvidas que os participantes pudessem ter no desenvolvimento das questões, uma vez que a pesquisadora não teve contato presencial no momento de solução das questões por parte dos estudantes.

Como já mencionado, as aplicações ocorreram de maneira remota, e em vista disso, algumas adaptações tiveram que ser realizadas, no que diz respeito as categorias de análise de Resolução de Problemas. Desse modo, nos encontros virtuais a pesquisadora solicitou que um dos participantes comentasse sobre o que entendeu do problema e os demais complementaram concordando ou discordando, assim ocorreram as discussões, englobando os passos de leitura individual e em grupos da resolução de problemas.

Os passos de registros na lousa, plenária e busca de consenso, ocorreram de maneira análoga aos anteriores. A formalização do conteúdo deu-se em uma conversa da pesquisadora sobre os diferentes métodos de resolver Sistemas de Equações Lineares. O passo de observar e incentivar ocorreu quando os participantes procuravam a pesquisadora, via WhatsApp, para relatar dificuldades e dúvidas.

Descrição e Análise dos Dados

A sequência didática contava com questionamentos que conduziam os participantes a transitar entre as representações em língua natural, algébrica e gráfica. O Bloco III, continha dois problemas de Sistemas de Equações Lineares Impossíveis. No Quadro 1, trazemos o enunciado do Problema 1.

Quadro 1: Enunciado do Problema 1

Benício, João e Antônio foram a uma lanchonete. Benício pagou R\$8,00 por dois refrigerantes e um pastel; João pagou R\$10,00 por um refrigerante e dois pastéis; e Antônio pagou R\$14,00 por dois refrigerantes e dois pastéis.

- Qual o valor do refrigerante e do pastel dessa lanchonete? Os três amigos pagaram o preço correto?
- Represente graficamente o modelo que representa uma possível solução do problema. O que você observa?
- Analise os diferentes métodos de solucionar o problema.
- Quais poderiam ser os preços corretos que cada amigo pagou?

Fonte: Dados da pesquisa

Seguindo as ideias da Resolução de Problemas e as categorias de análises elencadas nesta pesquisa, todos os participantes compreenderam o problema, retiraram os dados e identificaram as incógnitas, de modo que conseguiram realizar a conversão de língua natural para algébrica sem grandes dificuldades. Na Figura 1, exibimos a conversão realizada pelo participante E6.

Refrigerante = x Pastel = y

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 10 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$$

Figura 1: Conversão do registro de língua natural para algébrica do E6

Fonte: Dados da pesquisa

No registro apresentado pelo participante E6 e exposto na Figura 1, observamos que o estudante compreendeu o problema, retirou os dados, definiu as incógnitas a serem encontradas, conseguindo assim, realizar a conversão de registros solicitada.

Para solucionar o problema, os participantes utilizaram apenas o método da substituição. Sendo assim, na Figura 2, apresentamos a resolução do participante E5.

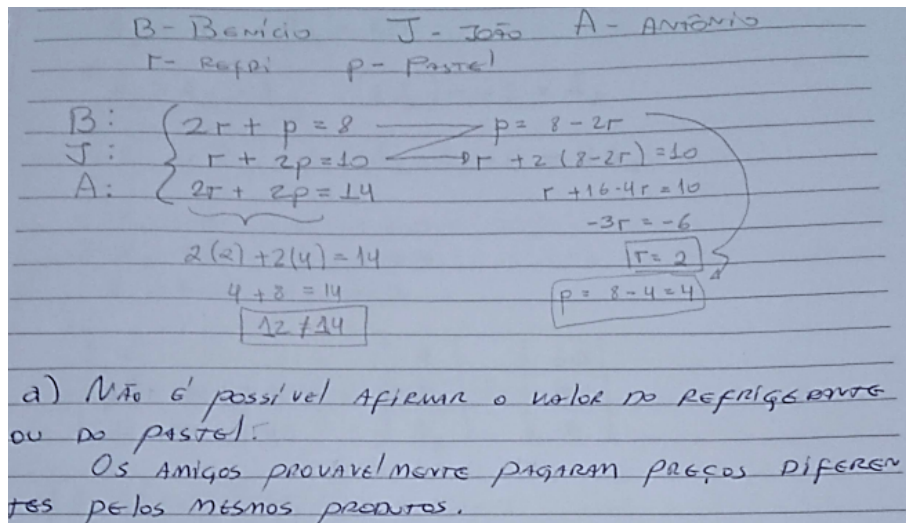


Figura 2: Resolução do Problema 1 do participante E5

Fonte: Dados da pesquisa

Notamos que o participante E5 fez o uso correto de tratamentos algébricos necessários para solucionar o problema, por meio do método escolhido, descobrindo uma desigualdade para os valores encontrados, evidenciando assim, que o sistema é impossível.

Quanto a conversão para o registro gráfico, apenas o participante E2, apresentou uma construção gráfica de modo manual, ou seja, optou por não utilizar o *software* Geogebra para realizar a conversão do registro algébrico para o gráfico. Na Figura 3, exibimos a conversão realizada pelo participante mencionado.

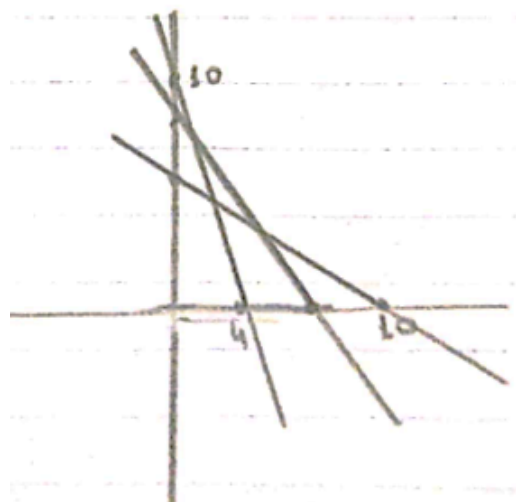


Figura 3: Conversão de registro algébrico para gráfico realizada pelo participante E2

Fonte: Dados da pesquisa

Notamos, no esboço gráfico apresentado pelo E2, que ele não definiu os pontos de intersecção das retas no gráfico e, tampouco mencionou o que observou. Diante disso, a

pesquisadora questionou ao participante sobre o que ele observava na representação gráfica construída. Com isso, o E2, relatou que nesse problema, SI, as retas se interceptam em mais de um ponto. Logo, por meio do questionamento da pesquisadora, o participante conseguiu expressar seu pensamento e observação.

Em relação aos diferentes métodos de solução do problema foi citado somente o método de Cramer. Contudo, no momento de plenária e busca de consenso o participante **E₅**, relatou que independentemente do método escolhido, não era possível determinar os valores dos pastéis e refrigerantes, uma vez que o problema não tem solução.

No Quadro 2, mostramos o enunciado do Problema 2.

Quadro 2: Enunciado do Problema 2

Um agrimensor mediu três glebas de terra, concluindo que a área das três juntas é 60 hectares, a área intermediária tem 45 hectares a menos que o dobro da área maior, e a diferença entre a área maior e a menor tem 5 hectares a mais do que o dobro da área intermediária. Essas conclusões foram apresentadas em um documento para um inventário. Ao ler esse documento, o juiz, que conhecia matemática, exigiu novas medições dos terrenos, mostrando, de forma irrefutável, que havia erro nas informações, documentadas.

- Ao determinar novas medições, o juiz estava correto? Por quê?
- Represente graficamente o modelo que representa uma possível solução do problema. O que você observa?
- Analise os diferentes métodos de solucionar o problema.

Fonte: Dados do problema

Os participantes E1 e E4, tiveram dificuldades em compreender o problema, retirar os dados e definir as incógnitas a serem encontradas. Assim, Duval (2003) justifica que a transição de um enunciado em língua natural a uma representação em outro registro atinge um complexo conjunto de operações que tem por intuito designar os objetos. Isto é, esse processo de transitar entre um registro semiótico a outro não é tão simples quanto parece, mas necessário para o processo de construção de conhecimentos dos estudantes.

Contudo, com o auxílio e incentivo da pesquisadora, os participantes da pesquisa conseguiram compreender o problema e realizar a conversão do registro de língua natural para o algébrico. Na Figura 4, apresentamos a conversão realizada pelo participante E6.

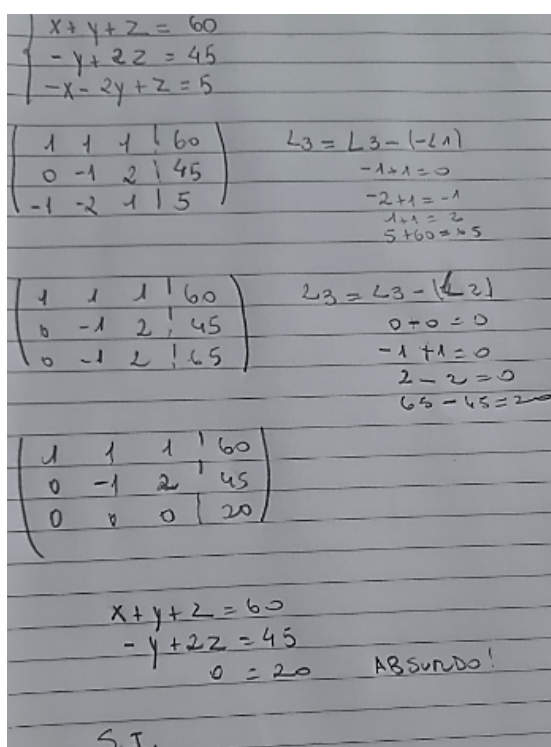
x – área menor y – área intermediária z – área maior

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ y = 2z - 45 \\ z - x = 2y + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 60 \\ -y + 2z = 45 \\ -x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

Figura 3: Conversão do registro de língua natural para algébrica do E6
Fonte: Dados da pesquisa

Notamos, na Figura 4, que o participante definiu as incógnitas do problema, retirou os dados corretamente, transitando entre o registro de língua natural para o algébrico, conseguindo realizar a conversão solicitada.

Para resolver o problema, os participantes, utilizaram: o método de Cramer (E5), escalonamento (E6) e os demais escolheram o método da substituição. Na Figura 5, exibimos a solução do participante E6.



$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ -y + 2z = 45 \\ -x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -1 & 2 & 45 \\ -1 & -2 & 1 & 5 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_3 = L_3 - (-L_1) \\ -1 + 1 = 0 \\ -2 + 1 = -1 \\ 1 + 1 = 2 \\ 5 + 60 = 65 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -1 & 2 & 45 \\ 0 & -1 & 2 & 65 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_3 = L_3 - (-L_2) \\ 0 + 0 = 0 \\ -1 + 1 = 0 \\ 2 - 2 = 0 \\ 65 - 45 = 20 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -1 & 2 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ -y + 2z = 45 \\ 0 = 20 \end{cases} \quad \text{ABSURDO!}$$

S.I.

Figura 5: Resolução do Problema 2 do participante E6
Fonte: Dados da pesquisa

Com a resolução apresentada pelo participante, notamos que ele fez o uso adequado e correto de tratamentos algébricos necessários para a solução do problema, chegando à conclusão de que o sistema proposto por meio do Problema 2, era um Sistema Impossível, uma vez que chegou a um absurdo, no qual zero é igual a vinte ($0=20$).

Em relação à conversão do registro algébrico para o gráfico, solicitado no subitem “b” do Problema 2, todos os participantes utilizaram o *software* Geogebra. Na figura 6, exibimos a conversão realizada pelo participante E4.

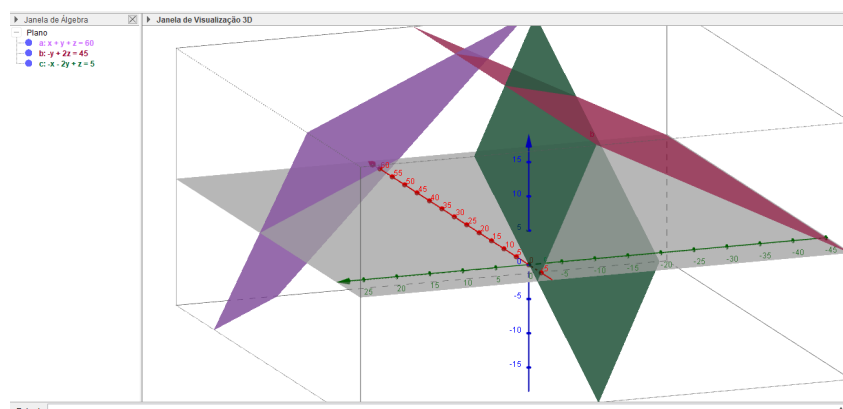


Figura 6: Conversão de registro algébrico para gráfico realizada pelo participante E4
 Fonte: Dados da pesquisa

Com o auxílio do *software*, o participante conseguiu realizar a conversão para o registro gráfico. Todavia, não foi apresentada nenhuma conclusão ou observação do gráfico construído, evidenciando que o participante não tinha conhecimentos sobre as interseções de planos e o que elas significam para a solução de um sistema. Desse modo, mais uma vez, foi explicitado pela pesquisadora, que este caracteriza um gráfico de um sistema impossível, pois os três planos não se interceptam simultaneamente.

Considerações finais

Ao analisar as respostas apresentadas pelos participantes de pesquisa, foi possível notar que eles não tiveram grandes dificuldades em transitar entre os registros de língua natural, algébricos e gráficos quando se tratava de problemas que reportavam a sistemas impossíveis. As lacunas existentes estão relacionadas à interpretação dos dados do problema, descritos em língua natural. Em relação a conversão para o registro gráfico, foi notória a dependência do uso de *softwares* para representar graficamente um Sistema de Equações Lineares.

Ainda, diante do que foi exposto, mencionamos que as expectativas e as intenções desse bloco foram atingidas, pois os estudantes apesar das fragilidades apresentadas, conseguiram transitar entre as distintas representações propostas nesta pesquisa, de modo que construíram e consolidaram conhecimentos relacionados a sistemas impossíveis e suas resoluções algébricas e gráficas, tendo para esta última o apoio do *software* Geogebra.

Os participantes da pesquisa conseguiram transitar ao menos entre dois registros distintos de Sistemas de Equações Lineares, como ressalta Duval (2009). À vista disso, a



construção do conhecimento sobre o conteúdo matemático ficou clara nas soluções apresentadas.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular- BNCC**. MEC.

Brasília, DF, 2017. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

Acesso em: 28 jan. 2021.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. LEVY, L. F.; SILVEIRA, M. R. A. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em matemática**: registros de representações semióticas. 2. ed. São Paulo: Papyrus, 2003, p. 11-33. (Papyrus Educação)

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. (2013). In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papyrus, 2013, p, 11-34.

MACHADO, S. D. A. (org). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. 5. Ed. Campinas, São Paulo: Papyrus Editora, 2010. 160 p.

ONUCHIC, L. D. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Formação de professores urgentes na licenciatura em matemática. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, p. 169 – 187, 2009.

PONTE, J. P. da; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: editora DGIDC, 2009, Portugal. 180 p. Disponível em:

http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_%28Set2009%29.pdf. Acesso em: 15 jan. 2021.